HOMMAGE À JEAN-LOUIS OVAERT. DISCUSSIONS DE VOYAGES

ROBERT ROLLAND

J'ai rencontré Jean-Louis Ovaert en 1967 alors qu'il faisait des cours de préparation à l'agrégation à l'ENSET (aujourd'hui ENS Cachan) où j'étais élève. Il avait œuvré, avec quelques autres, depuis quelques années, pour convaincre la direction de l'école de pérenniser une préparation à l'agrégation pour tous les élèves de la section mathématiques. J'ai tout de suite été impressionné par la hauteur de vue qui se dégageait de ses interventions. Il utilisait sa grande culture mathématique pour faire reposer contenus de leçons et solutions d'exercices sur des questions et des grands problèmes mathématiques qu'il plongeait dans leur développement historique. Ainsi, nous inculquait il, non seulement une culture mathématique et la manière d'aborder des problèmes sans entrer tout de suite dans l'aspect technique, mais aussi une vision philosophique des mathématiques comme science plongée dans l'histoire.

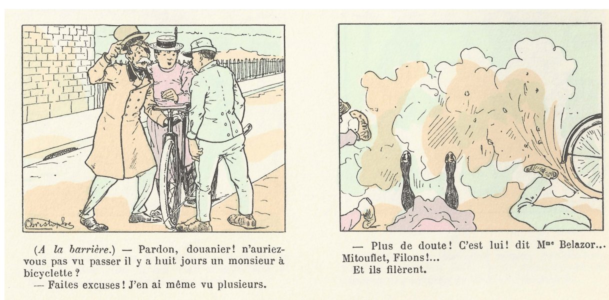
Quelques années plus tard, en 1973, nous nous sommes retrouvés dans le cadre des IREM. Il était à l'époque directeur de l'IREM de Nancy. L'influence de Jean-Louis Ovaert dans les orientations des IREM a été très importante à côté de fortes personnalités comme André Revuz, Maurice Glaymann, Jean Colmez, Georges Glaeser, et d'autres. Il participait par un cours d'épistémologie au DEA de Didactique que Jean Colmez et l'équipe de l'IREM de Bordeaux en particulier Guy Brousseau, avaient mis en place. C'est à cette période (1975) qu'il est parti de la Faculté de Nancy pour prendre un poste de professeur de classes préparatoires au Lycée Thiers de Marseille et parallèlement participer activement aux travaux de l'IREM d'Aix-Marseille et plus généralement aux travaux des IREM sur le plan national. J'ai pu voir, en tant que « colleur » dans sa classe, tout le soin qu'il prenait pour que chacun de ses élèves puisse intégrer l'école correspondant à ses possibilités. Il a commencé à cette époque, avec toute une équipe, le travail sur la collection Léonhard Épistemon dont deux tomes co-écrits avec Jean-Luc Verley ont été publiés et dont quelques tomes hélas restent encore dans les cartons. Durant plusieurs années, il a diffusé un grand nombre d'exercices et de problèmes aptes à infléchir les types de sujets des concours d'entrée aux grandes écoles. En 1981, en parallèle avec son travail de professeur de classe préparatoire, il a été nommé conseiller du Directeur des Lycées au Ministère de l'Éducation Nationale. Dans la semaine il s'occupait de ses élèves au Lycée Thiers et partait le samedi et le dimanche travailler au Ministère. Il a été nommé peu après Inspecteur Général, mais il a gardé une attache à Marseille où il venait régulièrement. Nous avons pu continuer à travailler, notamment sur l'introduction de l'informatique dans les classes préparatoires (1986), où il a eu un rôle majeur, sur des sujets de concours, sur la suite de la collection Léonhard Épistemon.

Mais l'univers de Jean-Louis ne se limitait pas aux mathématiques et aux problèmes ministériels. Pour l'avoir fréquenté en tant qu'ami, je peux dire qu'il savait apprécier la

Date: 26 Mars 2015.

vie et qu'il était curieux de tout. Je garde de ses invitations des souvenirs gastronomiques inoubliables. Là aussi il ne supportait pas la médiocrité. Grand amateur de musique, il m'a fait découvrir des œuvres peu connues du grand public. Il avait d'ailleurs une collection d'enregistrements impressionnante. La culture classique n'avait aucun secret pour lui ; Platon et Aristote étaient ses familiers. Bref s'il reste encore quelques humanistes en ce monde, il en faisait partie. Un esprit aussi curieux de tout ne pouvait pas se limiter au rôle de copilote lorsque nous allions dans le sud-ouest avec une escale à Agen chez nos amis Jean-Marie et Françoise Bouscasse. Je ne compte plus le nombre de fois, où pris par des conversations sur tel ou tel point mathématique nous avons loupé une bretelle d'autoroute. Bien entendu nous ramenions de ces expéditions, qui nous permettaient de rencontrer nos amis Bordelais, quelques provisions : foies gras, armagnac, sauternes.

Ainsi pendant près de trente ans, nous sommes partis toutes les années pour un voyage dans le sud-ouest. Pour moi c'était devenu un ami, et nous avions pendant tout le parcours des conversations sur des sujets les plus divers, en particulier quelques sujets mathématiques dont je vais donner un petit exemple. Le plus souvent la conversation mathématique débutait par une citation de la bande dessinée de Christophe, « L'idée fixe du Savant Cosinus », qu'il connaissait presque par cœur. « Tu comprends, me disait-il, c'est comme dans le Savant Cosinus, ... » et là c'était parti. Aussi, pour commencer, je voudrais citer ce petit extrait [1] de la dite bande dessinée. Je pense que tous les anciens élèves de Jean-Louis se souviendront de l'expression « plus de doute ! c'est lui ! » lorsque se posait une question d'existence et d'unicité.



L'exemple que j'ai choisi, parmi les très nombreuses discussions que nous avons eues, concerne les approximations successives. Ce thème décrit assez bien, sur un exemple simple, les mathématiques telles qu'il aimait les voir. Il avait sur chaque question une vision claire des principaux ressorts qui lui permettait d'éclairer les problèmes de plusieurs points de vue pertinents et d'en montrer les diverses facettes.

Partons de l'énoncé initial, le théorème du point fixe de Stephan Banach (1922) Extrait du Chap.2, §2. de : *Stephan Banach, Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales, Fund. Math. 3 (1922), p. 133–181*

1. Extrait de *L'idée fixe du savant Cosinus* de Christophe, Librairie Armand Colin, 103 Boulevard Saint Michel, Paris.

§ 2. THÉORÈME 6. *Si*

1° $U(X)$ *est une opération continue dans* E, *le contre-domaine de* $U(X)$ *étant contenu dans* E;

2° *Il existe un nombre* $0 < M < 1$ *qui pour tout* X' *et* X'' *remplit l'inégalité*

$$\|U(X') - U(X'')\| \leqslant M \cdot \|X' - X''\|,$$

il existe un élément X *tel que* $X = U(X)$.

Jean-louis pensait, avec raison à mon sens, qu'on aurait pu s'affranchir du poids de l'histoire et faire évoluer ce théorème en le suivant :

Théorème. *Soit* f *une application d'un intervalle fermé* $[a, b]$ *(ou d'un espace métrique complet) dans lui-même . On suppose que pour tout* $n \geqslant 1$ *la fonction* f_n *obtenue en itérant* n *fois* f *:*

$$f_n = f \circ f \circ \cdots \circ f$$

est lipschitzienne de rapport k_n *(*$\left|f_n(x) - f_n(y)\right| \leqslant k_n|x - y|$*). On suppose en outre que la série* $\sum_n k_n$ *est convergente. Alors la fonction* f *admet un point fixe* c *et un seul. Pour tout point* $x_0 \in [a, b]$ *la suite* $(x_n)_{n \geqslant 0}$ *définie par récurrence à partir de ce point* x_0 *en itérant* f *:*

$$x_n = f(x_{n-1}) = f_n(x_0),$$

converge vers le point fixe c.

Cet énoncé a l'avantage de mieux contrôler la convergence vers le point fixe en évitant de remplacer la série convergente de terme général k_n par une série géométrique de terme général k^n. C'est notamment très intéressant dans le cas de la méthode de Picard pour les équations différentielles.

La vitesse de convergence de la suite de terme général x_n est liée à la vitesse de convergence de la série de terme général k_n. Plus précisément, l'inégalité suivante donne une majoration de l'erreur :

$$|x_n - c| \leqslant \left(\sum_{i=n}^{\infty} k_n\right) |x_0 - x_1|.$$

Donc pour une convergence rapide on a intérêt à avoir des k_n qui tendent rapidement vers 0. Là on peut faire deux remarques intuitives : d'une part, au fil des itérations, puisqu'on se rapproche du point fixe, l'intervalle sur lequel on travaille peut être réduit, d'autre part le k_n est lié au $\sup$ de la valeur absolue de la dérivée de f sur l'intervalle de travail atteint après $n - 1$ itérations. Pour une convergence rapide on a donc intérêt à avoir une fonction f de dérivée nulle au point fixe. Dans ce cas par application de la formule de Taylor on voit que la convergence est quadratique, c'est-à-dire qu'à chaque itération on double à peu près le nombre de décimales exactes. Si on ne dispose pas encore de la formule de Taylor, il est possible de faire le calcul à la main dans certains cas, notamment dans les cas simples de fonctions polynomiales ou rationnelles.

Lorsque la dérivée de f n'est pas nulle au point fixe et ne s'annule pas sur l'intervalle de travail, on va essayer de remplacer f par une fonction g ayant le même point fixe c que f et de dérivée nulle au point fixe c. Ceci est possible en posant

$$h(x) = f(x) - x,$$

puis :

$$g(x) = x - \frac{h(x)}{h'(x)}.$$

La fonction g convient. Remarquons qu'on tombe alors sur la résolution de l'équation $f(x) - x = 0$ par la méthode de Newton, ce qui donne un autre éclairage au problème.

À titre d'exemple tabulons $\sin(x)$ et $\cos(x)$ de degré en degré entre $0°$ et $360°$, c'est-à-dire pour les angles $x_k = \frac{k\pi}{180}$, où k est entier et vérifie $0 \leqslant k < 360$.

Des considérations géométriques nous permettent de connaître les sinus et cosinus d'un certain nombre d'angles particuliers $0°$,$18°$, $30°$,$45°$:

$\sin(0) = 0$	$\cos(0) = 1$
$\sin(\frac{\pi}{10}) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\cos(\frac{\pi}{10}) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$
$\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$	$\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

FIGURE 1. Lignes trigonométriques classiques

À partir des valeurs fournies par la table précédente et des formules trigonométriques :

$$\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a), \tag{1}$$

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b), \tag{2}$$

on peut calculer successivement les lignes trigonométriques des angles $15°$ $(45° - 30°)$ et $12°$ $(30° - 18°)$ puis $3°$ $(18° - 15°)$. Ainsi maintenant grâce aux formules :

$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a), \tag{3}$$

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b), \tag{4}$$

appliquées avec $b = 3\pi/180$, on peut calculer formellement la table des sinus et des cosinus de $3°$ en $3°$. On peut obtenir des formules "exactes" écrites avec des radicaux. Puisqu'on dispose de la table de $3°$ en $3°$ il suffit de calculer le sin et le cos pour un angle d'un degré et d'utiliser les formules d'addition et de soustraction pour avoir la table qu'on cherche à élaborer. On part de la formule

$$\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$$

qu'on va appliquer ici avec $x = \pi/180$. On cherche alors à résoudre cette équation connaissant la valeur $a = \sin(3x)$. L'équation se ramène à

$$\sin(x) = \frac{1}{3}(4\sin^3(x) + a).$$

Donc si on pose

$$f(u) = \frac{1}{3}(4u^3 + a)$$

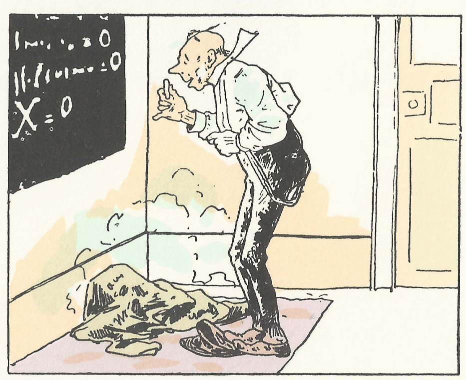
le nombre $\sin(\pi/180)$ est solution de l'équation $f(u) = u$, c'est-à-dire est le point fixe de f. Pour calculer cette solution on part d'une valeur approchée de la solution u_0, par exemple $u_0 = 0$, et on calcule $u_1 = f(u_0)$. La valeur u_1 est réinjectée dans le second membre pour calculer une nouvelle approximation $u_2 = f(u_1)$, puis plus généralement, par récurrence $u_n = f(u_{n-1})$. Nous avons utilisé la fonction $f = 1/3(4x^3 + a)$ pour définir par récurrence la suite $u_n = f(u_{n-1})$ qui converge vers le point fixe $c = f(c)$. Hélas, au point c, la valeur de la dérivée $f'(c)$ n'est pas nulle, si bien que la convergence n'est peut être pas aussi rapide qu'elle pourrait l'être avec une fonction g ayant même point fixe et de dérivée nulle en ce point. Nous introduisons la fonction $h(x) = f(x) - x$ puis la fonction

$$g(x) = x - \frac{h(x)}{h'(x)}.$$

La fonction g a le même point fixe c que f et $g'(c) = 0$. Tous calculs faits, on obtient

$$g(x) = \frac{8x^3 - a}{12x^2 - 3}.$$

La suite $u_0 = 0$, $u_n = g(u_{n-1})$ converge alors plus vite que précédemment vers la valeur cherchée $b = \sin(\pi/180)$. Une expérimentation avec un système de calcul confirme ce comportement. En partant de la valeur initiale $u_0 = 0$, la première itération, $u_1 = g(u_0) = a/3$, donne 4 décimales exactes, la deuxième, $u_2 = g(u_1)$, donne 11 décimales exactes alors qu'avec la fonction initiale on ne trouve à la deuxième itération que 6 décimales exactes.



A trois heures et demie, le docteur découvre la valeur de x, l'inconnue cherchée ; ce qui lui cause une joie sans mélange. — Nous prions les esprits superficiels de s'abstenir de toute réflexion sur la valeur de x, et de ne point prétendre que Zéphyrin a beaucoup travaillé pour peu de chose. [2]

UNIVERSITÉ D'AIX-MARSEILLE, INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE MARSEILLE, LUMINY CASE 907, F13288 MARSEILLE CEDEX 9, FRANCE

E-mail address: robert.rolland@acrypta.fr

2. Extrait de *L'idée fixe du savant Cosinus* de Christophe, Librairie Armand Colin, 103 Boulevard Saint Michel, Paris.