Fonctions de Möbius - Formule de Rota

Robert Rolland

Révisé 10 Janvier 2006

R. Rolland, C.N.R.S. Institut de Mathématiques de Luminy
Luminy Case 930, F13288 Marseille CEDEX 9
e-mail: rolland@iml.univ-mrs.fr

1 Chaînes dans les ensembles finis ordonnés

Soit $\mathbb{L}$ un ensemble **fini ordonné** par une relation notée $\leq$.

Definition 1.1 *Pour tout entier $p \geq 0$ et tout couple (x, y) d'éléments de $\mathbb{L}$ tels que $x \leq y$ on appelle chaîne de longueur p joignant x à y toute suite finie $(x_0, x_1, \cdots, x_p)$ d'éléments de $\mathbb{L}$ tels que*

$$x = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = y.$$

On note $c_p(x, y)$ le nombre de ces chaînes.

Il est clair que

- $c_0(x, x) = 1$
- $c_0(x, y) = 0$ pour $x < y$
- $c_p(x, x) = 0$ pour $p > 0$
- $c_1(x, y) = 1$ pour $x < y$

Proposition 1.1 *On dispose des relations de récurrence suivantes entre les nombres $c_p(x,y)$:*

$$c_{p+1}(x,y) = \sum_{x \leq z < y} c_p(x,z)$$

$$c_{p+1}(x,y) = \sum_{x < z \leq y} c_p(z,y)$$

Proof. Toute chaîne de longueur $p+1$ joignant x à y est constituée d'une chaîne de longueur p joignant x à un certain $z < y$ à laquelle on adjoint comme point x_{p+1} le point extrémité y. Ceci nous donne la première relation. La deuxième relation se démontre de manière analogue.

2 Fonction de Möbius

Definition 2.1 *La fonction de Möbius $\mu_{\mathbb{L}}$ de l'ensemble ordonné $\mathbb{L}$ est la fonction définie sur $\mathbb{L} \times \mathbb{L}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ par*

$$\mu_{\mathbb{L}}(x,y) = \sum_{p \geq 0} (-1)^p c_p(x,y)$$

si $x \leq y$ et par

$$\mu_{\mathbb{L}}(x,y) = 0$$

sinon.

Proposition 2.1 *La fonction $\mu_{\mathbb{L}}$ vérifie*

$$\mu_{\mathbb{L}}(x,x) = 1$$

et si $x < y$

$$\sum_{x \leq z \leq y} \mu_{\mathbb{L}}(x,z) = 0$$

$$\sum_{x \leq z \leq y} \mu_{\mathbb{L}}(z,y) = 0.$$

Proof. La première relation est une conséquence du fait que $\mu_{\mathbb{L}}(x,x) = c_0(x,x)$.
En ce qui concerne la deuxième relation en utilisant la définition de $\mu_{\mathbb{L}}$ et la proposition 1.1 on obtient la suite de calculs

$$\sum_{x\leq z\leq y}\mu_{\mathbb{L}}(x,z)=\sum_{x\leq z\leq y}\sum_{p\geq 0}(-1)^p c_p(x,z)$$

$$\sum_{x\leq z\leq y}\mu_{\mathbb{L}}(x,z)=\sum_{p\geq 0}(-1)^p\sum_{x\leq z\leq y}c_p(x,z)$$

$$\sum_{x\leq z\leq y}\mu_{\mathbb{L}}(x,z)=\sum_{p\geq 0}(-1)^p(c_{p+1}(x,y)+c_p(x,y))$$

donc

$$\sum_{x\leq z\leq y}\mu_{\mathbb{L}}(x,z)=0.$$

La dernière relation s'obtient de manière analogue.

Remarque 1: Si on considère la relation d'ordre $\geq$ au lieu de $\leq$ sur $\mathbb{L}$, on obtient une fonction de Möbius $\mu'_{\mathbb{L}}$ qui vérifie

$$\mu'_{\mathbb{L}}(x,y)=\mu_{\mathbb{L}}(y,x).$$

Remarque 2: Toute cette étude reste encore valable sur un ensemble infini pourvu que pour tout couple x, y tel que $x\leq y$ il n'y ait qu'un ensemble fini de z tels que $x\leq z\leq y$. Tout ce qui est fait par la suite reste aussi valable dans ce cas.

3 Formule sommatoire de Rota

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{L}$ à valeurs dans un groupe abélien G. Posons

$$g(x)=\sum_{y\leq x}f(y).$$

Theorem 3.1 (Inversion de Rota) *Il est possible de retrouver la fonction f connaissant la fonction g grâce à la formule*

$$f(x)=\sum_{y\leq x}\mu_{\mathbb{L}}(y,x)g(y).$$

Proof.

$$\sum_{y\leq x}\mu_{\mathbb{L}}(y,x)g(y)=\sum_{y\leq x}\mu_{\mathbb{L}}(y,x)\sum_{z\leq y}f(z)$$

et par un autre regroupement des termes

$$\sum_{y\leq x}\mu_{\mathbb{L}}(y,x)g(y)=\sum_{z\leq x}f(z)\sum_{z\leq y\leq x}\mu_{\mathbb{L}}(y,x)$$

or le seul cas où la somme $\sum_{z\leq y\leq x}\mu_{\mathbb{L}}(y,x)$ est non nulle est quand $z=x$ auquel cas cette somme vaut 1, donc

$$\sum_{y\leq x}\mu_{\mathbb{L}}(y,x)g(y)=f(x).$$

Remarquons que dans la formule d'inversion de Rota les $\mu_{\mathbb{L}}(y,x)$ sont dans $\mathbb{Z}$ alors que les $g(y)$ sont dans G. La signification des produits $\mu_{\mathbb{L}}(y,x)g(y)$ est claire; c'est la signification classique, à l'aide d'une itération d'additions, de la multiplication d'un élément d'un groupe par un entier.

Remarquons aussi que cette formule d'inversion, en raison de la remarque faite à la fin de la section précédente, peut aussi s'écrire, lorsque la fonction h est définie par

$$h(x)=\sum_{x\leq y}f(y),$$

sous la forme

$$f(x)=\sum_{x\leq y}\mu(x,y)h(y).$$

Si on remplace G par un corps K de caractéristique nulle alors $\mathbb{Z}\subset K$ et dans ce cas on peut énoncer le résultat suivant

Theorem 3.2 *Si pour tout couple (x,y) de points de $\mathbb{L}$ tels que $x\leq y$ il existe un $a(x,y)$ dans K, de telle sorte que pour toute fonction f de $\mathbb{L}$ dans K et tout x de $\mathbb{L}$ on ait*

$$f(x)=\sum_{y\leq x}a(x,y)g(y)$$

où

$$g(y)=\sum_{z\leq y}f(z)$$

alors

$$a(x,y) = \mu_{\mathbb{L}}(x,y)$$

pour tout $x \leq y$.

Proof. Notons s la cardinalité de $\mathbb{L}$. Indexons les éléments de $\mathbb{L}$ sous la forme $\mathbb{L} = \{l_1, l_2, \cdots, l_s\}$ de telle sorte que l_1 soit minimal dans $\mathbb{L}$ et que pour $k > 1$ l_k soit minimal dans $\mathbb{L} \setminus \{l_1, l_2, \cdots, l_{k-1}\}$. Soient $f_1, f_2, \cdots, f_s$ des fonctions de $\mathbb{L}$ dans K linéairement indépendantes et $g_1, g_2, \cdots, g_s$ les fonctions correspondantes. On sait donc que

$$g_j(l_i) = \sum_{l \leq l_i} f_j(l)$$

Si bien que si on note F la matrice dont les coefficients sont les $f_j(l_i)$ et G celle dont les coefficients sont les $g_j(l_i)$ alors $G = BF$ où B est une matrice triangulaire inférieure (à cause de l'indexation des éléments de $\mathbb{L}$) ayant des 1 sur la diagonale. Donc la matrice B est inversible et comme F aussi par le choix des fonctions f_j, il en découle que G est inversible.
Par hypothèse on sait que $F = AG$ où les coefficients de A sont des zéros ou des a(x,y). Alors $A = FG^{-1}$. On en conclut que A est entièrement déterminée par F et G ce qui montre le résultat.

Pour calculer la fonction de Möbius d'un ensemble concret L on peut donc penser aux diverses démarches suivantes:

- Calculer tous les coefficients $c_p(x,y)$.
- Utiliser la proposition 2.1 pour calculer par récurrence les $\mu_{\mathbb{L}}(x,y)$.
- Utiliser une formule d'inversion connue par d'autres moyens pour en déduire grâce au théoreme 3.2 la fonction de Möbius.

4 Exemples

4.1 Intervalles finis d'entiers

Prenons $\mathbb{L} = \{1, 2, \cdots, n\}$ muni de l'ordre habituel. La fonction de Möbius dans ce cas est donnée par

$$\mu_{\mathbb{L}}(i,i) = 1$$

$$\mu_{\mathbb{L}}(i, i+1) = -1$$

et pour $j > i+1$

$$\mu_{\mathbb{L}}(i, j) = 0.$$

Proof. Nous avons dejà vu que la relation $\mu_{\mathbb{L}}(x, x) = 1$ a lieu dans tous les cas.
Pour la deuxième égalité il suffit de voir que le coefficient $c_r(i, i+1)$ est nul sauf pour $r = 1$ auquel cas il vaut 1.
Enfin quand $j > i+1$

$$\mu_{\mathbb{L}}(i, j) = \sum_{p=1}^{j-i} (-1)^p c_p(i, j)$$

et comme $c_p(i, j)$ est égal au coefficient binomial C_{j-i-1}^{p-1} la somme considérée est nulle.

Ainsi si $g(i) = \sum_{j=1}^{i} f(j)$ alors par la formule d'inversion de Rota on trouve la relation bien claire

$$f(i) = g(i) - g(i-1).$$

On aurait pu partir de cette relation visiblement vraie et utiliser le théorème 3.2 pour en déduire la fonction de Möbius.

4.2 Diviseurs d'un entier

On se place dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres naturels. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{L}$ l'ensemble des diviseurs de n ordonné par la relation de divisibilité. La fonction de Möbius dans ce cas est

$$\mu_{\mathbb{L}}(r, s) = \mu(s/r)$$

où μ est la fonction de Möbius classique donnée par

$$\mu(1) = 1$$

si $p_1, p_2, \cdots, p_k$ sont des nombres premiers distincts

$$\mu(p_1.p_2 \cdots p_k) = (-1)^k$$

et dans tous les autres cas

$$\mu(r) = 0.$$

Proof. Remarquons tout d'abord que $\mu_{\mathbb{L}}(r,s) = \mu_{\mathbb{L}}(1, r/s)$. Si on considère la fonction de Möbius arithmétique il est facile de voir que $\sum_{z|y} \mu(z) = 0$ ou encore $\mu(y) = -\sum_{z|y, z\neq y} \mu(z)$. Comme $\mu_{\mathbb{L}}(1,y)$ vérifie la même relation de récurence et que $\mu_{\mathbb{L}}(1,1) = \mu(1)$ on conclut que $\mu_{\mathbb{L}}(1,y) = \mu(y)$. D'où le résultat annoncé.

Ici on a pu déterminer la fonction de Möbius sans faire appel au nombre de chaînes.

4.3 Parties d'un ensemble fini

Soit S un ensemble fini et $\mathbb{L} = \mathcal{P}(S)$ l'ensemble des parties de S ordonné par inclusion. La fonction de Möbius dans ce cas est

$$\mu_{\mathbb{L}}(A,B) = (-1)^{\sharp B - \sharp A}$$

(où $\sharp X$ désigne le nombre d'éléments de X) si $A \subset B$ et

$$\mu_{\mathbb{L}}(A,B) = 0$$

sinon.

Proof. La démonstration se fait par récurrence sur $\sharp(B-A)$. Si $\sharp(B-A) = 0$ (cas où A=B) le résultat est vrai (on obtient bien $\mu_{\mathbb{L}}(A,A) = 1$). Supposons le résultat vrai pour toutes les parties $A \subset B$ telles que $\sharp(B-A) = k$ et montrons le résultat pour un couple B, A , où $A \subset B$ et $\sharp(B-A) = k+1$. Alors

$$\sum_{A \subset T \subset B} \mu_{\mathbb{L}}(A,T) = 0$$

et par hypothèse de récurrence

$$\sum_{A \subset T \subsetneq B} (-1)^{\sharp T - \sharp A} + \mu_{\mathbb{L}}(A,B) = 0.$$

Or il y a autant de parties entre A et B ayant un nombre pair d'éléments que de parties ayant un nombre impair d'éléments par suite

$$\sum_{A \subset T \subset B} (-1)^{\sharp T - \sharp A} = 0$$

donc

$$\mu_{\mathbb{L}}(A,B) = (-1)^{\sharp B - \sharp A}.$$

4.4 Transformation de Reed et Müller

Soit $\mathbb{L} = \{0,1\}^m$. Si $u = (u_1, u_2, \cdots, u_m) \in \mathbb{L}$ notons

$$supp(u) = \{i | u_i \neq 0\}.$$

Sur $\mathbb{L}$ on considère la relation d'ordre

$$(u \leq v) \Longleftrightarrow (supp(u) \subset supp(v)).$$

Dans ce cas la fonction de Möbius est

$$\mu_{\mathbb{L}}(u,v) = (-1)^{\sharp supp(u) - \sharp supp(v)}.$$

Proof. On se ramène clairement à l'exemple précédent des parties d'un ensemble fini.

Remarquons qu'on sait que si f est une fonction booléenne de m variables booléennes et si on pose

$$g(u) = \sum_{v \leq u} f(v)$$

alors

$$f(u) = \sum_{v \leq u} g(v).$$

On est ici dans un cas où une formule d'inversion (transformation de Reed Müller) ne nous permet pas de retrouver la fonction de Mobius (bien sûr à partir de la fonction de Mobius on retrouve cette formule puisque dans $\{0,1\}$ 1=-1).

4.5 Formule d'inclusion exclusion

Soit E un ensemble fini non vide, $P_1, P_2, \cdots, P_n$, des sous ensembles de E. Notons S l'ensemble $\{1, \cdots, n\}$ et $\mathcal{P}(S)$ l'ensemble de ses parties, ordonné par inclusion. Définissons les fonctions f et g de $\mathcal{P}(S)$ dans $\mathbb{Z}$ par

$$f(I) = \sharp\Big(\bigcap_{i \in I} P_i \bigcap_{i \notin I} \overline{P_i}\Big)$$

$$g(I) = \sharp\Big(\bigcap_{i \in I} P_i\Big).$$

Rappelons que si $I = \emptyset$ alors $\bigcap_{i\in I} P_i = E$.
On vérifie que

$$g(I) = \sum_{I\subset J} f(J),$$

et donc par inversion

$$f(I) = \sum_{I\subset J} (-1)^{\sharp J - \sharp I} g(J).$$

En particulier si $I = \emptyset$ alors

$$\sharp\Big(\bigcap_{1\le i\le n} \overline{P_i}\Big) = \sum_{k\ge 0} (-1)^k \sum_{\sharp J = k} g(J),$$

ou encore par passage au complémentaire

$$\sharp\Big(\bigcup_{1\le i\le n} P_i\Big) = \sharp E - \sum_{k\ge 0} (-1)^k \sum_{\sharp J = k} g(J) = \sum_{k\ge 1} (-1)^{k+1} \sum_{\sharp J = k} g(J).$$

4.6 Familles d'hyperplans

Soit $\mathcal{A}$ un arrangement d'hyperplans (nombre fini d'hyperplans d'un espace vectoriel de dimension finie V). Soit $\mathbb{L} = L(\mathcal{A})$ l'ensemble des intersections d'éléments de $\mathcal{A}$. Sur $\mathbb{L}$ on met la relation d'ordre $(X \le Y) \Longleftrightarrow (Y \subset X)$. La fonction de Möbius obtenue est appelée fonction de Möbius de l'arrangement. Cette fonction dépend de l'arrangement. Dans certains cas particulier on sait calculer cette fonction.

Remarquons que V qui peut être considéré comme l'intersection de zéro éléments de $\mathcal{A}$ est dans $\mathbb{L}$, et avec la relation d'ordre considérée, V est le plus petit élément de $\mathbb{L}$. On définit alors

$$\mu(X) = \mu(V, X).$$

Dans le cas où $V = \mathbb{F}_q^n$ on obtient la formule

$$\sharp\Big(\bigcup_{H\in\mathcal{A}} H\Big) = q^n - \sum_{X\in\mathbb{L}} \mu(X) q^{dim(X)}.$$

Pour démontrer cette formule il suffit de montrer que

$$\sharp\Big(\bigcap_{H\in\mathcal{A}}\overline{H}\Big)=\sum_{X\in\mathbb{L}}\mu(X)q^{dim(X)}.$$

Ceci se fait comme pour la formule d'inclusion exclusion. Soit $X\in\mathbb{L}$, et $\mathcal{B}(X)$ le sous ensemble de $\mathcal{A}$ constitué des hyperplans qui contiennent X. Définissons :

$$X'=X\bigcap_{H\notin\mathcal{B}(X)}\overline{H},$$

puis :

$$f(X)=\sharp X'$$

et

$$g(X)=\sharp X.$$

Alors on vérifie que :

$$g(X)=\sum_{X\leq Y}f(Y)$$

et donc

$$f(X)=\sum_{X\leq Y}\mu(X,Y)g(Y).$$

Si on prend $X=V$ on trouve la formule annoncée.

Preuve du fait que :

$$X=\bigcup_{X\leq Y}Y'$$

où la réunion est disjointe.
Si $Y_1\subseteq X$ et $Y_2\subseteq X$ sont deux éléments de $\mathbb{L}$ tels que $Y_1\neq Y_2$, alors on peut se ramener au cas où il existe un hyperplan H de $\mathcal{B}(Y_1)$ qui n'est pas dans $\mathcal{B}(Y_2)$. De ce fait, $Y_2'\subseteq\overline{H}$ tandis que $Y_1'\subseteq Y_1\subseteq H$. On en conclut que Y_1' et Y_2' sont disjoints.
Soit $x\in X$. Notons $\mathcal{B}(x)$ l'ensemble des hyperplans de $\mathcal{A}$ qui contiennent le point x. Posons :

$$Y=\bigcap_{H\in\mathcal{B}(x)}H.$$

Alors $Y\in\mathbb{L}$ et $Y\subseteq X$. Il est clair que si $H\notin\mathcal{B}(Y)$ alors$H\notin\mathcal{B}(x)$, donc $x\notin H$ et par suite $x\in\overline{H}$. On en conclut que $x\in Y'$. Ceci achève la preuve.

4.7 Nombre de polynômes irréductibles sur un corps fini

Nous allons compter le nombre N_k de polynômes irréductibles et normalisés (dont le coefficient du terme de plus haut degré est 1) de degré k sur le corps fini $\mathbb{F}_q$ à q éléments. Le calcul utilise la fonction de Möbius μ sur les entiers (fonction liée à la relation de divisibilité sur $\mathbb{N}$).
Considérons le corps fini $\mathbb{F}_{q^k}$, extension de degré k de $\mathbb{F}_q$. On sait qu'on a la factorisation suivante sur $\mathbb{F}_q$:

$$X^{q^k} - X = \prod Q(X)$$

où les polynômes $Q(X)$ sont tous les polynômes irréductibles normalisés de degré $\leq k$ sur $\mathbb{F}_q$. Ces polynômes ont des degrés l qui divisent k, ils se décomposent entièrement sur $\mathbb{F}_{q^k}$ où ils ont chacun l racines distinctes, et distinctes des racines des autres. Globalement ces racines sont exactement les q^k éléments de $\mathbb{F}_{q^k}$. En conséquence :

$$\sum_{l|k} lN_l = q^k.$$

Si on pose :

$$g(k) = q^k$$

et

$$f(k) = kN_k,$$

on voit que :

$$g(k) = \sum_{l|k} f(k).$$

Donc par inversion de Möbius on obtient :

$$f(k) = \sum_{l|k} \mu(k/l)g(l),$$

soit aussi en posant $u = k/l$:

$$f(k) = \sum_{u|k} \mu(u)g(k/u).$$

Donc on obtient :

$$N_k = \frac{1}{k}\sum_{u|k} \mu(u) q^{k/u}.$$

5 Aspect fonctionnel

Soit $\mathbb{L}$ un ensemble **fini ordonné** par une relation notée $\leq$. Notons $\mathbb{A}(\mathbb{L})$ l'espace des fonctions f de $\mathbb{L} \times \mathbb{L}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(x,y) = 0$ si $x \not\leq y$. Définissons en outre la multiplication dans $\mathbb{A}(\mathbb{L})$ par

$$f \star g(x,y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x,z) g(z,y).$$

On obtient ainsi une algèbre dont l'unité est

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Theorem 5.1 *Un élément f de l'algèbre $\mathbb{A}(\mathbb{L})$ a un inverse si et seulement si $f(x,x) \neq 0$.*

La condition est nécessaire car dans ce cas

$$\sum_{x \leq z \leq y} f(x,z) g(z,y) = \delta(x,y),$$

ce qui donne pour $x = y$, $f(x,x)g(x,x) = 1$. Réciproquement, l'égalité précédente définit $g(x,y)$ lorsque $\sharp[x,y] = 1$. Par récurrence en supposant $g(x,y)$ défini lorsque $\sharp[x,y] = k$, montrons qu'on peut définir $g(x,y)$ lorsque $\sharp[x,y] = k+1$. Pour cela puisque $x \neq y$ il suffit de voir qu'en prenant

$$f(x,x)g(x,y) = -\sum_{x < z \leq y} f(x,z) g(z,y)$$

on obtient ce qu'il faut (on obtient un inverse à gauche, mais comme pour tout h on a $\delta \star h = h \star \delta = h$, c'est aussi un inverse à droite).

Definition 5.1 *La fonction ζ définie par*

$$\zeta(x,y) = \begin{cases} 1 & \textit{si } x \leq y, \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

est la **fonction zeta**.

Theorem 5.2 *La fonction zeta a un inverse qui est la fonction de Möbius.*

Pour le montrer il suffit d'effectuer la convolution $\mu \star \zeta$ ou la convolution $\zeta \star \mu$. Dans les deux cas on trouve facilement δ.

Ce dernier résultat permet en fait de rétablir la formule d'inversion de Rota. Pour ce faire il faut tout d'abord remarquer que puisqu'on suppose $\mathbb{L}$ fini, on peut toujours lui rajouter un élément noté 0 plus petit que tous les autres. Dans ces conditions si on définit

$$G = F \star \zeta$$

on a alors

$$F = G \star \mu.$$

En posant $g(x) = G(0, x)$ et $f(x) = F(0, x)$ et en plus en posant $F(0, 0) = 0$ (ce qui implique $G(0, 0) = 0$) on obtient d'une part

$$g(x) = G(0, x) = F \star \zeta(0, x) = \sum_{0 \leq z \leq x} F(0, z)\zeta(z, x),$$

$$g(x) = \sum_{z \leq x} f(z),$$

d'autre part

$$f(x) = F(0, x) = G \star \mu(0, x) = \sum_{z \leq x} \mu(z, x) f(z).$$

6 Produit d'ensembles ordonnés

Soient $\mathbb{L}_1, \cdots, \mathbb{L}_n$ des ensembles ordonnés finis. On considère l'ensemble $\mathbb{L} = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{L}_i$ ordonné par l'ordre produit ($x \leq y$ si et seulement si $x_i \leq y_i$ pour tout i).

Theorem 6.1 *La fonction de Möbius du produit $\mathbb{L}$ est le produit des fonctions de Möbius des $\mathbb{L}_i$.*

Ceci se voit facilement en utilisant la fonction zeta qui vérifie clairement

$$\zeta(x, y) = \prod_{i=1}^{m} \zeta_i(x_i, y_i)$$

en conséquence de quoi la fonction

$$\prod_{i=1}^{m} \mu_i(x_i, y_i)$$

est l'inverse pour la convolution de la fonction zeta. Cest donc la fonction de Möbius.

Exemple: Définissons pour tout nombre premier p l'ensemble

$$E_p = \{1, p, p^2, \cdots, p^k, \cdots\}$$

que nous munissons de l'ordre naturel. Ainsi la fonction de Möbius de E_p est

$$\mu_p(p^i, p^j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ -1 & \text{si } j = i + 1, \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Le produit des ensembles ordonnés E_p (limité aux suites formées de 1 à partir d'un certain rang) n'est rien d'autre que $\mathbb{N}$ ordonné par la divisibilité. On obtient ainsi la fonction de Möbius classique comme produit des fonctions de Möbius des E_p.