PRODUIT TENSORIEL D'ESPACES VECTORIELS

par

Robert Rolland

Résumé. — On définit le produit tensoriel de deux espaces vectoriels et on en expose quelques propriétés. Ce produit tensoriel est relié au produit de Kronecker de deux matrices. On généralise au produit de plusieurs espaces vectoriels, on introduit la notion d'algèbre tensorielle.

Table des matières

1. Introduction

Ces quelques notes sont un début de présentation de la notion de produit tensoriel de deux espaces vectoriels. On y ajoute une présentation très rapide de la notion de tenseur d'ordre quelconque, ainsi que des notions de contravariance et covariance. Le lecteur intéressé par le calcul tensoriel et des exemples d'applications en physique pourra se reporter au superbe exposé d'André Lichnerowicz (1915-1998) « Éléments de calcul tensoriel », soit dans une version originale de la librairie Armand Colin, soit dans une réimpression par les éditions Jacques Gabay.

Soient E, F, W trois espaces vectoriels sur un même corps K. Soit B une application bilinéaire de $E \times F$ dans W. On aimerait ramener, en un certain sens, cette application bilinéaire à une application linéaire d'un certain espace T, à construire, dans W. C'est là le but de la construction du produit tensoriel T de E par F. C'est à la lumière de cette remarque qu'on peut mieux comprendre les constructions du paragraphe suivant qui sont inspirées par le résultat à atteindre. Bien entendu la simplification de l'application bilinéaire en une application linéaire se paie par une complication de l'espace de départ T qui doit capter toute la complexité de la bilinéarité de l'application B.

2. Définition du produit tensoriel

Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps K. On note $[E \times F]$ l'espace vectoriel sur K des combinaisons linéaires formelles d'éléments du produit $E \times F$. Plus précisément :

$$[E \times F] = \left\{ \sum_{(x,y) \in A} \lambda_{(x,y)}(x,y) \mid A \text{ partie finie de } E \times F, \lambda_{(x,y)} \in K \right\}.$$

On note G le sous-espace vectoriel de $[E \times F]$ engendré par les éléments de la forme :

$$\left(\sum_{x \in A_1} \lambda_x x, \sum_{y \in A_2} \mu_y y \right) - \sum_{(x,y) \in A_1 \times A_2} \lambda_x \mu_y (x,y).$$

Nous allons identifier ces éléments à zéro, c'est-à-dire qu'on définit :

$$E \otimes_K F = [E \times F]/G.$$

Définition 2.1. — L'espace vectoriel $E \otimes_K F$ est appelé le produit tensoriel de E par F sur le corps K. Quand aucune confusion n'en résulte on note simplement $E \otimes F$ le produit tensoriel sur K de E par F.

Notons alors ϕ l'application qui à (x, y) fait correspondre sa classe, qu'on note encore $x \otimes y$. Ainsi ϕ est la restriction à $E \times F$ de la surjection canonique de $[E \times F]$ sur son quotient $E \otimes F$. Compte tenu de la construction du produit tensoriel nous avons les premières propriétés suivantes :

Proposition 2.2. — *Soit* A_1 *(resp.* A_2*) une partie finie de* E *(resp. de* F*).*

(1) *Les éléments* $x \otimes y$ *forment un système de générateurs de* $E \otimes F$.

(2) $(\sum_{x \in A_1} \lambda_x x) \otimes (\sum_{y \in A_2} \mu_y y) = \sum_{(x,y) \in A_1 \times A_2} \lambda_x \mu_y (x \otimes y)$.

La relation (2) peut encore s'exprimer en disant que l'application ϕ *est bilinéaire.*

En particulier d'après la relation (2) on peut écrire :

$$(\lambda x) \otimes (\mu y) = \lambda\mu(x \otimes y), \tag{1}$$

ce qui, sachant que les éléments $x \otimes y$ engendrent $E \otimes F$, nous permet d'écrire tout élément de $E \otimes F$ sous la forme :

$$t = \sum_{(x,y) \in A} x \otimes y, \tag{2}$$

où A est une partie finie de $E \times F$. Cette écriture n'est pas unique comme le montre l'exemple élémentaire suivant :

$$(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y.$$

Nous reviendrons plus tard sur les problèmes posés par cet état de fait.

Remarque 2.3. — Remarquons aussi que la construction nous montre tout de suite que $E \otimes F$ est isomorphe à $F \otimes E$.

Quand on écrit de manière naturelle les éléments t du produit tensoriel sous la forme (2), comme le système générateur $(x \otimes y)_{(x,y)\in E\times F}$ n'est pas une base, il n'est pas immédiat de savoir si ce qu'on est en train d'écrire est nul ou non. Cela va constituer une partie de l'étude du paragraphe suivant. En attendant, il y a des cas très simples où l'on peut repérer que ce qu'on écrit est nul. Il découle directement de la relation (1) que :

$$0 \otimes y = x \otimes 0 = 0.$$

(Ici il faut un peu jongler avec la signification des zéros. En effet il y a le zéro du corps des scalaires, le zéro de l'espace vectoriel E, celui de l'espace vectoriel F, celui de l'espace $E \otimes F$, et on pourrait aussi parler de celui de $E \times F$ et de celui de $[E \times F]$ qui jouent également un rôle dans l'affaire. On compte sur le lecteur pour mettre tout le monde à sa place).

3. Applications bilinéaires et produits tensoriels

Nous en arrivons alors au cœur du sujet, c'est-à-dire la correspondance entre application bilinéaire sur $E \times F$ et application linéaire sur $E \otimes F$. Nous allons noter $\mathcal{B}(E \times F, W)$ l'ensemble des applications bilinéaires de $E \times F$ dans W et $\mathcal{L}(E \otimes F, W)$ l'ensemble des applications linéaires de $E \otimes F$ dans W

Théorème 3.1. — *L'application ψ_W définie sur $\mathcal{L}(E \otimes F, W)$ par $\psi_W(b) = b \circ \phi$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E \otimes F, W)$ sur $\mathcal{B}(E \times F, W)$.*

Démonstration. — Soit $b \in \mathcal{L}(E \otimes F, W)$ et $B = \psi_W(b) = b \circ \phi$. On vérifie immédiatement que B est une application bilinéaire et que l'application ψ_W est linéaire. Cette application est injective, en effet, si $\psi_W(b) = 0$, c'est que $b \circ \phi(x, y) = 0$ pour tout (x, y), c'est-à-dire que

$b(x \otimes y) = 0$ pour tout $x \otimes y$. Comme ces derniers éléments engendrent l'espace $E \otimes F$, c'est que $b = 0$.

L'application ψ_W est aussi surjective. En effet, soit $B \in \mathcal{B}(E \times F, W)$. Pour tout élément $t \in E \otimes F$ définisons $b(t)$ de la façon suivante : on prend une représentation de t sous la forme $t = \sum_{(x,y) \in A} \lambda_{x,y} x \otimes y$ et on pose

$$b(t) = \sum_{(x,y) \in A} \lambda_{x,y} B(x, y).$$

Cette façon de définir $b(t)$ est bien indépendante de la représentation choisie pour t en vertu de la définition de G. On a bien trouvé b tel que $\psi_W(b) = B$. □

Ainsi le produit tensoriel de E et de F est un espace vectoriel T qui vérifie :

Propriété 3.2. — Il existe une application bilinéaire ϕ de $E \times F$ dans T de telle sorte que :

(1) $\phi(E \times F)$ engendre T ;

(2) pour tout espace vectoriel W, l'application ψ_W de $\mathcal{L}(T, W)$ sur $\mathcal{B}(E \times F, W)$ définie par $\psi_W(b) = b \circ \phi$ est un isomorphisme.

Cette propriété donne lieu au résultat universel suivant :

Théorème 3.3. — *Soit V un espace qui vérifie la propriété 3.2, c'est-à-dire qu'il existe une application bilinéaire θ de $E \times F$ dans V de telle sorte que :*

(1) $\theta(E \times F)$ *engendre* V *;*

(2) *pour tout espace vectoriel W, l'application ξ_W de $\mathcal{L}(V, W)$ sur $\mathcal{B}(E \times F, W)$ définie par $\xi_W(u) = u \circ \theta$ est un isomorphisme.*

Alors V est isomorphe à $E \otimes F$.

Démonstration. — Soit θ l'application bilinéaire de $E \times F$ dans V donnée par la propriété (3.2). Si on prend $W = E \otimes F$ et si on considère l'application bilinéaire $\phi \in \mathcal{B}(E \times F, E \otimes F)$, alors par hypothèse il existe une application linéaire u unique de V dans $W = E \otimes F$ telle que $u \circ \theta = \phi$. Par ailleurs, d'après ce qu'on a démontré sur les produits tensoriels, on sait qu'il existe une unique application linéaire ν de $E \otimes F$ dans V telle que $\nu \circ \phi = \theta$. En conséquence $\nu \circ u \circ \theta = \theta$. Mais par hypothèse, $\theta(E \times F)$ est une partie génératrice de V. Donc l'application $\nu \circ u$ est l'identité sur V. Pour la même raison $u \circ \nu$ est l'identité sur $E \otimes F$. Donc u est un isomorphisme d'inverse ν. □

Le théorème suivant donne une autre interprétation de l'espace des applications linéaires définies sur $E \otimes F$ à valeurs dans W.

Théorème 3.4. — L'espace $\mathcal{L}(E \otimes F, W)$ *est isomorphe à l'espace* $\mathcal{L}\Big(E, \mathcal{L}(F, W)\Big)$.

Démonstration. — Il suffit de montrer que $\mathcal{B}(E \times F, W)$ est isomorphe à $\mathcal{L}\Big(E, \mathcal{L}(F, W)\Big)$. Pour cela on définie l'application τ qui à toute application bilinéaire B de $E \times F$ dans W associe l'application linéaire $u = \tau(B)$ de E dans $\mathcal{L}(F, W)$ définie par :

$$u(x)(y) = B(x, y).$$

La linéarité de B par rapport à y implique bien la linéarité de l'application $u(x)$ ce qui prouve que $u(x)$ est dans $\mathcal{L}(F, W)$. La linéarité de B par rapport à x implique la linéarité de u. L'application τ a bien un noyau réduit à $\{0\}$ c'est-à-dire qu'elle est injective. De plus si $f \in \mathcal{L}\Big(E, \mathcal{L}(F, W)\Big)$ on peut construire $\tilde{f}(x, y) = f(x)(y)$ qui est bien une application bilinéaire de $E \times F$ dans W vérifiant $\tau(\tilde{f}) = f$, c'est-à-dire que τ est surjective. □

Corollaire 3.5. — Dans le cas où W est le corps de base K, on obtient la formule suivante sur les duaux :

$$(E \otimes F)^* \simeq \mathcal{L}(E, F^*).$$

Conclusion. — On se retrouve avec 3 espaces isomorphes :

$$\mathcal{L}(E \otimes F, W) \simeq \mathcal{B}(E \times F, W) \simeq \mathcal{L}\left(E, \mathcal{L}(F, W)\right).$$

4. Propriétés d'algèbre linéaire du produit tensoriel

Nous allons maintenant relier le produit tensoriel que nous venons de construire à des notions connues d'algèbre linéaire et à des notions sur les applications bilinéaires.

La première chose à voir c'est la « taille de ce qu'on vient de construire ». En effet comme la construction a consisté en un passage au quotient par un sous-espace vectoriel dont on mesure mal l'envergure, il convient d'établir quelques résultats sur ces questions. En particulier, il faudrait se faire une idée de qui est nul et de qui ne l'est pas. Le lemme suivant est de ce point de vue un résultat clé :

Lemme 4.1. — *Soient* $y_1, y_2, \cdots, y_k$ *des éléments de* F *linéairement indépendants. Si*

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \otimes y_i = 0,$$

alors $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$.

Démonstration. — Soit $u \in E^\star$ une forme linéaire sur E. Considérons l'application linéaire f définie sur $[E \times F]$ par :

$$f(x, y) = u(x)y,$$

Comme $f(G) = \{0\}$ cette application nous permet de définir une application linéaire $\tilde{f}$ de $E \otimes F$ dans F telle que :

$$\tilde{f}(x \otimes y) = f(x, y) = u(x)y.$$

On a alors :

$$\tilde{f}\left(\sum_{i=1}^{k} x_i \otimes y_i\right) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{i=1}^{k} u(x_i)y_i = 0,$$

et comme les y_i sont linéairement indépendants les $u(x_i)$ sont nuls. Ceci a lieu pour toute forme linéaire u, ce qui permet de conclure que les x_i sont nuls. □

On en déduit tout de suite le théorème suivant :

Théorème 4.2. — *Soient A_1 une famille libre de E et A_2 une famille libre de F. Alors la famille*

$$(x \otimes y)_{(x,y)\in A_1\times A_2}$$

est une famille libre de $E \otimes F$.

Démonstration. — On suppose que $\sum_{(x,y)\in A_1\times A_2} \lambda_{(x,y)}(x\otimes y)$ est une combinaison linéaire (donc en particulier il n'y a qu'un nombre fini de coefficients éventuellement non nuls) et que cette combinaison est nulle . On peut alors écrire :

$$\sum_{(x,y)\in A_1\times A_2} \lambda_{(x,y)}(x\otimes y) = \sum_{y\in A_2}\left(\sum_{x\in A_1}\lambda_{(x,y)}x\right)\otimes y = 0.$$

Comme la famille $(y)_{y\in A_2}$ est libre on conclut que pour tout $y \in A_2$:

$$\sum_{x\in A_1}\lambda_{(x,y)}x = 0,$$

ce qui compte tenu du fait que la famille $(x)_{x\in A_1}$ est libre implique que pour tout $x \in A_1$ le coefficient $\lambda_{(x,y)}$ est nul. Ainsi on a montré que pour tout x et tout y on a $\lambda_{(x,y)} = 0$. □

Pour les familles génératrices il est visible que :

Théorème 4.3. — *Si A_1 est une famille génératrice de E et A_2 une famille génératrice de F, alors la famille $(x\otimes y)_{(x,y)\in A_1\times A_2}$ est une famille génératrice de $E \otimes F$.*

Démonstration. — On constate en effet que tout élément $x \otimes y$ (où $x \in E$ et $y \in F$) s'écrit :

$$x \otimes y = \left(\sum_{u \in A_1} \lambda_u u \right) \otimes \left(\sum_{u \in A_1} \mu_v v \right) = \sum_{(u,v) \in A_1 \times A_2} (\lambda_u \mu_v)(u \otimes v).$$

□

Comme conséquence des deux théorèmes précédents on a le résultat suivant :

Théorème 4.4. — *Si* A_1 *est une base de* E *et* A_2 *une base de* F *alors la famille* $(x \otimes y)_{(x,y) \in A_1 \times A_2}$ *est une base de* $E \otimes F$.

Corollaire 4.5. — *Tout élément* $t \neq 0$ *de* $E \otimes F$ *s'écrit sous la forme d'une somme finie non vide :*

$$\sum_i x_i \otimes y_i.$$

où les x_i *sont linéairement indépendants et les* y_i *sont non nuls.*

Démonstration. — Soit $(x_i)_i$ une base de E et $(f_j)_j$ une base de F. La famille $(x_i \otimes f_j)_{i,j}$ est donc, nous l'avons vu, une base de $E \otimes F$. Soit t un élément non nul de $E \otimes F$. Il sécrit :

$$t = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} x_i \otimes f_j = \sum_i x_i \otimes \left(\sum_j \lambda_{i,j} f_j \right).$$

En posant $y_i = \sum_j \lambda_{i,j} f_j$ et en ne gardant dans la somme que les $x_i \otimes y_i$ où y_i est non nul on obtient le résultat voulu. □

Dans le cas particulier où les espaces E et F sont de dimensions finies respectives m et n, le produit tensoriel $E \otimes F$ est de dimension $m \times n$. En revanche, même dans le cas où E et F sont des espaces de dimension finie, si le corps K n'est pas fini, alors G n'est pas de dimension finie. En effet, si le corps K est infini, les ensembles E et F sont infinis, si bien que l'espace $[E \times F]$ est de dimension infinie. Mais comme $E \otimes F = [E \times F]/G$ est de dimension finie, cest que G est de dimension infinie.

Pour avoir une meilleure intuition combinatoire, regardons le cas où le corps K est un corps fini ayant q éléments et où E et F sont de dimensions respectives m et n. Alors E a q^m éléments tandis que F a q^n éléments. En conséquence $[E \times F]$ est de dimention q^{m+n}. Le produit tensoriel est de dimension $m \times n$. Donc G est de dimension $q^{m+n} - m \times n$.

5. Extension au cas de plus de 2 espaces vectoriels

On peut aussi définir le produit tensoriel de plus de deux espaces. Il suffit pour cela de voir que :

Théorème 5.1. — Si E, F, H *sont trois espaces vectoriels sur le même corps* K*, alors :*

$$(E \otimes F) \otimes H \simeq E \otimes (F \otimes H).$$

Démonstration. — Nous allons définir un isomorphisme U de $(E \otimes F) \otimes H$ dans $E \otimes (F \otimes H)$ en définissant les valeurs de U sur une base. Pour cela on prend une base $(e_i)_i$ de E, une base $(f_j)_j$ de F et une base $(h_k)_k$ de H. On sait qu'alors $(e_i \otimes f_j)_{i,j}$ est une base de $E \otimes F$, et donc $\Big((e_i \otimes f_j) \otimes h_k\Big)_{i,j,k}$ est une base de $(E \otimes F) \otimes H$. De même $\Big(e_i \otimes (f_j \otimes h_k)\Big)_{i,j,k}$ est une base de $E \otimes (F \otimes H)$. On définit U en posant :

$$U\Big((e_i \otimes f_j) \otimes h_k\Big) = e_i \otimes (f_j \otimes h_k).$$

L'application linéaire U est un isomorphisme. □

Désormais, on pourra écrire $E \otimes F \otimes H$ sans parenthèses l'espace obtenu. Maintenant que « l'associativité » du produit tensoriel est démontrée, on peut écrire des produits du type :

$$E_1 \otimes E_2 \otimes \cdots \otimes E_n.$$

Soient $E_1, \cdots, E_n$, n espaces vectoriels sur le même corps K. Notons $\mathcal{B}_n(E_1 \times \cdots \times E_n, W)$ l'espace des applications n-linéaires de $E_1 \times \cdots \times E_n$ dans un espace vectoriel W.

Théorème 5.2. — *Nous avons l'isomorphisme suivant :*

$$\mathcal{L}(E_1 \otimes \cdots \otimes E_n, W) \simeq \mathcal{B}_n(E_1 \times \cdots \times E_n, W).$$

Démonstration. — On peut faire une récurrence. On sait que le résultat est vrai pour 2 espaces. En utilisant les isomorphismes :

$$\mathcal{L}(E \otimes F, W) \simeq \mathcal{B}(E \times F, W) \simeq \mathcal{L}\Big(E, \mathcal{L}(F, W)\Big)$$

et l'hypothèse de récurrence :

$$\mathcal{L}(E_2 \otimes \cdots \otimes E_{n-1}, W) \simeq \mathcal{B}_{n-1}(E_2 \times \cdots \times E_n, W).$$

on obtient :

$$\mathcal{L}(E_1 \otimes \cdots \otimes E_n, W) \simeq \mathcal{L}\Big(E_1, \mathcal{L}(E_2 \otimes \cdots \otimes E_n, W)\Big) \simeq$$
$$\mathcal{L}\Big(E_1, \mathcal{B}_{n-1}(E_2 \times \cdots \times E_n, W)\Big) \simeq \mathcal{B}_n(E_1 \times \cdots \times E_n, W).$$

□

Nous verrons au paragraphe 8.3 que dans certaines circonstance un tenseur peut être interprété comme une forme multilinéaire.

6. Dualité

Théorème 6.1. — *L'espace* $E^\star \otimes F^\star$ *peut être interprété comme un sous espace de* $(E \otimes F)^\star$ *par identification de l'élément* $u \otimes v$ *de* $E^\star \otimes F^\star$ *à la forme linéaire notée encore* $u \otimes v$ *définie par*

$$u \otimes v(x \otimes y) = u(x)v(y).$$

De plus on a l'égalité de $E^\star \otimes F^\star$ *avec* $(E \otimes F)^\star$ *si et seulement si l'un des deux espaces* E *ou* F *est de dimension finie.*

Démonstration. — Pour bien comprendre cette démonstration, il convient d'introduire un certain nombre d'applications bilinéaires et linéaires. Soit

(1) Soit B_1 l'application bilinéaire définie sur $E^\star \times F^\star$ à valeurs dans $\mathcal{B}(E \times F)$ par $B_1(u, v)(x, y) = u(x)v(y)$.

(2) Notons L la forme bilinéaire $B_1(u,v)$.

(3) En vertu du théorème 3.1, la forme bilinéaire L peut être considérée une forme linéaire l définie sur $E \otimes F$ par $l(x \otimes y) = u(x)v(y)$.

(4) Mais alors B_1 apparaît comme une application bilinéaire de $E^\star \times F^\star$ dans l'espace $(E \otimes F)^\star$. On peut donc de nouveau appliquer le théorème 3.1 qui permet de considérer B_1 comme une application linéaire b_1 de $E^\star \otimes F^\star$ dans $(E \otimes F)^\star$. On a alors :

$$b_1\left(\sum_{(u,v)\in A}(u \otimes v)\right)(x \otimes y) = \sum_{(u,v)\in A} u(x)v(y).$$

L'application b_1 est injective. En effet, considérons un élément non nul de $E^\star \otimes F^\star$. En vertu du corollaire 4.5 cet élément peut s'écrire $\sum_{i\in I} u_i \otimes v_i$ avec des v_i linéairement indépendants et des u_i non nuls. La forme linéaire correspondante $b_1\left(\sum_{i\in I} u_i \otimes v_i\right)$ définie sur $E \otimes F$ correspond à l'application linéaire de E dans $F^\star$ définie par $\sum_{i\in I} u_i(x)v_i$ (cf. corollaire 3.5). Cette application n'est pas identiquement nulle car les v_i sont linéairement indépendants et les u_i non nuls. En conséquence le noyau de b_1 est réduit à $\{0\}$.

Par la suite on identifie $b_1(u \otimes v)$ at $u \otimes v$ et on considère donc que $E^\star \otimes F^\star \subset (E \otimes F)^\star$.

Bien entendu si les deux espaces E et F sont de dimensions finies respectives n et m, alors comme $E^\star \otimes F^\star$ et $(E \otimes F)^\star$ on même dimension $m \times n$ l'inclusion $E^\star \otimes F^\star \subset (E \otimes F)^\star$ se transforme en égalité. En fait on a égalité si et seulement si l'un des deux espaces est de dimension finie.

Supposons que les deux espaces soient de dimension infinie. Nous avons vu que tout élément t de $E^\star \otimes F^\star$ peut être identifié à un élément de $(E \otimes F)^\star$. Ainsi tout élément $t = \sum_{i=0}^{n} u_i \otimes v_i$ de $E^\star \otimes F^\star$ est un élément de $\mathcal{L}(E \otimes F, K)$ et peut donc être considéré aussi comme l'élément θ_t

suivant de $\mathcal{L}(E, F^\star) = \mathcal{L}\Big(E, \mathcal{L}(F, K)\Big)$:

$$\theta_t : \quad x \mapsto \theta_t(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x) v_i.$$

L'image $\theta_t(E)$ est de dimension finie dans $F^\star$. Mais dans $\mathcal{L}(E, F^\star) = \mathcal{L}\Big(E, \mathcal{L}(F, K)\Big)$ il existe des applications dont l'image est de dimension infinie dans $F^\star$. Donc $E^\star \otimes F^\star$ ne peut coïncider avec $(E \otimes F)^\star \simeq \mathcal{L}(E, F^\star)$.

Supposons maintenant que E soit de dimension finie. Tout élément $f \in (E \otimes F)^\star$ est déterminé par ses valeurs sur les $x_i \otimes y_\alpha$ où la famille $(x_i)_{i=1\cdots n}$ est une base de E est $(y_\alpha)_\alpha$ une base (éventuellement infinie) de F :

$$f(x_i \otimes y_\alpha) = z_{i,\alpha}.$$

Soit $(u_i)_{i=1\cdots n}$ la base duale de $(x_i)_{i=1\cdots n}$ et pour chaque $i \in \{1, \cdots, n\}$ soit $v^{(i)} \in F^\star$ telle que $v^{(i)}(y_\alpha) = z_{i,\alpha}$. Dans ces conditions :

$$\left(\sum_{j=1}^{n} u_j \otimes v^{(j)} \right) (x_i \otimes y_\alpha) = z_{i,\alpha},$$

ce qui prouve que

$$f = \sum_{j=1}^{n} u_j \otimes v^{(j)} \in E^\star \otimes F^\star.$$

□

7. Plaçons nous en dimension finie

Nous supposons maintenant que E et F sont de dimension finie. Nous remarquerons toutefois que certains résultats ou certaines interprétations de cette section sont encore valables si un seul de ces deux espaces est de dimension finie.

7.1. Quelques identifications. — On peut écrire un certain nombre d'identifications qui proviennent de la coïncidence du bidual et de l'espace de départ ainsi que de l'application du théorème 6.1.

Théorème 7.1. — *L'espace des applications linéaires de* E *dans* F *peut s'identifier au produit tensoriel du dual de* E *par* F *:*

$$\mathcal{L}(E, F) \simeq E^\star \otimes F. \tag{3}$$

Démonstration. — En effet, $F \simeq F^{\star\star}$, donc $\mathcal{L}(E, F) \simeq \mathcal{L}(E, F^{\star\star})$. Mais

$$\mathcal{L}(E, F^{\star\star}) \simeq \mathcal{B}(E \times F^\star, K) \simeq \mathcal{L}(E \otimes F^\star, K) = (E \otimes F^\star)^\star \simeq E^\star \otimes F.$$

□

Remarque 7.2. — Remarquons que dans la démonstration de ce théorème nous n'avons utilisé que la dimension finie de F (pour identifier $F^{\star\star}$ à F puis pour identifier $(E \otimes F^\star)^\star$ à $E^\star \otimes F^{\star\star}$ c'est-à-dire en définitive à $E^\star \otimes F$).

Théorème 7.3. — *Soient* E, F, G, H *quatre espaces vectoriels de dimensions finies respectives* m, n, p, q*. On peut définir une application linéaire unique* χ *de* $\mathcal{L}(E, F) \otimes \mathcal{L}(F, G)$ *dans* $\mathcal{L}(E \otimes G, F \otimes H)$ *en imposant que :*

$$\chi(u \otimes v)(x \otimes y) = u(x) \otimes v(y).$$

Cette application est un isomorphisme. Par la suite on notera encore $u \otimes v$ *l'élement* $\chi(u \otimes v)$*.*

Démonstration. — La démonstration se fait de la même manière que la démonstration du théorème 6.1. □

Remarque 7.4. — On a supposé les quatre espaces de dimension finie. En calquant la démonstration sur celle du théorème 6.1 on pourrait montrer que l'une des hypothèses suivantes suffirait pour avoir l'isomorphisme (et non pas la simple inclusion).

(1) E et F sont de dimension finie ;

(2) G et H sont de dimension finie ;
(3) E et G sont de dimension finie ;

Remarque 7.5. — Remarquons aussi que l'utilisation des résultats précédents permettant de remplacer $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{L}(G,H)$ respectivement par $E^\star \otimes F$ et $G^\star \otimes H$ donne :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(E,F)\otimes\mathcal{L}(G,H) \simeq E^\star\otimes F\otimes G^\star\otimes H \simeq E^\star\otimes G^\star\otimes F\otimes H \simeq\\ (E\otimes G)^\star\otimes(F\otimes H)\simeq\mathcal{L}(E\otimes G, F\otimes H).\end{aligned}\tag{4}$$

7.2. Rang d'un tenseur. — Nous avons vu que :

$$(E\otimes F)^\star \simeq \mathcal{L}(E,F^\star).$$

Donc on peut en général en considérant qu'un espace est inclus dans son bidual et qu'en dimension finie in y a coıncidence des deux espaces écrire :

$$E\otimes F\simeq\mathcal{L}(E^\star,F).$$

Cette identification fonctionne de la manière suivante : à $t=\sum_{i=1}^n x_i\otimes y_i$ correspond l'application linéaire de $E^\star$ dans F :

$$l(t):\quad f\mapsto\sum_{i=1}^n f(x_i)y_i.\tag{5}$$

Définition 7.6. — On appelle rang du tenseur t le rang de l'application $l(t)$, c'est à dire la dimension de $l(t)\,(E^\star)$

Théorème 7.7. — *Le rang r d'un tenseur $t\in E\otimes F$ est le nombre minimum s de tenseurs élémentaires $x\otimes y$ nécessaires pour représenter le tenseur t :*

$$r=\min\left\{\#A \mid A\subset E\times F,\ \ t=\sum_{(x,y)\in A} x\otimes y\right\}.$$

Démonstration. — Soit $(z_j)_{j=1\cdots r}$ une base de $l(t)(E^\star)$. Cette base peut être complétée en une base $(z_j)_{j=1\cdots n}$ de F. On peut toujour représenter tout tenseur τ sous la forme

$$\tau = \sum_{j=0}^{n} a_j \otimes z_j$$

avec des a_j éventuellement nuls. Mais compte tenu des conditions imposées sur l'image $l(t)(E^\star)$, il est visible que t s'écrit :

$$t = \sum_{j=0}^{r} a_j \otimes z_j,$$

avec des a_j non nuls et $l(t)(f) = \sum_{j=1}^{n} f(a_j)z_j$. Il est visible que cette somme ne peut avoir un terme de moins sinon l'espace vectoriel $l(t)(E^\star)$ ne serait pas de dimension r. $\square$

Dans le cas où on travaile dans un produit tensoriel de plus de deux espaces :

$$T = E_1 \otimes E_2 \otimes \cdots \otimes E_n,$$

on définit le rang d'un tenseur $t \in T$ de la façon suivante :

Définition 7.8. — Le rang d'un tenseur $t \in T$ est le nombre minimum de termes non nuls dans une somme représentant le tenseur t sous la forme :

$$t = \sum_{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in A} x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_n,$$

où A est un sous-ensemble fini de $\prod_{i=1}^{n} E_i$.

7.3. Expressions analytiques. — Nous allons dans cette section faire le lien entre produit tensoriel et produit de Kronecker de deux matrices. Pour cela nous fixons des espaces vectoriels E, F, G et H. de dimensions respectives m, n, p, q. On fixe une base de E (respectivement de F, G, H) qu'on note $(e_i)_{i=1\cdots m}$ (respectivement $(f_j)_{j=1\cdots n}$, $(g_k)_{k=1\cdots p}$,

$(h_s)_{s=1\cdots q})$. On considère une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ de matrice $U = (U_{j,i})$ et une application linéaire $v \in \mathcal{L}(G, H)$ de matrice $V = (V_{s,k})$. On voudrait déterminer en fonction de U et V la matrice de l'application $u \otimes v \in \mathcal{L}(E \otimes G, F \otimes H)$ lorsque $E \otimes G$ est muni de la base $(e_i \otimes g_k)_{i,k}$ et que $F \otimes H$ est muni de la base $(f_j \otimes h_s)_{j,s}$. Avant toute chose il faut préciser l'ordre sur les vecteurs des deux bases $(e_i \otimes g_k)_{i,k}$ et $(f_j \otimes h_s)_{j,s}$. On considère $E_K = e_i \otimes g_k$ où $K = (i-1)p + k$. C'est sous la forme $(E_K)_{K=1\cdots mp}$ qu'on considère la base de $E \otimes G$. De même on pose $F_L = f_j \otimes h_s$ où $L = (j-1)q + s$. C'est sous la forme $(F_L)_{L=1\cdots nq}$ qu'on ordonne la base de $F \otimes H$. Pour connaître le coefficient $c_{L,K}$ de la matrice de $u \otimes v$ qui se trouve à la ligne L et la colonne K on doit prendre la composante sur F_L de $u \otimes v(E_K)$. Or $u \otimes v(E_K) = u(e_i) \otimes v(g_k)$. Mais $u(e_i) = \sum_{j=1}^{n} U_{j,i} f_j$ et $v(g_k) = \sum_{s=1}^{q} V_{s,k} h_s$. Donc

$$C_{L,K} = U_{j,i} V_{s,k},$$

avec

$$L = (j-1)q + s \quad K = (i-1)p + k.$$

Si on regarde un bloc de taille $q \times p$ consistant à fixer i et j et à faire varier s et k on voit que ce bloc est obtenu en multipliant la matrice V par le coefficient $U_{j,i}$ de la matrice U. Ceci est appelé le produit de Kronecker des deux matrices. On remplace chaque coefficient $U_{j,i}$ de U par le bloc matriciel $U_{j,i}V$.

8. Algèbre tensorielle

8.1. Algèbre tensorielle. — On considère un espace vectoriel E de dimension n sur le corps K. On note $E^\star$ son espace dual. On définit

$$E^{\otimes p} = \underbrace{E \otimes E \otimes \cdots \otimes E}_{p \text{ fois}}.$$

De la même façon on définit

$$E^{\star\otimes q} = \underbrace{E^\star \otimes E^\star \otimes \cdots \otimes E^\star}_{q \text{ fois}}.$$

Un tenseur p fois contravariant et q fois covariant est un élément de $E^{\otimes p} \otimes E^{\star\otimes q}$. Un tel tenseur est dit d'ordre $p+q$.

L'algèbre tensorielle associée à E est l'algèbre graduée définie par

$$\mathcal{T}(E) = K \bigoplus_{p=1}^{\infty} E^{\otimes p} \bigoplus_{q=1}^{\infty} E^{\star\otimes q}.$$

8.2. Contravariance, covariance. — Expliquons la signification de contravariant et de covariant. Nous allons fixer une base $(e_1, \cdots, e_n)$ de E. Cette base étant fixée, nous choisissons pour base de $E^\star$ la base duale $(e^1, \cdots e^n)$ qui vérifie

$$e^i(e_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j \\ 1 & \text{si} \quad i = j. \end{cases}$$

On fait alors un changement de base dans E. On passe à la base $(f_1, \cdots, f_n)$ définie par

$$f_i = \sum_{k=1}^{n} a_i^k e_k.$$

Remarquons que les coefficients a_i^k sont les coefficients de la matrice de passage. Si un vecteur x s'écrivait

$$x = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i$$

dans la base initiale il va s'écrire maintenant

$$x = \sum_{i=1}^{n} X^i f_i.$$

Donc

$$x = \sum_{i=1}^{n} X^i \sum_{k=1}^{n} a_i^k e_k,$$

$$x = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^k X^i \right) e_k.$$

En conséquence on obtient

$$x^k = \sum_{i=1}^{n} a_i^k X^i. \tag{6}$$

Autrement dit si on se donne les nouveaux vecteurs de base en fonction des anciens vecteurs, on a naturellement l'expression des anciennes coordonnées en fonction des nouvelles coordonnées. D'où la dénomination de « contravariant ».

En ce qui concerne le dual $E^\star$, on doit considérer pour nouvelle base $(f^1, \cdots, f^n)$ la base duale de la nouvelle base $(f_1, \cdots, f_n)$ de E. Une forme linéaire s'écrivait avant sous la forme

$$f = \sum_{j=1}^{n} y_j e^j,$$

et maintenant sous la forme

$$f = \sum_{j=1}^{n} Y_j f^j.$$

On remarque que $y_j = f(e_j)$ tandis que $Y_j = f(f_j)$. Donc

$$Y_j = f(f_j) = f\left(\sum_{k=1}^{n} a_j^k e_k \right) = \sum_{k=1}^{n} a_j^k y_k. \tag{7}$$

On obtient naturellement les nouvelle coordonnées de f en fonction des anciennes. D'où la dénomination de « covariant ». Si maintenant E est muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$, alors on peut identifier de manière naturelle un élément de E à un élément de $E^\star$ de la façon suivante : à tout $x \in E$ on fait correspondre la forme linéaire l_x définie par $l_x(y) = \langle x, y \rangle$. Si on a fixé une base de E et qu'on a pris pour base de $E^\star$ la base duale, alors x a des composantes en tant que vecteur de E (composantes contravariantes) et des composantes en tant que forme linéaire (composantes covariantes).

$$x = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i.$$

$$l_x = \sum_{j=1}^{n} x_j e^j.$$

On voit que

$$l_x(e_i) = \sum_{j=1}^{n} x_j e^j(e_i) = x_i.$$

Mais par ailleurs d'après la définition de l_x on a :

$$l_x(e_i) = \langle x, e_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} x^j \langle e_j, e_i \rangle.$$

Donc

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x^j \langle e_j, e_i \rangle.$$

S'il se trouve que la base $(e_i)_i$ est orthonormée pour le produit scalaire, alors les composantes covariantes et contravariantes d'un vecteur sont les mêmes.

Soit un tenseur t de l'algèbre tensorielle engendrée par E qui est p fois contravariant et q fois covariant :

$$t \in E^{\otimes p} \otimes E^{\star \otimes q}.$$

Une base $(e_i)_i$ de E étant fixée, on choisit pour base de $E^\star$ la base duale $(e^i)_i$. Le tenseur t s'écrit dans la base associée du produit tensoriel sous la forme :

$$t = \sum_{i_1, i_2, \cdots, i_p, j_1, j_2, \cdots, j_p} \lambda^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes e^{j_2} \otimes \cdots \otimes e^{j_q}.$$

Un changement de base dans E amènera des formules un peu compliquées dans le cas général, mais dont on voit bien qu'elles se déduisent des formules (6) et (7) et donc qu'elles se compliqueront d'autant plus qu'on mélange du covariant et du contravariant. On voit bien que si on mélange les deux types de formules, on doit connaitre non seulement la décomposition des nouveaux vecteurs dans l'ancienne base, c'est-à-dire la matrice de passage, mais aussi la décomposition des anciens vecteurs dans la nouvelle base, c'est-à-dire qu'on connaît aussi l'inverse de la matrice de passage :

$$f_i = \sum_{k=1}^{n} a_i^k e_k,$$

$$e_i = \sum_{k=1}^{n} b_i^k f_k.$$

Dans ces conditions, en plus des formules (6) et (7) on a aussi la formule :

$$y_j = \sum_{k=1}^{n} b_j^k Y_k. \tag{8}$$

À partir de là le calcul des nouvelles composantes est simple. Faisons le dans le cas d'un tenseur deux fois contravariant et une fois covariant $t \in E \otimes E \otimes E^\star$.

$$t = \sum_{i,j,k} x_k^{ij} e_i \otimes e_j \otimes e^k,$$

$$t = \sum_{i,j,k} X_k^{ij} f_i \otimes f_j \otimes f^k.$$

Alors :

$$x_k^{ij} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} a_\alpha^i a_\beta^j b_k^\gamma X_\gamma^{\alpha\beta}.$$

8.3. Tenseurs et formes multilinéaires. — Le théorème 5.2 montre que :

$$\mathcal{L}(E_1 \otimes \cdots \otimes E_n, W) \simeq \mathcal{B}_n(E_1 \times \cdots \times E_n, W).$$

Si on prend pour espace W le corps de base K on a :

$$(E_1 \otimes \cdots \otimes E_n)^\star \simeq \mathcal{B}_n(E_1 \times \cdots \times E_n),$$

ce qui fait qu'en dimension finie, grâce au théorème 6.1 on obtient :

$$E_1^\star \otimes \cdots \otimes E_n^\star \simeq \mathcal{B}_n(E_1 \times \cdots \times E_n).$$

Dans le cadre d'une algèbre tensorielle définie à partir d'un espace E de dimension finie, et en prenant pour W le corps de base K, on peut donc écrire :

$$\mathcal{L}(E^{\otimes p} \otimes E^{\star \otimes q}) \simeq E^{\star \otimes p} \otimes E^{\otimes q} \simeq \mathcal{B}_{p+q}(E^p \times E^{\star q}).$$

Si un produit euclidien est fixé dans E on a un isomorphisme entre E et $E^\star$ donné par le produit scalaire : tout élément x de E est associé à la forme linéaire l_x de $E^\star$ définie par $l_x(u) = \langle x, u \rangle$. Dans ces conditions on a pour interpréter le produit tensoriel $E^{\otimes p} \otimes E^{\star \otimes q}$ toute latitude pour changer E en $E^\star$ et $E^\star$ en E, ce qui fait qu'on a une multitude d'interprétation du type :

$$E^{\otimes p'} \otimes E^{\star \otimes q'}$$

où $p' \geqslant 0$, $q' \geqslant 0$ et $p' + q' = p + q$. Ceci entraine évidemment des conséquences sur le mélange entre composantes covariantes et composantes contravariantes et se traduit par des formules de changement de bases diverses suivant l'interprétation qu'on a choisie.

8.4. Un exemple très simple. — Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$ muni d'un produit scalaire euclidien $\langle . \rangle$. Soit $\epsilon = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et $\epsilon^* = (e^1, \cdots, e^n)$ sa base duale. Pour bien détailler cet exemple explicitons l'identification de E avec $E^\star$ grâce au produit scalaire, et pour cela notons l l'application de $E^\star$ dans E définie par :

$$\forall y \in E, \quad \langle l(x^\star), y \rangle = x^\star(y).$$

En particulier, si nous décomposons $l(e^i)$ dans la base $(e_1, \cdots e_n)$ nous obtenons une expression de la forme :

$$l(e^i) = \sum_{k=1}^{n} g^{ik} e_k. \tag{9}$$

Nous allons considérer la forme bilinéaire B définie sur $E \times E$ par

$$B(x, y) = \langle x, y \rangle.$$

8.4.1. Composantes covariantes. — Soient x et y des éléments de E définis par :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i \quad y = \sum_{j=1}^{n} y^j e_j.$$

On a donc :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} x^i y^j \langle e_i, e_j \rangle,$$

ce qui donne en posant :

$$g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle,$$

la formule :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x^i y^j.$$

La forme $\langle x, y \rangle$ est une forme bilinéaire et peut donc être identifiée à l'élément $t \in E^\star \otimes E^\star$ défini par :

$$t = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} e^i \otimes e^j.$$

En effet, on aura bien :

$$t(x, y) = t(x \otimes y) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} e^i(x) \otimes e^j(y) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x^i y^j = \langle x, y \rangle,$$

et les g_{ij} sont donc bien les composantes covariantes du tenseur t.

Remarque 8.1. — La permière égalité fait référence au fait que t peut être interprété comme une forme bilinéaire, ou comme un élément du dual de $E \otimes E$.

8.4.2. Composantes mixtes. — On considère maintenant la forme bilinéaire B_1 définie sur $E^\star \times E$ à partir de B et de l'identification l :

$$B_1(x^\star, y) = B(l(x^\star), y) = \langle l(x^\star), y \rangle = x^\star(y).$$

Si on décompose $x^\star$ et y sous la forme :

$$x^\star = \sum_{i=1}^{n} x_i e^i,$$

$$y = \sum_{j=1}^{n} y^j e_j,$$

on obtient :

$$B_1(x^\star, y) = \sum_{i,j} x_i y^j e^i(e_j) = \sum_{i,j} x_i y^j \delta_i^j = \sum_{i=1}^{n} x_i y^i.$$

Considérons maintenant le tenseur t_1, élément de $E \otimes E^\star$ défini par :

$$t_1 = \sum_{i,j=1}^{n} g_i^j e_i \otimes e^j$$

où

$$g_i^j = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$t_1 = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes e^i.$$

Ce tenseur t_1 correspond à la forme bilinéaire B_1 et en conséquence peut être identifié au tenseur t. Les composantes g_i^j sont les composantes mixtes du tenseur.

8.4.3. Composantes contravariantes. — On considère maintenant la forme bilinéaire B_2 définie sur $E^\star \times E^\star$ grâce à la forme B et à l'identification l :

$$B_2(x^\star, y^\star) = B(l(x^\star), l(y^\star)) = \langle l(x^\star), l(y^\star)\rangle = y^\star(l(x^\star)).$$

Décomposons $x^\star$ et $y^\star$ sous la forme :

$$x^\star = \sum_{i=1}^{n} x_i e^i \text{ et } y^\star = \sum_{j=1}^{n} y_j e^j,$$

on obtient :

$$l(x^\star) = \sum_{i=1}^{n} x_i l(e^i),$$

et en utilisant la relation (9) :

$$l(x^\star) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{k=1}^{n} g^{ik} e_k.$$

On a donc :

$$B_2(x^\star, y^\star) = y^\star(l(x^\star)) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{k=1}^{n} g^{ik} e^j(e_k) = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} x_i y_j.$$

Considèrons maintenant le tenseur t_2, élément de $E \otimes E$ défini par :

$$t_2 = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} e_i \otimes e_j.$$

Ce tenseur t_2 correspond à la forme bilinéaire B_2 et en conséquence peut être identifié au tenseur t. Les composantes g^{ij} sont les composantes contravariantes du tenseur. Les composantes contravariantes peuvent être calculées en fonction des composantes covariantes. En effet on a successivement :

$$l(e^i) = \sum_{k=1}^{n} g^{ik} e_k,$$

$$\langle l(e^i), e_s \rangle = \sum_{k=1}^{n} g^{ik} g_{ks},$$

mais $\langle l(e^i), e_s \rangle = e^i(e_s) = \delta_s^i$ donc :

$$\sum_{k=1}^{n} g^{ik} g_{ks} = \delta_s^i.$$

Si les $g_{ks} = \langle e_k, e_s \rangle$ sont connus, pour tout i fixé entre $(1 \leqslant i \leqslant n)$, on obtient un sytème linéaire de n équations en les n inconnues $g^{i1}, \cdots g^{in}$ dont le déterminant est $g = \det(g_{ij})_{i,j}$.

8.4.4. Conclusion. — Le tenseur associé au produit scalaire que nous venons d'étudier sous les formes t, t_1 et t_2 suivant qu'on le considère dans $E^\star \otimes E^\star$, dans $E \otimes E^\star$ ou dans $E \otimes E$ est appelé le tenseur fondamental de l'espace euclidien E. Nous en avons déterminé les composantes covariantes g_{ij}, mixtes g_i^j et contravariantes g^{ij}. Les composantes mixtes sont très simples et sont les δ_i^j. Les composantes covariantes sont données par les produits scalaires $\langle e_i, e_j \rangle$. Les composantes contravariantes peuvent être calculées en fonction des composantes covariantes en résolvant n systèmes linéaires de n équations à n inconnues ayant même déterminant $g = \det(g_{ij})_{i,j}$.

9. Produit tensoriel et compositum

Soit k un corps et K une extension de k. Soient k_1 et k_2 deux extensions de k qui sont des sous-corps de K. Rappelons que le compositum de k_1 et k_2 noté k_1k_2 est le plus petit sous-corps de K contenant k_1 et k_2. Notons A l'anneau engendré par k1 et k_2, c'est-à-dire l'anneau constitué des combinaisons finies $\sum xy$ où $x \in k_1$ et $y \in k_2$. Alors A est un sous anneau du corps K, c'est donc un anneau intègre. Le compositum k_1k_2 est isomorphe au corps des fractions de A. Remarquons que $A = k_1[k_2] = k_2[k_1]$.

Les corps k_1 et k_2 seront considérés comme des espaces vectoriels sur k. Considérons l'application linéaire canonique :

$$\phi \ : k_1 \otimes_k k_2 \to K$$

définie par :

$$\phi(x \otimes y) = xy.$$

Bien évidemment par définition, l'image de ϕ est A. Elle est doncincluse dans le compositum k_1k_2.

Sur le produit tensoriel $k_1 \otimes_k k_2$ on considère le produit de deux éléments défini par le produit de deux éléments simples :

$$(x_1 \otimes y_1).(x_2 \otimes y_2) = (x_1 x_2) \otimes (y_1 y_2),$$

et par bilinéarité. On a ainsi une structure d'anneau sur $k_1 \otimes_k k_2$. L'application ϕ est alors un homomorphisme de l'anneau $k_1 \otimes_k k_2$ sur l'anneau $A = k_1[k_2] = k_2[k_1]$.

Théorème 9.1. — *Supposons que toute base de* k_1 *sur* k *soit un système libre pour* K *considéré comme espace vectoriel sur* k_2 *alors toute base de* k_2 *sur* k *est elle aussi un système libre sur* K *considéré comme espace vectoriel sur* k_1.

Démonstration. — Supposons l'hypothèse du théorème réalisée et considérons une base $(f_i)_i$ de k_2 sur k. Soit $(x_i)_i$ une famille d'éléments de k_1 ne contenant qu'un nombre fini d'éléments non nuls telle que :

$$\sum_i x_i f_i = 0.$$

Il faut montrer que tous les x_i sont nuls.

Soit $(e_j)_j$ une base de k_1 sur k. Chaque x_i s'écrit de manière unique :

$$x_i = \sum_j a_{i,j} e_j,$$

avec des coefficients $a_{i,j}$ dans k, et donc :

$$\sum_i \left(\sum_j a_{i,j} e_j \right) f_i = 0,$$

ou encore :

$$\sum_j \left(\sum_i a_{i,j} f_i \right) e_j = 0.$$

Puisque les coefficients des e_j dans la somme précédente sont dans k_2, par hypothèse ils sont tous nuls, c'est-à-dire que pour tout j on a l'égalité :

$$\sum_i a_{i,j} f_i = 0,$$

ce qui implique puisque $(f_i)_i$ est une base sur k, que pour chaque j tous les $a_{i,j}$ sont nuls, c'est-à-dire que pour tout i et tout j on a $a_{i,j} = 0$ et donc tous les x_i sont nuls. $\square$

Ce théorème permet de donner la définition suivante :

Définition 9.2. — Les deux extensions k_1 et k_2 de k, sont dites linéairement disjointes sur k si toute base de k_1 sur k est un système libre pour K considéré comme espace vectoriel sur k_2.

Théorème 9.3. — *Les deux extensions k_1 et k_2 de k sont linéairement disjointes si et seulement si ϕ est injective.*

Démonstration. — Supposons que l'application ϕ soit injective. Soit $(x_i)_i$ une base de k_1 sur k. Soit $(y_i)_i$ une famille d'éléments de k_2 n'ayant qu'un nombre fini déléments non nuls telle que $\sum_i x_i y_i = 0$. Alors on a donc :

$$\phi(\sum_i x_i \otimes y_i) = \sum_i \phi(x_i \otimes y_i) = \sum_i x_i y_i = 0,$$

et comme ϕ est injective on a $\sum_i x_i \otimes y_i = 0$. Mais les x_i sont linéairement indépendants donc d'après le lemme 4.1, tous les y_i sont nuls, ce qui prouve que la famille $(x_i)_i$ est libre sur k_2 et donc les extensions k_1 et k_2 de k sont linéairement disjointes.

Réciproquement supposons que les extensions k_1 et k_2 sont linéairement disjointes. Soit $(x_i)_i$ une base de k_1 sur k et y_j une base de k_2 sur k. alors la famille $(x_i \otimes y_j)_{i,j}$ est une base de $k_1 \otimes_k k_2$. Considérons un élément de $k_1 \otimes_k k_2$ décomposé sur la base $(x_i \otimes y_j)_{i,j}$ sous la forme :

$$\sum_{i,j} \lambda_{i,j} x_i \otimes y_j$$

qui appartienne au noyau de ϕ. On a donc successivement :

$$\sum_{i,j} \lambda_{i,j} x_i y_j = 0,$$

$$\sum_i x_i \otimes \left(\sum_j \lambda_{i,j} y_j \right) = 0.$$

Comme $(x_i)_i$ est une base de k_1 sur k et que k_1 et k_2 sont linéairement disjoints, la famille $(x_i)_i$ est aussi libre sur k_2 et en conséquence pour tout i on a :

$$\sum_j \lambda_{i,j} y_j = 0.$$

Comme y_j est une base de k_2 sur k on en conclut que pour tout i et tout j on a $\lambda_{i,j} = 0$. Donc le noyau de ϕ est réduit au vecteur nul, et ϕ est donc injective. $\square$

Théorème 9.4. — *Supposons que l'extension k_1 soit une extension algébrique de k. Alors l'anneau $k_1 \otimes_k k_2$ est un corps si et seulement si les extensions k_1 et k_2 sont linéairement disjointes. Dans ce cas $k_1 \otimes_k k_2$ est isomorphe au compositum $k_1 k_2$.*

Démonstration. — Si k_1 est une extension algébrique de k, alors tout élément x de k_1 est aussi algébrique sur k_2. On en déduit que $k_2(k_1)$ est une extension algébrique de k_2 et que $k_2(k_1) = k_2[k_1]$.L'anneau A engendré par k_1 et k_2 est le corps $k_2(k_1)$ c'est-à-dire le compositum $k_1 k_2$. Mais $A = k_2[k_1]$ est l'image de l'application ϕ. Dans ces conditions si les extensions k_1 et k_2 sont linéairement disjointes alors ϕ est un isomorphisme de $k_1 \otimes_k k_2$ sur $k_2[k_1] = k_1 k_2$.

Réciproquement si $k_1 \otimes_k k_2$ est un corps alors ϕ est un homomorphisme de corps. Donc le noyau de ϕ est réduit à $\{0\}$ (car pour $t \neq 0$ on a $\phi(tt^{-1}) = \phi(t)\phi(t)^{-1} = 1$). Donc ϕ est injective et les extensions k_1 et k_2 sont linéairement disjointes. $\square$

1er janvier 2012

R. ROLLAND, Association ACrypTA, 50 Rue Edmond Rostand 13006 Marseille,
E-mail : robert.rolland@acrypta.fr