

Robert Rolland

---

**INITIATION AUX SÉRIES  
DE FOURIER**

---

*Robert Rolland*

*E-mail* : robert.rolland@acrypta.fr

*Url* : <http://robert.rolland.acrypta.com>

C.N.R.S. Institut de Mathématiques de Luminy, case 930, F13288  
Marseille cedex 9, France..

*2007, Mise à jour 3 août 2013*

**INITIATION AUX SÉRIES DE  
FOURIER**

**Robert Rolland**



## AVERTISSEMENT

Le cours qui suit est une introduction aux séries de Fourier. Il a été spécialement rédigé pour un enseignement que j'ai dispensé au niveau de la licence de mathématiques à l'**Université de la Polynésie Française**. Les étudiants ne disposant pas encore des classes de fonctions intégrables au sens de Lebesgue lors de cette première approche, j'ai dû me placer dans le cadre de l'intégrale de Riemann, en évitant toute référence aux classes  $L^p$ .

L'étude commence par la convergence en moyenne quadratique, puis la convergence ponctuelle avec des résultats sur la convergence uniforme. Enfin on approfondit la méthode de sommation de Césaro pour aboutir à la convergence uniforme des sommes de Fejér. J'ai rajouté une partie sur le calcul des coefficients de Fourier par la transformation de Fourier rapide. J'ai donné sous forme d'exercices des compléments sur le théorème d'approximation de Weierstrass et ses généralisations, l'importance des noyaux positifs dans ce domaine et plus généralement des opérateurs positifs.



# TABLE DES MATIÈRES

<b>Avertissement</b> .....	v
<b>1. Les polynômes trigonométriques</b> .....	1
1.1. Cas général : coefficients complexes.....	1
1.2. Cas particulier : coefficients réels.....	2
1.3. Espace Hermitien des polynômes trigonométriques de degré $\leq N$ .....	3
<b>2. Les séries de Fourier</b> .....	7
2.1. Les espaces de fonctions.....	7
2.2. Les coefficients de Fourier.....	8
2.3. Approximation par des polynômes trigonométriques.....	12
2.4. Convergence en moyenne quadratique.....	13
2.5. Convergence ponctuelle.....	15
2.6. Coefficients de Fourier et fonctions dérivées.....	22
<b>3. Approfondissement sur l'approximation par des polynômes trigonométriques</b> .....	25
3.1. Noyau de Dirichlet.....	25
3.2. Noyau de Fejér.....	26
<b>4. Calcul des coefficients de Fourier</b> .....	31
4.1. La transformée de Fourier Discrète.....	31
4.2. La transformée de Fourier Rapide.....	45
4.3. Approximation des coefficients de Fourier.....	49
<b>5. Annexe I : Le théorème d'approximation uniforme de Weierstrass</b> .....	53

5.1. Présentation du problème.....	53
5.2. La démonstration élémentaire d'Henri Lebesgue.....	53
5.3. Les noyaux positifs.....	54
5.4. Les opérateurs positifs.....	58



# CHAPITRE 1

## LES POLYNÔMES TRIGONOMÉTRIQUES

### 1.1. Cas général : coefficients complexes

**Définition 1.1.1.** — On appelle **polynôme trigonométrique** de degré  $\leq N$  toute somme finie

$$(1) \quad S_N(\theta) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\theta}$$

où les coefficients  $c_n$  sont des nombres complexes.

Un polynôme trigonométrique peut aussi être écrit en utilisant les fonctions trigonométriques usuelles grâce aux transformations suivantes :

$$S_N(\theta) = c_0 + \sum_{n=1}^N c_n e^{in\theta} + \sum_{n=1}^N c_{-n} e^{-in\theta},$$

$$S_N(\theta) = c_0 + \sum_{n=1}^N c_n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) + \sum_{n=1}^N c_{-n} (\cos(n\theta) - i \sin(n\theta)),$$

$$S_N(\theta) = c_0 + \sum_{n=1}^N (c_n + c_{-n}) \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^N i(c_n - c_{-n}) \sin(n\theta).$$

En posant alors

$$(2) \quad \begin{cases} a_0 = 2c_0 \\ a_n = c_n + c_{-n} \\ b_n = i(c_n - c_{-n}) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{si } n \geq 1 \\ \text{si } n \geq 1 \end{array}$$

c'est-à-dire aussi

$$(3) \quad \begin{cases} c_0 = \frac{a_0}{2} \\ c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \\ c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{si } n \geq 1 \\ \text{si } n \geq 1 \end{array}$$

on obtient

$$(4) \quad S_N(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta))$$

Ainsi les écritures exponentielles (1) et trigonométriques (4) sont équivalentes pourvu que les relations (2) et (3) entre les coefficients soient réalisées.

## 1.2. Cas particulier : coefficients réels

Si maintenant on suppose que tous les coefficients  $a_n$  et  $b_n$  sont réels. Les formules (3) montrent que cette condition est équivalente au fait que  $c_0$  est réel et que pour tout  $n \geq 1$  les coefficients  $c_n$  et  $c_{-n}$  sont des nombres complexes conjugués. De plus

$$a_n = 2\mathcal{R}e(c_n),$$

$$b_n = -2\mathcal{I}m(c_n).$$

Remarquons aussi que dans ce cas

$$S_N(\theta) = c_0 + \sum_{n=1}^N c_n e^{in\theta} + \sum_{n=1}^N \overline{c_n} e^{-in\theta},$$

ce qui donne

$$(5) \quad S_N(\theta) = \operatorname{Re} \left( c_0 + 2 \sum_{n=1}^N c_n e^{in\theta} \right)$$

### 1.3. Espace Hermitien des polynômes trigonométriques de degré $\leq N$

On vérifie immédiatement que l'ensemble  $\mathcal{P}_N$  des fonctions polynomiales trigonométriques de degré  $\leq N$  est un sous espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{C}$  des nombres complexes des fonctions périodiques de période  $2\pi$ , indéfiniment dérivables.

On introduit sur  $\mathcal{P}_N$  le produit

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \overline{g(\theta)} d\theta$$

**Théorème 1.3.1.** — *Le produit ainsi défini est un produit scalaire (forme sesquilinéaire hermitienne définie positive) sur  $\mathcal{P}_N$ . Nous noterons  $\| \cdot \|_2$  la norme associée à ce produit scalaire.*

*Les fonctions  $(e^{in\theta})_{n \in \{-N, \dots, N\}}$  forment une base orthonormée de  $\mathcal{P}_N$ .*

*Les fonctions*

$$(1, \cos(\theta), \sin(\theta), \dots, \cos(N\theta), \sin(N\theta))$$

*forment une base orthogonale de  $\mathcal{P}_N$ .*

*Démonstration.* — Il est facile de voir que  $\langle f, g \rangle$  est linéaire par rapport à la première variable, semi-linéaire par rapport à la deuxième variable, et réalise la symétrie hermitienne, c'est-à-dire

$$\langle g, f \rangle = \overline{\langle f, g \rangle}.$$

De plus si  $f \in \mathcal{P}_N$

$$\langle f, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2 d\theta.$$

Comme  $|f(\theta)|^2$  est une fonction continue positive, l'intégrale est  $\geq 0$  et est égale à 0 si et seulement si  $|f(\theta)|^2 = 0$ , c'est-à-dire si et seulement

si  $f = 0$ . On a donc montré que pour tout  $f \in \mathcal{P}_N$  on a  $\langle f, f \rangle \geq 0$  et que  $\langle f, f \rangle = 0$  si et seulement si  $f=0$ .

Remarquons que par définition de  $\mathcal{P}_N$  la famille  $(e^{in\theta})_{n \in \{-N, \dots, N\}}$  est une famille génératrice. Montrons maintenant que si  $m$  et  $n$  sont des entiers de l'intervalle  $\{-N, \dots, N\}$  alors

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\theta} e^{-im\theta} d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ 1 & \text{si } m = n. \end{cases}$$

En effet,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\theta} e^{-im\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta.$$

Si  $m \neq n$  on a donc

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\theta} e^{-im\theta} d\theta = \frac{1}{2i\pi(n-m)} [e^{i(n-m)\theta}]_0^{2\pi} = 0.$$

Si au contraire  $m = n$  alors

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\theta} e^{-im\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = 1.$$

Ceci achève de montrer que la famille  $(e^{in\theta})_{n \in \{-N, \dots, N\}}$  est une base orthonormée de  $\mathcal{P}_N$ . En conséquence l'espace est de dimension  $2N + 1$ .

En utilisant les relations trigonométriques habituelles

$$\cos(mt)\sin(nt) = \frac{1}{2}[\sin((m+n)t) + \sin((n-m)t)]$$

$$\cos(mt)\cos(nt) = \frac{1}{2}[\cos((m+n)t) + \cos((n-m)t)]$$

$$\sin(mt)\sin(nt) = \frac{1}{2}[\cos((m-n)t) - \cos((n+m)t)]$$

on montre facilement que la famille

$$(1, \cos(\theta), \sin(\theta), \dots, \cos(N\theta), \sin(N\theta))$$

est une famille orthogonale (donc libre). Comme elle contient  $2N + 1$  fonctions, c'est une base.  $\square$

**Remarques :** Cette dernière base est orthogonale mais pas ortho-normée. En fait un calcul direct montre que

$$\|1\|_2 = 1, \quad \|\cos(nt)\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \|\sin(nt)\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ainsi toute fonction  $f \in \mathcal{P}_N$  se décompose de manière unique sous la forme

$$f(\theta) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\theta}$$

ou sous la forme

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta))$$

avec

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta. \end{aligned}$$

**Définition 1.3.2.** — Les coefficients  $c_n$  (ou les coefficients  $a_n$  et  $b_n$ ) sont appelés les **coefficients de Fourier** du polynôme trigonométrique  $f$ .

Compte tenu de l'orthogonalité des bases introduites nous pouvons appliquer le théorème de Pythagore :

**Théorème 1.3.3.** — Soit  $f$  un polynôme trigonométrique appartenant à  $\mathcal{P}_N$ . Nous avons les égalités suivantes

$$(6) \quad \|f\|_2^2 = \sum_{n=-N}^N |c_n|^2$$

$$(7) \quad \|f\|_2^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (|a_n|^2 + |b_n|^2)$$

## CHAPITRE 2

# LES SÉRIES DE FOURIER

### 2.1. Les espaces de fonctions

Nous allons maintenant définir la notion de **coefficient de Fourier** pour des fonctions plus générales que les polynômes trigonométriques. Nous nous passerons pour cette étude des classes de fonctions intégrables au sens de Lebesgue que nous ne supposons pas connues à ce niveau.

- Notons

$$C(T)$$

l'espace des fonctions continues sur le tore  $T = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  (qu'on peut voir aussi comme l'espace des fonctions continues sur  $\mathbb{R}$  qui sont  $2\pi$ -périodiques ou encore comme l'espace des fonctions continues sur  $[0, 2\pi]$  telles que  $f(0) = f(2\pi)$ ).

- Nous noterons

$$C^{(k)}(T)$$

le sous espace de  $C(T)$  constitué des fonctions  $k$  fois continument dérivables.

- Notons

$$C_m(T)$$

les fonctions **continues par morceaux**, c'est-à-dire les fonctions  $2\pi$ -périodiques qui ont un nombre fini  $a_1, \dots, a_s$  de discontinuités sur une période  $[0, 2\pi]$  et qui sont prolongeables en une fonction continue sur chaque intervalle de  $[0, 2\pi]$  déterminé par le partage  $a_1, \dots, a_s$ . C'est-à-dire qu'en chaque point de discontinuité une telle fonction admet une limite à droite et une limite à gauche.

- Notons

$$C_m^{(1)}(T)$$

les fonctions  $2\pi$ -périodiques continues par morceaux, dérivables par morceaux. Ce sont les fonctions  $f$  continues par morceaux et qui de plus réalisent les conditions suivantes : l'intervalle  $[0, 2\pi]$  peut être décomposé en un nombre fini d'intervalles  $[a_i, a_{i+1}]$  tels que dans chaque intervalle ouvert  $]a_i, a_{i+1}[$  la fonction  $f$  soit continue, dérivable, de dérivée  $f'$  continue par morceaux telle que

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} |f'(t)| dt$$

existe (éventuellement comme intégrale impropre).

## 2.2. Les coefficients de Fourier

**2.2.1. Définition des coefficients de Fourier.** — Soit  $f \in C_m(T)$ . Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  on pose

$$(8) \quad c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$$

et aussi pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$(9) \quad a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt$$

$$(10) \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt$$

**Définition 2.2.1.** — Les coefficients  $c_n(f)$  sont les **coefficients de Fourier exponentiels** de  $f$ . Les coefficients  $a_n(f)$  et  $b_n(f)$  sont les **coefficients de Fourier trigonométriques** de  $f$ .

En prolongeant la définition de  $\langle f, g \rangle$  donnée précédemment pour les polynômes trigonométriques, aux fonctions de  $C_m(T)$

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$$

nous pouvons écrire



$$\begin{aligned}c_n(f) &= \langle f, e^{int} \rangle, \\a_n(f) &= 2\langle f, \cos(nt) \rangle, \\b_n(f) &= 2\langle f, \sin(nt) \rangle.\end{aligned}$$

**Remarque 2.2.2.** — Le produit  $\langle f, g \rangle$  n'est pas ici un produit scalaire du fait que

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

n'est pas une norme sur  $C_m(T)$  mais simplement une semi-norme (on peut avoir  $\|f\|_2 = 0$  sans que  $f = 0$ ). Il y a plusieurs façons d'avoir une vraie norme, par exemple en travaillant non pas sur  $C_m(T)$ , mais sur  $\tilde{C}_m(T)$  constitué des **fonctions "régulières"** de  $C_m(T)$ , c'est-à-dire celles qui en tout point vérifient

$$f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

où

$$\begin{aligned}f(x+) &= \lim_{\substack{t \rightarrow x \\ t > x}} f(t), \\f(x-) &= \lim_{\substack{t \rightarrow x \\ t < x}} f(t).\end{aligned}$$

Cependant nous pouvons continuer sans inconvénient à travailler avec une semi-norme. C'est ce que nous ferons pour le moment.

### 2.2.2. Premières propriétés des coefficients de Fourier. —

**Proposition 2.2.3.** — *Les coefficients de Fourier d'une fonction  $f \in C_m(T)$  sont bornés.*

*Démonstration.* — En effet

$$|c_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)| dt,$$

$$|a_n(f)| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)| dt,$$

$$|b_n(f)| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)| dt. \quad \square$$

Nous verrons ultérieurement qu'en fait ces coefficients tendent vers 0.

**Proposition 2.2.4.** — Soit  $f \in C_m(T)$ . Si la fonction  $f$  est paire, alors tous les coefficients  $b_n$  sont nuls. Si la fonction  $f$  est impaire alors tous les coefficients  $a_n$  sont nuls. Sur les coefficients  $c_n$  ceci s'exprime par : Si la fonction  $f$  est paire alors pour tout entier  $n$  on a  $c_n = c_{-n}$ . Si la fonction  $f$  est impaire alors pour tout entier  $n$  on a  $c_n = -c_{-n}$ .

*Démonstration.* — Comme les fonctions qu'on intègre pour calculer les coefficients de Fourier sont  $2\pi$ -périodiques, l'intervalle d'intégration peut être si on veut  $[-\pi, \pi]$ . Il est alors facile de conclure compte tenu des hypothèses sur la parité ou l'imparité de  $f$ .

**2.2.3. Série de Fourier.** — Maintenant que nous avons défini les coefficients de Fourier d'une fonction  $f$  nous introduisons la série de Fourier de  $f$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{int},$$

ou

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f) \cos(nt) + b_n(f) \sin(nt)).$$

Nous noterons

$$S_N(f) = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{int} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n(f) \cos(nt) + b_n(f) \sin(nt))$$

la somme partielle de rang  $N$  de la série de Fourier de  $f$ .

Le problème est de savoir si cette série converge et si oui, si elle converge vers la fonction  $f$ . Cette étude devra être faite pour divers modes de convergence. Nous commencerons par la convergence en moyenne quadratique qui se trouve être la plus adaptée aux séries de Fourier. Dans la partie sur les polynômes trigonométriques, nous avons mis en évidence

une base orthonormée qui nous a permis une étude commode. Il s'agit maintenant de passer au cas d'une famille orthonormée infinie, qui ne sera pas une base au sens algébrique du terme, mais une base en un sens topologique (cf. espaces de Hilbert). Autrement dit nous allons essayer d'adapter l'aspect "géométrie euclidienne" au cas d'un nombre infini de coordonnées. Pour cela nous avons tout d'abord besoin de résultats d'approximation. Nous allons les énoncer et les démontrer brièvement afin de pouvoir mettre en place rapidement la théorie que nous avons en vue. Nous reviendrons plus tard plus en détail sur cet aspect.

**2.2.4. Exemples.** — Voici quelques exemples de calcul de coefficients de Fourier et de séries de Fourier. Les fonctions sont décrites sur une période et prolongées sur  $\mathbb{R}$  par périodicité.

- $f(t) = 1$ . Alors  $a_0(f) = 2$  et pour  $n \geq 1$ , on a  $a_n(f) = b_n(f) = 0$ .
- $f(t) = t$  sur  $] -\pi, \pi[$  et  $f(-\pi) = 0$ . Cette fonction est impaire si bien que  $a_n(f) = 0$  pour tout  $n$ . Quant à  $b_n(f)$  on a

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t \sin(nt) dt.$$

Le calcul donne

$$b_n = \frac{2(-1)^{n-1}}{n}.$$

- $f(t) = t^2$  sur  $[-\pi, \pi]$ . Cette fonction est paire si bien que  $b_n(f) = 0$  pour tout  $n > 0$ . On calcule alors

$$a_0(f) = \frac{2\pi^2}{3},$$

puis

$$a_n(f) = \frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

- $f(t) = -1$  si  $t \in ] -\pi, 0[$ ,  $f(t) = 1$  si  $t \in ]0, \pi[$ ,  $f(-\pi) = f(\pi) = f(0) = 0$ . Cette fonction est impaire si bien que  $a_n(f) = 0$  pour tout  $n$ . Pour  $b_n(f)$  le calcul donne

$$b_n(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{4}{\pi n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

- $f(t) = |t|$  sur  $[-\pi, \pi]$ . Cette fonction est paire, donc tous les  $b_n(f)$  sont nuls. Le calcul donne

$$a_0(f) = \pi$$

$$a_n(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{-4}{\pi n^2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

**2.2.5. Cas d'une période  $T$ .** — Nous avons donné toutes les définitions et tous les calculs dans le cas d'une fonction périodique de période  $2\pi$ . Si nous avons une fonction de période  $T$  alors nous écrivons les coefficients de Fourier sous la forme

$$(11) \quad c_n(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\frac{2\pi}{T}t} dt$$

et aussi pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$(12) \quad a_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\frac{2\pi}{T}t) dt$$

$$(13) \quad b_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\frac{2\pi}{T}t) dt$$

### 2.3. Approximation par des polynômes trigonométriques

Rappelons le théorème suivant qui est la version "trigonométrique" du théorème d'approximation de Weierstrass.

**Théorème 2.3.1.** — *Toute fonction  $f \in C(T)$  (fonction continue  $2\pi$ -périodique) est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques.*

*Démonstration.* — La démonstration de ce théorème est donnée dans l'annexe I (exercice 6).  $\square$

**Théorème 2.3.2.** — *Pour toute fonction  $g \in C_m(T)$  et pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe une fonction continue  $f \in C(T)$  telle que*

$$\|g - f\|_2 \leq \epsilon.$$

*Démonstration.* — Remarquons que si on démontre le théorème pour des fonctions réelles, on a le résultat sur des fonctions complexes en travaillant sur la partie réelle et la partie imaginaire. Pour obtenir le théorème pour une fonction réelle  $g$  il suffit pour tout point de discontinuité  $a$  de  $g$  d'approcher  $g$  sur un voisinage suffisamment petit  $[a - \delta, a + \delta]$  par la fonction affine passant par les deux points  $(a - \delta, g(a - \delta))$  et  $(a + \delta, g(a + \delta))$ .  $\square$

Comme conséquence des deux théorèmes précédents on obtient

**Théorème 2.3.3.** — *Pour toute fonction  $g \in C_m(T)$  et pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un polynôme trigonométrique  $P$  tel que*

$$\|g - P\|_2 \leq \epsilon.$$

## 2.4. Convergence en moyenne quadratique

**Théorème 2.4.1.** — *Soit  $f \in C_m(T)$  et  $P \in \mathcal{P}_N$  un polynôme trigonométrique de degré  $\leq N$ . Alors*

$$\|f - S_N(f)\|_2 \leq \|f - P\|_2,$$

*l'égalité n'ayant lieu que si  $P = S_N(f)$ .*

*Démonstration.* — Soit  $P(t) = \sum_{n=-N}^N x_n e^{int}$  un polynôme trigonométrique quelconque. Alors

$$\|f - P\|_2^2 = \|f\|_2^2 - 2\mathcal{R}e(\langle f, P \rangle) + \|P\|_2^2.$$

Mais

$$\langle f, P \rangle = \sum_{n=-N}^N \overline{x_n} \langle f, e^{int} \rangle = \sum_{n=-N}^N \overline{x_n} c_n(f),$$

tandis que

$$\|P\|_2^2 = \sum_{n=-N}^N |x_n|^2.$$

En conséquence

$$\|f - P\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \sum_{n=-N}^N (|c_n(f) - x_n|^2 - |c_n(f)|^2).$$

Le minimum est donc atteint si et seulement si pour tout  $n$  on a  $x_n = c_n(f)$ , c'est-à-dire

$$P(t) = S_N(f)(t).$$

Ce minimum est alors

$$\|f - S_N(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|S_N(f)\|_2^2. \quad \square$$

**Corollaire 2.4.2.** — (*Inégalité de Bessel*)

$$\sum_{n=-N}^N |c_n(f)|^2 \leq \|f\|_2^2.$$

*Démonstration.* — C'est une conséquence immédiate de la dernière inégalité dans la preuve du théorème précédent.  $\square$

**Théorème 2.4.3.** — *Soit  $f \in C_m(T)$ , alors la série de Fourier de  $f$  converge vers  $f$  en moyenne quadratique, c'est-à-dire*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|f - S_N(f)\|_2 = 0.$$

*Démonstration.* — Soit  $\epsilon > 0$ . On sait d'après le théorème 2.3.3 qu'il existe un polynôme trigonométrique  $P$  tel que

$$\|f - P\|_2 \leq \epsilon.$$

Soit  $N$  le degré de  $P$  si bien que pour tout  $n \geq N$  le degré de  $P$  est  $\leq n$  et donc

$$\|f - S_n(f)\|_2 \leq \|f - P\|_2 \leq \epsilon.$$

On en conclut le théorème.  $\square$

**Théorème 2.4.4.** — (*Égalité de Parseval*) *Soit  $f \in C_m(T)$ , alors*

$$(14) \quad \|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

$$(15) \quad \|f\|_2^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2)$$

*Démonstration.* — Revenons à l'égalité

$$\|f - S_n(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|S_n(f)\|_2^2.$$

Comme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n(f)\|_2 = 0,$$

on conclut que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(f)\|_2 = \|f\|_2,$$

ce qui donne les relations annoncées.  $\square$

**Corollaire 2.4.5.** — Soit  $f \in C_m(T)$ , alors les coefficients de Fourier de  $f$  tendent vers 0. Plus précisément

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} c_n = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0.$$

*Démonstration.* — C'est une simple conséquence de la convergence des séries du théorème précédent.  $\square$

## 2.5. Convergence ponctuelle

On a vu que toute fonction continue périodique peut être approchée uniformément par des polynômes trigonométriques. On a vu aussi que dans le cas de la convergence en moyenne quadratique, ce sont les sommes partielles de la série de Fourier associée qui donnent les meilleures approximations. On peut donc se demander si pour la convergence uniforme ou la convergence simple il en est de même. La réponse est négative. Même plus, il existe des fonctions continues périodiques pour lesquelles en certains points la série de Fourier ne converge pas (exemple de Paul Du Bois-Reymond). Cependant on sait (résultat de Carleson) que pour les fonctions continues (et plus généralement les fonctions de  $L^2$ ) la série

de Fourier de  $f$  converge vers  $f$  presque partout. Nous allons voir toutefois que sous certaines hypothèses on peut donner des résultats sur la convergence.

Commençons par étudier la fonction  $2\pi$ -périodique  $f$  définie sur  $[0, 2\pi[$  par

$$f(x) = \frac{x}{2\pi} - \frac{1}{2}.$$

Un calcul simple des coefficients de Fourier montre que la série de Fourier de  $f$  est

$$(16) \quad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n\pi}$$

**Lemme 2.5.1.** — *La série de Fourier de la fonction  $2\pi$ -périodique  $f$  définie sur la période  $[0, 2\pi[$  par  $f(x) = \frac{x}{2\pi} - \frac{1}{2}$  converge pour tout  $x$ . Elle converge vers  $f(x)$  c'est-à-dire*

$$\frac{x}{2\pi} - \frac{1}{2} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n\pi}$$

*pour tout  $x \neq 2k\pi$  (points de discontinuité de  $f$ ). La convergence est uniforme sur tout intervalle fermé de  $\mathbb{R}$  qui ne contient aucun point de la forme  $2k\pi$ .*

*Démonstration.* — Nous allons étudier la convergence de cette série de Fourier en utilisant la transformation d'Abel. Soit  $0 < \delta < \pi$ . Nous étudierons la convergence de cette série sur l'intervalle  $I_\delta = [\delta, 2\pi - \delta]$ . Posons pour  $x \in I_\delta$

$$s_n = \sum_{k=0}^n \sin(kx),$$

alors

$$s_n = \mathcal{I}m \left( \sum_{k=0}^n e^{ikx} \right),$$

donc



$$|s_n| \leq \left| \sum_{k=0}^n e^{ikx} \right|.$$

Mais

$$\sum_{k=0}^n e^{ikx} = \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}},$$

ou encore

$$\sum_{k=0}^n e^{ikx} = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}x} \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{e^{i\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

On en conclut que

$$|s_n| \leq \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

En conséquence puisque  $x \in I_\delta$  on peut écrire

$$|s_n| \leq \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \leq M_\delta$$

où  $M_\delta$  est une constante qui ne dépend pas de  $n$  ni bien sûr du  $x$  dans  $I_\delta$ .

Le module d'un paquet de Cauchy de la série de Fourier (16) s'écrit donc successivement

$$C_{m,n}(x) = \left| \sum_{k=m}^n \frac{\sin(kx)}{k\pi} \right|,$$

$$C_{m,n}(x) = \left| \sum_{k=m}^n \frac{s_k - s_{k-1}}{k\pi} \right|,$$

$$C_{m,n}(x) = \left| \sum_{k=m}^n s_k \left( \frac{1}{k\pi} - \frac{1}{(k+1)\pi} \right) + \frac{s_n}{(n+1)\pi} - \frac{s_{m-1}}{m\pi} \right|,$$

ce qui permet d'écrire

$$C_{m,n}(x) \leq \frac{M_\delta}{\pi} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{m} + \sum_{k=m}^n \frac{1}{k(k+1)} \right).$$

Cette dernière inégalité permet de conclure à la convergence uniforme de la série (16) sur l'intervalle  $I_\delta$  vers une fonction continue  $\phi_\delta$ . Nous allons montrer que  $\phi_\delta$  est égale à  $f$  sur  $I_\delta$ .

Pour cela utilisons la convergence en moyenne quadratique de la série de Fourier vers  $f$ . On sait alors que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |f(x) - S_n(f)(x)|^2 dx = 0,$$

à fortiori

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_\delta^{2\pi-\delta} |f(x) - S_n(f)(x)|^2 dx = 0,$$

et comme  $S_n(f)(x)$  converge uniformément sur  $I_\delta$  vers  $\phi_\delta$  on obtient

$$\int_\delta^{2\pi-\delta} |f(x) - \phi_\delta(x)|^2 dx = 0.$$

La fonction  $|f(x) - \phi_\delta(x)|^2$  étant continue et positive on conclut que  $f(x) = \phi_\delta(x)$ .  $\square$

**Lemme 2.5.2.** — *Les sommes partielles*

$$S_n(f)(x) = - \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k\pi}$$

de la série de Fourier de  $f(x) = \frac{x}{2\pi} - \frac{1}{2}$  sont uniformément bornées par un nombre  $M$  indépendant de  $x$  et de  $n$ .

*Démonstration.* — Soit

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f)(x)}{n}$$

la somme de Fejér associée. On sait que (cf. chapitre 3 formule (22))

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{n\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x+2t) \left( \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} \right)^2 dt.$$

Or

$$|f(x+2t)| \leq \frac{1}{2}.$$

Donc

$$|\sigma_n(f)(x)| \leq \frac{1}{2n\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} \right)^2 dt,$$

et comme

$$\frac{1}{n\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} \right)^2 dt = 1$$

on en conclut que

$$|\sigma_n(f)(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

Un simple calcul montre par ailleurs que

$$\sigma_{n+1}(f)(x) - S_n(f)(x) = \frac{1}{(n+1)\pi} \sum_{k=1}^n \sin(kx),$$

donc

$$|\sigma_{n+1}(f)(x) - S_n(f)(x)| \leq \frac{1}{\pi}.$$

En conclusion

$$|S_n(f)(x)| \leq |\sigma_{n+1}(f)(x)| + \frac{1}{\pi},$$

ce qui implique

$$|S_n(f)(x)| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}. \quad \square$$

**Lemme 2.5.3.** — Soit  $f$  une fonction complexe appartenant à  $C_m^{(1)}(T)$ . Quel que soit  $\epsilon > 0$  il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $x$

$$\int_x^{x+\delta} |f'(t)| dt \leq \epsilon.$$

*Démonstration.* — Ceci est une conséquence directe du fait que  $-f'(t)$  n'a qu'un nombre fini de discontinuités et qu'en ces points l'intégrale est convergente.  $\square$

**Théorème 2.5.4.** — Soit  $f$  une fonction complexe appartenant à  $C_m^{(1)}(T)$  ( $f$   $2\pi$ -périodique, continue par morceaux et dérivable par morceaux). Alors la série de Fourier de  $f$  converge pour tout  $x \in \mathbb{R}$  vers

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

La convergence est uniforme sur tout intervalle fermé ne contenant aucun point de discontinuité de  $f$ .

*Démonstration.* — Supposons tout d'abord que  $f \in C_m^{(1)}(T)$  soit de plus continue. L'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \left( \frac{t}{2\pi} - \frac{1}{2} \right) f'(t) dt$$

est absolument convergente et par suite en intégrant par parties on obtient compte tenu de la continuité de  $f$

$$\int_0^{2\pi} \left( \frac{t}{2\pi} - \frac{1}{2} \right) f'(t) dt = f(0) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt$$

ou encore puisque  $f$  est  $2\pi$ -périodique

$$(17) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt + \int_0^{2\pi} \left( \frac{t}{2\pi} - \frac{1}{2} \right) f'(x+t) dt$$

Etudions alors

$$\int_0^{2\pi} \left( \frac{t}{2\pi} - \frac{1}{2} \right) f'(x+t) dt + \sum_{k=1}^n \int_0^{2\pi} \frac{\sin(kt)}{k\pi} f'(x+t) dt,$$

c'est-à-dire en posant  $S_n(t) = -\sum_{k=1}^n \frac{\sin(kt)}{k\pi}$

$$\int_0^{2\pi} \left( \frac{t}{2\pi} - \frac{1}{2} \right) f'(x+t) dt - \int_0^{2\pi} S_n(t) f'(x+t) dt,$$

ou encore

$$\int_0^{2\pi} \left( \frac{t}{2\pi} - \frac{1}{2} - S_n(t) \right) f'(x+t) dt.$$

On va majorer cette expression en découpant l'intervalle d'intégration en 3 morceaux

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{2\pi} \left( \frac{t}{2\pi} - \frac{1}{2} - S_n(t) \right) f'(x+t) dt \right| \leq \\ & \int_0^\delta \left| \frac{t}{2\pi} - \frac{1}{2} - S_n(t) \right| |f'(x+t)| dt + \int_{2\pi-\delta}^{2\pi} \left| \frac{t}{2\pi} - \frac{1}{2} - S_n(t) \right| |f'(x+t)| dt + \\ & \int_\delta^{2\pi-\delta} \left| \frac{t}{2\pi} - \frac{1}{2} - S_n(t) \right| |f'(x+t)| dt. \end{aligned}$$

De plus

$$\left| \frac{t}{2\pi} - \frac{1}{2} - S_n(t) \right|$$

est uniformément borné par un nombre  $M$  (indépendant de  $t$  et de  $n$ ) donc

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{2\pi} \left( \frac{t}{2\pi} - \frac{1}{2} - S_n(t) \right) f'(x+t) dt \right| \leq \\ & M \left( \int_0^\delta |f'(x+t)| dt + \int_{2\pi-\delta}^{2\pi} |f'(x+t)| dt \right) + \\ & \int_\delta^{2\pi-\delta} \left| \frac{t}{2\pi} - \frac{1}{2} - S_n(t) \right| |f'(x+t)| dt. \end{aligned}$$

Les deux intégrales intervenant dans la première partie de la somme sont des intégrales sur des intervalles de taille  $\delta$  donc compte tenu du lemme (2.5.3) on peut choisir  $\delta$  indépendant de  $x$  et de  $n$  tel que cette première partie de la somme soit  $\leq \frac{\epsilon}{2}$ . On rend alors la deuxième partie de la somme  $\leq \frac{\epsilon}{2}$  en choisissant  $n$  assez grand (puisque  $S_n(t)$  converge uniformément sur  $[\delta, 2\pi - \delta]$  vers  $\frac{t}{2\pi} - \frac{1}{2}$  et que  $\int_\delta^{2\pi-\delta} |f'(x+t)| dt$  est majorée par  $\int_0^{2\pi} |f'(x+t)| dt$ ).

En conclusion

$$\int_0^{2\pi} \left( \frac{t}{2\pi} - \frac{1}{2} \right) f'(x+t) dt = - \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(kt)}{k\pi} f'(x+t) dt.$$

Mais pour chaque intégrale de la somme on trouve en intégrant par parties

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin(kt)}{k\pi} f'(x+t) dt = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(k(t-x)) f(t) dt = -a_k \cos(kx) - b_k \sin(kx).$$

En revenant à l'égalité (17) on obtient alors

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

c'est-à-dire

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)),$$

la convergence de la série étant uniforme.

Si maintenant  $f$  n'est pas continue (mais bien sûr toujours dans  $C_m^{(1)}(T)$ ). On la supposera, ce qui ne change rien, régulière. Appelons  $a_1, \dots, a_r$  les points de discontinuité de  $f$  et  $\lambda_k = f(a_k+) - f(a_k-)$  le saut au point  $a_k$ . Notons  $\tilde{h}$  la régularisée de la fonction  $2\pi$ -périodique  $h$  définie sur la période  $[0, 2\pi[$  par  $h(x) = \frac{x}{2\pi} - \frac{1}{2}$ . Alors pour tout  $x$

$$\tilde{h}(x) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k\pi},$$

et posons

$$g(x) = f(x) - \sum_{k=1}^r \lambda_k \tilde{h}(x - a_k).$$

On a compensé les sauts de  $f$  par les sauts de  $\sum_{k=1}^r \lambda_k \tilde{h}(x - a_k)$  si bien que  $g$  est continue et appartient aussi à  $C_m^{(1)}(T)$ . On peut appliquer le résultat précédent à  $g$ . On en déduit le résultat.  $\square$

## 2.6. Coefficients de Fourier et fonctions dérivées

Nous allons voir qu'au plus  $f$  est régulière, au plus les coefficients de Fourier de  $f$  tendent vers 0 rapidement. Pour cela supposons que  $f$  soit une fonction périodique continue dérivable et de dérivée continue :  $f \in C^{(1)}(T)$ . Alors en intégrant par parties

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt = -\frac{1}{2ni\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) e^{-int} dt,$$

c'est-à-dire

$$c_n(f') = inc_n(f).$$

Mais comme on sait que  $c_n(f') = o(1)$  on voit que  $c_n(f) = o(\frac{1}{n})$ .

De plus en écrivant que

$$\left( |c_n(f')| - \frac{1}{n} \right)^2 \geq 0,$$

on obtient

$$|c_n(f')| \leq \frac{n}{2} \left( |c_n(f')|^2 + \frac{1}{n^2} \right).$$

Donc

$$|c_n(f)| \leq \frac{1}{2} \left( |c_n(f')|^2 + \frac{1}{n^2} \right),$$

ce qui prouve que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)| < +\infty.$$

En supposant que  $f \in C^{(k)}(T)$  on démontre par récurrence que

$$c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right).$$

**Exercice** Soit  $f$  une fonction continue  $2\pi$ -périodique. On suppose que pour tout entier  $k > 0$  on ait

$$c_k(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right).$$

Montrer que  $f$  est indéfiniment dérivable.





## CHAPITRE 3

# APPROFONDISSEMENT SUR L'APPROXIMATION PAR DES POLYNÔMES TRIGONOMÉTRIQUES

Il existe des polynômes trigonométriques liés aux séries de Fourier qui sont très intéressants sur le plan de l'approximation. Ces polynômes donnent des "noyaux".

### 3.1. Noyau de Dirichlet

Posons

$$D_n(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^n e^{ikx} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kx).$$

$D_n$  est appelé le noyau de Dirichlet. On utilise aussi le polynôme

$$\tilde{D}_n(x) = \sum_{k=1}^n \sin(kx).$$

**Lemme 3.1.1.** — Un calcul simple montre que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a

$$(18) \quad D_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$(19) \quad \tilde{D}_n(x) = \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$(20) \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx = 1$$

$$(21) \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{D}_n(x) dx = 0$$

Si  $S_n(f)(x)$  est la somme partielle de Fourier de rang  $n$  de la fonction  $f$  on a successivement

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx},$$

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^n \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \right) e^{ikx},$$

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^n \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{ik(x-t)} dt \right),$$

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{k=-n}^n e^{ik(t-x)} dt,$$

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t-x) dt.$$

Donc  $S_n(f)(x)$  est obtenu par convolution entre  $f$  et le noyau  $D_n$ . Malheureusement  $D_n$  n'est pas un noyau positif, et le comportement de  $S_n(f)(x) = f * D_n(x)$  n'est pas aussi bon qu'on aurait pu l'espérer si on avait eu une convolution avec un noyau positif. On sait par exemple qu'il existe des fonctions continues pour lesquelles la série de Fourier diverge en certains points.

### 3.2. Noyau de Fejér

Une idée qui va donner de bons résultats et d'appliquer aux sommes partielles de la série de Fourier la méthode de sommation de Césaro. On va commencer par appliquer cette méthode au noyau de Dirichlet, c'est-à-dire qu'on définit le **noyau de Fejér**

$$K_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(x).$$

**Lemme 3.2.1.** — *Un calcul simple montre que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a*

$$K_n(x) = \frac{1 - \cos(nx)}{4n \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2n} \left( \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right)^2,$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) dt = 1.$$

Soit la **somme de Fejér d'ordre  $n$**  de la fonction  $f$

$$\sigma_n(f)(x) = f \star K_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \star D_k(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_n(f)(x).$$

Ainsi

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_n(t-x) dt,$$

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) K_n(t) dt,$$

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(2t+x) K_n(2t) dt,$$

$$(22) \quad \sigma_n(f)(x) = \frac{1}{n\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(2t+x) \left( \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} \right)^2 dt$$

Le comportement des sommes de Fejér est bien meilleur que celui des sommes partielles de la série de Fourier. Plus précisément

**Théorème 3.2.2.** — *Soit  $f$  une fonction continue  $2\pi$ -périodique à valeurs complexes. Alors la suite des sommes de Fejér  $(\sigma_n(f)(x))_n$  converge uniformément vers  $f$ .*

*Démonstration.* —

$$|\sigma_n(f)(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{n\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(2t+x) \left( \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} \right)^2 dt - f(x) \right|.$$

Mais comme  $S_n(1_T)(x) = 1$  on a  $\sigma_n(1_T)(x) = 1$ , c'est-à-dire

$$\frac{1}{n\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} \right)^2 dt = 1,$$

si bien que

$$|\sigma_n(f)(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{n\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (f(2t+x) - f(x)) \left( \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} \right)^2 dt \right|,$$

et encore

$$|\sigma_n(f)(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |f(2t+x) - f(x)| \left( \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} \right)^2 dt.$$

Pour majorer cette dernière expression on découpe l'intervalle d'intégration en 3 morceaux

$$\begin{aligned} |\sigma_n(f)(x) - f(x)| &\leq \frac{1}{n\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\delta} |f(2t+x) - f(x)| \left( \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} \right)^2 dt + \\ &\quad \frac{1}{n\pi} \int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} |f(2t+x) - f(x)| \left( \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} \right)^2 dt + \\ &\quad \frac{1}{n\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |f(2t+x) - f(x)| \left( \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} \right)^2 dt. \end{aligned}$$

La fonction  $f$  étant continue  $2\pi$ -périodique est bornée, si bien qu'on peut écrire que

$$|f(2t+x) - f(x)| \leq 2 \sup |f(x)| = M.$$

Alors

$$\begin{aligned} |\sigma_n(f)(x) - f(x)| &\leq \frac{M}{n\pi} \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\delta} \left( \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} \right)^2 dt + \int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} \right)^2 dt \right) + \\ &\quad \frac{1}{n\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |f(2t+x) - f(x)| \left( \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} \right)^2 dt. \end{aligned}$$

Soit  $\epsilon > 0$ , grâce à la continuité uniforme de  $f$  on peut choisir  $\delta > 0$  tel que si  $|t| \leq \delta$  on ait

$$|f(2t+x) - f(x)| \leq \epsilon.$$

Dans ces conditions on a

$$\begin{aligned} |\sigma_n(f)(x) - f(x)| &\leq \frac{M}{n\pi} \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\delta} \left( \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} \right)^2 dt + \int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} \right)^2 dt \right) + \\ &\quad \frac{\epsilon}{n\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \left( \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} \right)^2 dt, \end{aligned}$$

ou encore

$$|\sigma_n(f)(x) - f(x)| \leq \frac{M}{n\pi} \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\delta} \left( \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} \right)^2 dt + \int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} \right)^2 dt \right) + \epsilon.$$

Maintenant que  $\delta$  est fixé, on va majorer les intégrales sur  $[-\frac{\pi}{2}, -\delta]$  et  $[\delta, \frac{\pi}{2}]$  en prenant  $n$  assez grand.

Il est suffisant d'étudier l'intégrale sur  $[\delta, \frac{\pi}{2}]$ . Dans ce cas,

$$\frac{1}{n\pi} \int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} \right)^2 dt \leq \frac{1}{n\pi} \int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2(t)} dt \leq \frac{\frac{\pi}{2} - \delta}{n\pi} \frac{1}{\sin^2(\delta)}.$$

Cette dernière expression prouve que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\pi} \int_{\delta}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} \right)^2 dt = 0,$$

ce qui achève la démonstration.  $\square$



# CHAPITRE 4

## CALCUL DES COEFFICIENTS DE FOURIER

### 4.1. La transformée de Fourier Discrète

**4.1.1. Introduction - Notations.** — Nous allons étudier les **signaux discrets périodiques**, c'est-à-dire les **fonctions** du groupe fini  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{C}$ .

Plus précisément, nous fixons un entier  $n > 1$ . Notons  $G$  le groupe additif  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

Nous allons nous intéresser à l'algèbre sur le corps des complexes  $\mathbb{C}$  de **toutes les fonctions de  $G$  dans  $\mathbb{C}$** . Nous noterons  $\mathcal{F}$  cet espace. Ce sera **l'espace des signaux**.

Voici la démarche que nous allons suivre et qui reproduit dans ce cas simple mais instructif ce qu'on fait habituellement dans le cas des signaux discrets (fonctions définies sur  $\mathbb{Z}$ ), dans le cas des signaux continus (définis sur  $\mathbb{R}$ ) ou des signaux continus périodiques (définis sur le tore  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ).

- **L'espace des signaux.** On présente l'espace  $\mathcal{F}$  ainsi que la **base des évaluations** dans laquelle les composantes d'une fonction sont ses images.
- **Les opérateurs de translation.** On regarde l'action du groupe des translations sur les signaux. En particulier l'étude des vecteurs propres des opérateurs de translation met en lumière l'intérêt des caractères du groupe  $G$ .

- **Les filtres stationnaires.** Nous appelons **filtre linéaire** un opérateur linéaire de l'espace  $\mathcal{F}$  des signaux. Un signal arrive à l'entrée du filtre (**signal d'entrée**) et en ressort (**signal de sortie**) transformé par un opérateur linéaire. Un filtre est dit **stationnaire** lorsque la forme du signal de sortie ne dépend que du signal d'entrée et non de l'instant où celui-ci est appliqué. Autrement dit si on translate le signal d'entrée  $f$  d'un temps  $t$ , le signal de sortie obtenu est le signal de sortie de  $f$  translaté du même temps  $t$ .
- **La convolution.** On introduit la notion d'opérateur de convolution et on montre que cette notion coïncide avec la notion de filtre stationnaire : un filtre est stationnaire si et seulement si c'est un opérateur de convolution.
- **La transformation de Fourier.** Nous étudions les filtres stationnaires et donc nous nous plaçons dans une base de vecteurs propres de ces opérateurs, c'est-à-dire la base des caractères. Les coefficients d'un signal dans cette base sont à un facteur multiplicatif constant près les coefficients de Fourier.
- **La transformation en  $Z$ .** C'est l'analogie discret de la **transformation de Laplace**. Dans ce cas particulier, nous considérons les valeurs prises par un signal  $f$  comme les coefficients d'un polynôme. Nous indiquons les liens entre transformation de Fourier et transformation de Laplace.
- **Les applications.** Nous faisons fonctionner ensemble les notions précédentes sur des exemples.

**4.1.2. L'espace  $\mathcal{F}$ .** — Il est immédiat de constater que l'espace  $\mathcal{F}$  des fonctions de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{C}$  possède les propriétés suivantes

**Théorème 4.1.1.** —  $\mathcal{F}$  est une algèbre commutative pour l'addition des fonctions " + ", la multiplication des fonctions "  $\times$  ", la multiplication d'une fonction par un scalaire "  $\cdot$  ".

Donnons tout d'abord un exemple important de fonction dans  $\mathcal{F}$ .

À tout élément  $a \in G$ , associons la fonction  $e_a$  définie par



$$e_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = a, \\ 0 & \text{si } x \neq a. \end{cases}$$

**Théorème 4.1.2.** — La famille  $(e_a)_{0 \leq a \leq n-1}$  est une base de  $\mathcal{F}$ . Ainsi  $\mathcal{F}$  est de dimension  $n$ . Toute fonction  $f \in \mathcal{F}$  se décompose sous la forme

$$f = \sum_{a=0}^{n-1} f(a)e_a.$$

*Démonstration.* — Supposons  $\sum_{a=0}^{n-1} \lambda_a e_a = 0$ . Alors en appliquant cette fonction nulle à un élément quelconque  $x \in G$  on trouve que

$$\sum_{a=0}^{n-1} \lambda_a e_a(x) = 0,$$

et donc  $\lambda_x = 0$ . Ceci montre que le système est libre.

Pour montrer que le système est générateur il suffit de vérifier que toute fonction  $f$  s'écrit sous la forme indiquée dans l'énoncé du théorème.  $\square$

Remarquons que quand on utilise la base précédente les composantes de  $f$  sont les images de  $f$ . Autrement dit, l'utilisation de la base  $(e_a)_{0 \leq a \leq n-1}$  revient à se donner  $f$  par la suite finie de ses images  $(f(e_a))_{0 \leq a \leq n-1}$ .

**4.1.3. Les opérateurs de translation sur  $\mathcal{F}$ .** — Pour tout  $h \in G$  on définit l'opérateur linéaire  $T_h$  de  $\mathcal{F}$  dans lui-même par

$$T_h(f)(x) = f(x + h).$$

Nous cherchons à étudier cet opérateur et en particulier ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

Remarquons que

$$T_h = (T_1)^h,$$

ce qui prouve que si  $\chi$  est un vecteur propre de  $T_1$ , c'est aussi pour tout  $h \in G$  un vecteur propre de  $T_h$ . On a donc pour tout  $x \in G$  et tout  $h \in G$

$$\chi(x+h) = \lambda_h \chi(x).$$

Remarquons tout d'abord qu'une fonction telle que  $f(0) = 0$  ne peut pas être un vecteur propre de  $T_1$ . En effet si  $f$  est vecteur propre alors

$$T_1(f)(x) = \lambda f(x),$$

c'est-à-dire

$$f(x+1) = \lambda f(x).$$

Si  $f(0) = 0$  par récurrence on montre alors que  $f(x) = 0$  pour tout  $x$  et donc que  $f = 0$  ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc tout vecteur propre est proportionnel à un vecteur propre  $\chi$  vérifiant  $\chi(0) = 1$ .

On a donc en supposant que  $\chi(0) = 1$  et en donnant à  $x$  la valeur 0

$$\chi(h) = \lambda_h,$$

et donc

$$\chi(x+h) = \chi(x)\chi(h).$$

**Définition 4.1.3.** — Les **caractères** de  $G$  sont les homomorphismes du groupe  $G$  dans le groupe multiplicatif  $\mathbb{C}^*$ , c'est-à-dire les fonctions  $\chi$  de  $G$  dans  $\mathbb{C}^*$  vérifiant

$$\chi(x+y) = \chi(x)\chi(y).$$

**Théorème 4.1.4.** — Les caractères de  $G$  sont les  $n$  fonctions  $\chi_u$  où  $u \in G$  définies par

$$\chi_u(v) = e^{\frac{2i\pi uv}{n}}.$$

*Démonstration.* — Dans  $G$  la somme  $1 + \dots + 1$  formée de  $n$  termes égaux à 1 est nulle. On en déduit que  $\chi(1)^n = \chi(0) = 1$ . Donc  $\chi(1)$  est une racine  $n$ ème de l'unité. Connaissant  $\chi(1)$  on peut calculer  $\chi(x)$  en écrivant  $x$  comme somme de  $x$  termes égaux à 1. Par suite  $\chi(x) = \chi(1)^x$ . Ceci prouve qu'un caractère est nécessairement de la forme annoncée. On vérifie rapidement que toute fonction de cette forme est un caractère.  $\square$

On pourra remarquer qu'en fait les caractères sont à valeurs dans le sous-groupe de  $\mathbb{C}^*$  constitué des nombres complexes de module 1. On peut

donc dire aussi que les caractères sont les homomorphismes du groupe  $G$  dans le groupe multiplicatif  $U$  des nombres complexes de module 1.

**Théorème 4.1.5.** — *Les caractères forment une base de  $\mathcal{F}$  constituée de vecteurs propres de  $T_h$ . La valeur propre de  $T_h$  associée au vecteur propre  $\chi_u$  est la racine nième de l'unité*

$$e^{\frac{2i\pi hu}{n}}.$$

**4.1.4. Les filtres stationnaires.** — Soit  $H$  un opérateur de  $\mathcal{F}$ . On suppose que cet opérateur est stationnaire c'est-à-dire que si on translate le signal d'entrée d'un temps  $t$  la sortie est tradlatée du même temps (autrement dit la forme du signal de sortie ne dépend pas de l'instant où on a envoyé le signal d'entrée). Ceci s'exprime en écrivant que

$$H(T_t(f)) = T_t(H(f)),$$

ou encore que

$$H \circ T_t = T_t \circ H.$$

Donc un opérateur  $H$  est stationnaire si et seulement s'il commute avec les opérateurs de translation.

Soit  $\chi$  un caractère et  $\lambda$  la valeur propre de  $T_1$  associée à  $\chi$ . Alors

$$T_1(H(\chi)) = H(T_1(\chi)) = H(\lambda\chi) = \lambda H(\chi).$$

Ceci prouve que ou bien  $H(\chi) = 0$ , ou bien  $H(\chi)$  est un vecteur propre de  $T_1$  associé à la valeur propre  $\lambda$ . Dans tous les cas on peut écrire  $H(\chi) = \mu\chi$ . Les caractères forment donc aussi une base de vecteurs propres de  $H$ .

Remarque :  $\mu = H(\chi)(0)$ .

Remarquons encore que  $H$ , qui commute avec  $T_1$ , peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$H = \sum_{i=0}^{n-1} a_i T_1^i.$$

Ceci est conséquence du théorème suivant

**Théorème 4.1.6.** — Soit  $T$  un opérateur à spectre simple d'un espace vectoriel de dimension finie  $n$  ( $T$  a  $n$  valeurs propres distinctes). Un opérateur  $H$  commute avec  $T$  si et seulement si  $H$  peut s'écrire sous la forme

$$H = \sum_{i=0}^{n-1} a_i T^i.$$

De plus dans ce cas cette écriture est unique.

*Démonstration.* — Il suffit d'une part de constater qu'un opérateur qui s'écrit sous cette forme commute avec  $T$ , d'autre part que si un opérateur commute avec  $T$  il s'écrit sous cette forme de manière unique. Il suffit de choisir une base de vecteurs propres de  $T$ , les matrices de  $T^i$  sont alors diagonales. En écrivant que  $H$  commute avec  $T$  on trouve aussi que dans cette base  $H$  est diagonale. En écrivant la relation cherchée, on trouve les coefficients  $a_i$  de manière unique en résolvant un système de Vandermonde.  $\square$

Ce théorème sur l'écriture d'un filtre stationnaire  $H$  nous permet d'énoncer le théorème suivant

**Théorème 4.1.7.** — L'espace des filtres stationnaires est de dimension  $n$ .

*Démonstration.* — Il suffit de constater que les  $T_1^i$  sont linéairement indépendants.

#### 4.1.5. Convolution et filtres stationnaires. —

**Définition 4.1.8.** — Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $\mathcal{F}$ . Le produit de convolution de  $f$  par  $g$  est la fonction  $f \star g \in \mathcal{F}$  définie par

$$f \star g(u) = \sum_{v+w=u} f(v)g(w).$$

Remarquons qu'on peut aussi écrire

$$f \star g(u) = \sum_{v \in G} f(v)g(u-v) = \sum_{v \in G} f(v)T_{-v}(g)(u).$$

On vérifie immédiatement le résultat suivant

**Théorème 4.1.9.** —  $\mathcal{F}$  muni de l'addition " + ", du produit de convolution "  $\star$  " et du produit par un scalaire "  $\cdot$  " est une algèbre commutative.

Fixons maintenant une fonction  $h \in \mathcal{F}$  et définissons l'opérateur  $H_h$  de  $\mathcal{F}$  par

$$H_h(f) = h \star f.$$

**Définition 4.1.10.** — Un opérateur du type  $H_h$  est appelé un **opérateur de convolution**.

**Théorème 4.1.11.** — Les opérateurs de convolution sont les filtres stationnaires. En particulier

$$T_u(f \star g) = f \star T_u(g).$$

De plus

$$h = H_h(e_0).$$

*Démonstration.* — Montrons tout d'abord qu'un opérateur de convolution est stationnaire.

$$\begin{aligned} T_u(H_h(f))(x) &= H_h(f)(u+x) = h \star f(u+x), \\ &= \sum_{v \in G} h(v)f(u+x-v) = \sum_{v \in G} h(v)T_u(f)(x-v), \\ &= h \star T_u(f)(x) = H_h(T_u(f))(x). \end{aligned}$$

Montrons maintenant que l'espace des opérateurs de convolution est aussi de dimension  $n$ . Ceci finira de prouver le théorème. Pour cela étudions le noyau de l'application linéaire de  $\mathcal{F}$  dans l'espace des opérateurs de convolution qui à tout  $h$  associe  $H_h$ . Supposons  $H_h = 0$ , c'est-à-dire  $h \star f = 0$  pour toute fonction  $f \in \mathcal{F}$ . Soit  $x$  fixé. Considérons la fonction  $f = e_0$ . Alors

$$h \star e_0(x) = \sum_{u+v=x} h(u)e_0(v) = h(x).$$

On en déduit  $h(x) = 0$  et ceci pour tout  $x$ .  $\square$

**Remarque :** Soit  $H$  un filtre stationnaire. Alors on sait que  $H$  se décompose de manière unique sous la forme

$$H = \sum_{i=0}^{n-1} a_i T_1^i.$$

Remarquons alors que

$$T_1(f) = e_{n-1} \star f, T_1^2(f) = e_{n-2} \star f, \dots, T_1^{n-1}(f) = e_1 \star f.$$

En conséquence

$$H(f) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i e_{n-i} \star f = \left( \sum_{i=0}^{n-1} a_i e_{n-i} \right) \star f.$$

Donc

$$h = \sum_{i=0}^{n-1} a_i e_{n-i},$$

et encore

$$h(u) = a_{-u}.$$

Enfin en utilisant l'égalité

$$e_u \star e_v = e_{u+v},$$

on déduit que

$$H(e_{-u})(0) = a_{-u} = h(u).$$

Regardons maintenant la matrice d'un opérateur de convolution  $H_h$  dans la base  $(e_a)_{a \in G}$ . Le coefficient  $h_{i,j}$  qui se trouve à la ligne  $0 \leq i \leq n-1$  et dans la colonne  $0 \leq j \leq n-1$  est la composante sur  $e_i$  de l'image de  $e_j$  autrement dit,

$$h_{i,j} = H_h(e_j)(i).$$

Donc,

$$h_{i,j} = h \star e_j(i) = \sum_{u+v=i} h(u) e_j(v) = h(i-j).$$

Cette matrice s'écrit

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} h(0) & h(n-1) & \cdots & h(1) \\ h(1) & h(0) & \cdots & h(2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h(n-1) & h(n-2) & \cdots & h(0) \end{pmatrix}.$$

C'est une matrice circulante. Les matrices circulantes sont les matrices des opérateurs de convolution (ou des filtres stationnaires).

**4.1.6. La structure hermitienne.** — Munissons maintenant  $\mathcal{F}$  du produit scalaire hermitien

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=0}^{n-1} f(i)\overline{g(i)}.$$

Nous allons montrer que les caractères forment une base orthogonale de  $\mathcal{F}$ .

Nous avons tout d'abord besoin d'un lemme

**Lemme 4.1.12.** — Soit  $\chi_u$  un caractère non trivial ( $u \neq 0$ ). Alors

$$\sum_{v \in G} \chi_u(v) = 0.$$

*Démonstration.* — Remarquons que

$$\chi_u(v) = \left( e^{\frac{2i\pi u}{n}} \right)^v,$$

et que de plus du fait que  $0 < u < n$  on a  $e^{\frac{2i\pi u}{n}} \neq 1$ . En conséquence

$$\sum_{v \in G} \chi_u(v) = \frac{1 - \left( e^{\frac{2i\pi u}{n}} \right)^n}{1 - e^{\frac{2i\pi u}{n}}} = 0. \quad \square$$

**Théorème 4.1.13.** — Les caractères forment une base orthogonale de  $\mathcal{F}$ . La norme de chaque caractère est  $\sqrt{n}$ .

*Démonstration.* — Nous devons montrer que

$$\langle \chi_u, \chi_v \rangle = \begin{cases} n & \text{si } u = v, \\ 0 & \text{si } u \neq v. \end{cases}$$

Pour cela écrivons successivement

$$\begin{aligned}\langle \chi_u, \chi_v \rangle &= \sum_{w \in G} \chi_u(w) \chi_v(-w) = \sum_{w \in G} \chi_w(u) \chi_w(-v), \\ \langle \chi_u, \chi_v \rangle &= \sum_{w \in G} \chi_w(u-v) = \sum_{w \in G} \chi_{u-v}(w).\end{aligned}$$

Le résultat attendu découle du lemme.  $\square$

**Définition 4.1.14.** — Soit  $f \in \mathcal{F}$ . Les **coefficients de Fourier** de  $f$  sont les produits scalaires  $\hat{f}(v) = \langle f, \chi_v \rangle$ . Ainsi

$$\hat{f}(v) = \sum_{u \in G} f(u) \overline{\chi_v(u)} = \sum_{u=0}^{n-1} f(u) e^{-\frac{2i\pi uv}{n}}.$$

La fonction  $\hat{f}$  qui est elle aussi dans  $\mathcal{F}$  est la **transformée de Fourier** de la fonction  $f$ .

**Remarque :** Bien que  $f$  et sa transformée de Fourier  $\hat{f}$  soient toutes deux des fonctions de  $\mathcal{F}$ , il n'est pas bon de considérer qu'elles sont dans le même espace.

Comme la base des caractères est orthogonale, les coefficients de Fourier sont à un facteur près les composantes de  $f$  sur la base des caractères. Plus précisément

**Théorème 4.1.15.** — La décomposition de  $f$  sur la base des caractères s'écrit

$$f(u) = \frac{1}{n} \sum_{v=0}^{n-1} \hat{f}(v) e^{\frac{2i\pi uv}{n}}.$$

**4.1.7. Étude plus complète de la transformation de Fourier discrète.** — Nous avons pour la transformation de Fourier les résultats suivants

**Théorème 4.1.16.** — La transformation de Fourier discrète est un isomorphisme de l'algèbre  $(\mathcal{F}, +, \star, \cdot)$  sur l'algèbre  $(\mathcal{F}, +, \times, \cdot)$ . Autrement dit

$$\begin{aligned}\widehat{f+g} &= \hat{f} + \hat{g}, \\ \widehat{\lambda \cdot f} &= \lambda \cdot \hat{f},\end{aligned}$$



$$\widehat{f \star g} = \hat{f} \times \hat{g},$$

$$\widehat{e_0} = \chi_0.$$

**Théorème 4.1.17.** — *L'inverse de la transformée de Fourier est donnée par la formule d'inversion*

$$f(u) = \frac{1}{n} \hat{f}(-u).$$

**Théorème 4.1.18.** — *On a aussi*

$$\widehat{f \times g} = \frac{1}{n} \hat{f} \star \hat{g},$$

$$\|\hat{f}\| = \sqrt{n} \|f\|.$$

Voici quelques exemples simples de transformées de Fourier

- $\hat{e}_u = \chi_{-u}$ .
- $\hat{\chi}_u = ne_u$ .

Revenons sur la matrice  $\mathcal{H}$  circulante de la section précédente. Cette matrice est la matrice dans la base  $(e_a)_{a \in G}$  de la convolution avec  $h$ . Nous savons que les  $(\chi_u)_{u \in G}$  forment une base de vecteurs propres. Les valeurs propres sont les

$$H(\chi_u)(0) = h \star \chi_u(0) = \sum_{v \in G} h(v) \chi_u(-v) = \hat{h}(u).$$

En conséquence

$$\det(\mathcal{H}) = \prod_{u=0}^{n-1} \hat{h}(u).$$

On a donc le théorème suivant

**Théorème 4.1.19.** — *Pour que l'opérateur stationnaire  $H$  soit inversible il faut et il suffit que la transformée de Fourier  $\hat{h}$  ne s'annule pas.*

Remarquons qu'on peut écrire

$$H(\chi_u) = \hat{h}(u) \chi_u.$$

La fonction  $\hat{h}$  est appelée la **fonction de transfert de  $H$** . Cette fonction est importante pour la description de la transformation  $H$ . En particulier si nous travaillons sur les transformations de Fourier alors

$$\widehat{H(f)} = \widehat{h * f} = \hat{h}\hat{f}.$$

**4.1.8. La transformation en  $Z$ .** — La transformation en  $Z$  est l'**analogue discret de la transformation de Laplace**.

Soit  $\mathcal{L}$  l'application de  $\mathcal{F}$  dans  $\mathbb{C}[Z]/(1 - Z^n)$  qui à toute fonction  $f = \sum_{u \in G} a_u e_u \in \mathcal{F}$  fait correspondre

$$\mathcal{L}(f)(Z) = \sum_{u \in G} a_u Z^{-u}.$$

En ce qui concerne les notations, nous noterons

$$P(Z) \equiv Q(Z) \quad (Z^n - 1)$$

lorsque les polynômes  $P(Z)$  et  $Q(Z)$  définissent le même élément de l'algèbre  $\mathbb{C}[Z]/(1 - Z^n)$ .

**Théorème 4.1.20.** — *La transformée en  $Z$  d'un produit de convolution est le produit des transformées en  $Z$*

$$\mathcal{L}(f \star g)(Z) \equiv \mathcal{L}(f)(Z)\mathcal{L}(g)(Z) \quad (Z^n - 1).$$

La transformation  $\mathcal{L}$  est un isomorphisme de l'algèbre  $(\mathcal{F}, +, \star, \cdot)$  sur l'algèbre  $(\mathbb{C}[Z]/(1 - Z^n), +, \times, \cdot)$  des polynômes modulo  $1 - Z^n$ .

La transformée en  $Z$  est liée à la transformation de Fourier grâce au théorème suivant

**Théorème 4.1.21.** — *Soit  $f \in \mathcal{F}$ . Alors pour tout  $u \in G$*

$$\hat{f}(u) = \mathcal{L}(f)(e^{\frac{2i\pi u}{n}}).$$

En conséquence le produit de deux polynômes modulo  $1 - Z^n$  peut se faire par transformation de Fourier discrète. Ceci est intéressant par le fait qu'il existe un algorithme rapide de calcul de transformation de Fourier discrète : la **transformée de Fourier rapide**.

**4.1.9. Applications.** — On dispose de trois algèbres isomorphes entre elles et on passe de l'une à l'autre en fonction du problème posé. Ces trois algèbres sont  $(\mathcal{F}, +, \star, \cdot)$ ,  $(\mathcal{F}, +, \times, \cdot)$  et  $(\mathbb{C}[Z]/(1-Z^n), +, \times, \cdot)$ .

Voici un premier exemple. L'opérateur  $T_1$  de translation est bien sur un opérateur de convolution

$$T_1(f) = e_{n-1} \star f.$$

En conséquence la transformée en  $Z$  associée est la multiplication par  $Z$ . Autrement dit

$$\mathcal{L}(T_1(f))(Z) \equiv Z\mathcal{L}(f)(Z) \quad (Z^n - 1).$$

L'opérateur  $\Delta$  défini par

$$\Delta(f)(u) = f(u+1) - f(u),$$

qui peut aussi s'exprimer par

$$\Delta = T_1 - I,$$

correspond à la multiplication par  $(Z - 1)$ .

Essayons de résoudre l'équation

$$H(f) = g,$$

ou encore

$$h \star f = g,$$

où  $h$  et  $g$  sont connues et  $f$  à trouver. Posons

$$P_h(Z) = \mathcal{L}(h)(Z), \quad P_g(Z) = \mathcal{L}(g)(Z), \quad P_f(Z) = \mathcal{L}(f)(Z).$$

On doit donc avoir

$$P_h(Z)P_f(Z) \equiv P_g(Z) \quad (Z^n - 1).$$

Notons  $G(Z) = \text{pgcd}(P_h(Z), Z^n - 1)$ . Si  $P_g(Z)$  n'est pas divisible par  $G(Z)$  il n'y a pas de solution. Sinon on est amené à chercher tous les polynômes  $P_f$  de degré  $\leq n - 1$  tels que

$$P_f(Z)P_1(Z) \equiv P_2(Z) \pmod{Q(Z)},$$

où

$$P_1(Z) = \frac{P_h(Z)}{G(Z)}, \quad P_2(Z) = \frac{P_g(Z)}{G(Z)}, \quad Q(Z) = \frac{Z^n - 1}{G(Z)}.$$

Maintenant,  $P_1(Z)$  et  $Q(Z)$  sont premiers entre eux. On peut donc inverser  $P_1(Z)$  modulo  $Q(Z)$  on obtient  $P'_1(Z)$  tel que

$$P_1(Z)P'_1(Z) \equiv 1 \pmod{Q(Z)}.$$

Les solutions sont donc les polynômes  $P_f$  de degré  $\leq n - 1$  de la forme

$$P_f(Z) = P'_1(Z).P_2(Z) + K(Z)Q(Z).$$

Prenons comme exemple pour  $H$  l'opérateur  $\Delta$  qui correspond à la multiplication par  $Z - 1$ . Alors  $\text{pgcd}(Z - 1, Z^n - 1) = (Z - 1)$ . Donc  $\Delta(f) = g$  n'a de solution que si  $P_g(Z)$  est divisible par  $Z - 1$ , c'est-à-dire si  $P_g(1) = 0$  ou encore  $\sum_{u=0}^{n-1} g(u) = 0$  (cette dernière somme est aussi  $\hat{g}(0)$ ). Dans ce cas on a

$$P_1(Z) = 1, \quad Q(Z) = 1 + Z + \dots + Z^{n-1},$$

donc

$$P_f(Z) = \frac{P_g(Z)}{Z - 1} + C(1 + Z + \dots + Z^{n-1}),$$

où  $C$  est une constante.

**Remarque :** La fonction  $h$  étant donnée, essayons de trouver  $f$  telle que

$$h \star f = 1.$$

D'après ce qu'on vient de voir il n'a de solution que si

$$\text{pgcd}(P_h(Z), Z^n - 1) = 1.$$

On retrouve ainsi la condition déjà énoncée au paragraphe 7 : pour que  $h$  soit inversible il faut et il suffit que la transformée de Fourier de  $h$  ne

s'annule pas, ce qui s'exprime ici en disant qu'aucune racine de l'unité n'annule  $P_h(Z)$ .

## 4.2. La transformée de Fourier Rapide

Il existe diverses façons proches les unes des autres de calculer une transformée de Fourier discrète. Toutes ces variantes sont des algorithmes de transformée de Fourier rapide (FFT). Nous nous placerons ici dans le cas où le nombre d'éléments du groupe est  $n = 2^m$  et où le groupe  $G$  est  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ . Pour tout  $r > 0$  et tout  $0 \leq k \leq 2^r - 1$  posons

$$W_{2^r}^k = e^{-\frac{2ik\pi}{2^r}}.$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} W_{2^r}^k &= (W_{2^{r+1}}^k)^2 = (W_{2^{r+1}}^{k+2^r})^2 \\ W_{2^{r+1}}^k &= -W_{2^{r+1}}^{k+2^r} \end{aligned}$$

par exemple

$$\begin{aligned} (W_8^3)^2 &= (W_8^7)^2 = W_4^3 \\ W_8^3 &= -W_8^7. \end{aligned}$$

On rappelle que si

$$f = (a_0, a_1, \dots, a_{2^m-1})$$

et si

$$P_f(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_{2^m-1}X^{2^m-1}$$

alors

$$\widehat{f}(u) = \widehat{a}_u = P_f(W_{2^m}^u).$$

Pour tout polynôme

$$P(X) = p_0 + p_1X + \dots + p_{2^r-1}X^{2^r-1}$$

notons

$$P_0(X) = p_0 + p_2X + \dots + p_{2^r-2}X^{2^{r-1}-1}$$

et

$$P_1(X) = p_1 + p_3X + \dots + p_{2^r-1}X^{2^{r-1}-1}$$

alors

$$P(X) = P_0(X^2) + XP_1(X^2)$$

ce qui donne si  $0 \leq k \leq 2^{r-1} - 1$

$$P(W_{2^r}^k) = P_0(W_{2^{r-1}}^k) + W_{2^r}^k P_1(W_{2^{r-1}}^k)$$

et

$$P(W_{2^r}^{k+2^{r-1}}) = P_0(W_{2^{r-1}}^k) - W_{2^r}^k P_1(W_{2^{r-1}}^k).$$

Ces dernières formules vont nous donner un algorithme pour calculer les valeurs de la transformée de Fourier.

Remarquons tout d'abord que si on a tabulé les valeurs de  $W_{2^m}^k$  alors on dispose aussi des valeurs de  $W_{2^r}^k$  pour tout  $r \leq m$ .

$W_8^0$	$W_8^1$	$W_8^2$	$W_8^3$	$W_8^4$ $-W_8^0$	$W_8^5$ $-W_8^1$	$W_8^6$ $-W_8^2$	$W_8^7$ $-W_8^3$
$W_4^0$		$W_4^1$		$W_4^2$ $-W_4^0$		$W_4^3$ $-W_4^1$	
$W_2^0$				$W_2^1$ $-W_2^0$			

**Pratique du calcul.** L'exemple  $m = 3$  est suffisamment instructif pour décrire l'algorithme. Remarquons que

$$\begin{aligned} P_{000}(X) &= a_0, P_{001}(X) = a_4, P_{010}(X) = a_2, P_{011}(X) = a_6 \\ P_{100}(X) &= a_1, P_{101}(X) = a_5, P_{110}(X) = a_3, P_{111}(X) = a_7. \end{aligned}$$

On commence donc par faire une permutation  $\sigma$  des éléments

$$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$$

pour les mettre dans l'ordre

$$a_0, a_4, a_2, a_6, a_5, a_3, a_7.$$

Ceci se fait facilement en remarquant qu'à chaque indice supposé écrit en binaire on fait correspondre l'indice obtenu en écrivant les bits dans l'ordre inverse. Ainsi l'indice  $4 = 100$  est transformé en  $1 = 001$ . la suite du calcul de la transformée de Fourier se fait en trois étapes indiquées par la figure 1 et à la fin on divise les coefficient obtenus par 8.

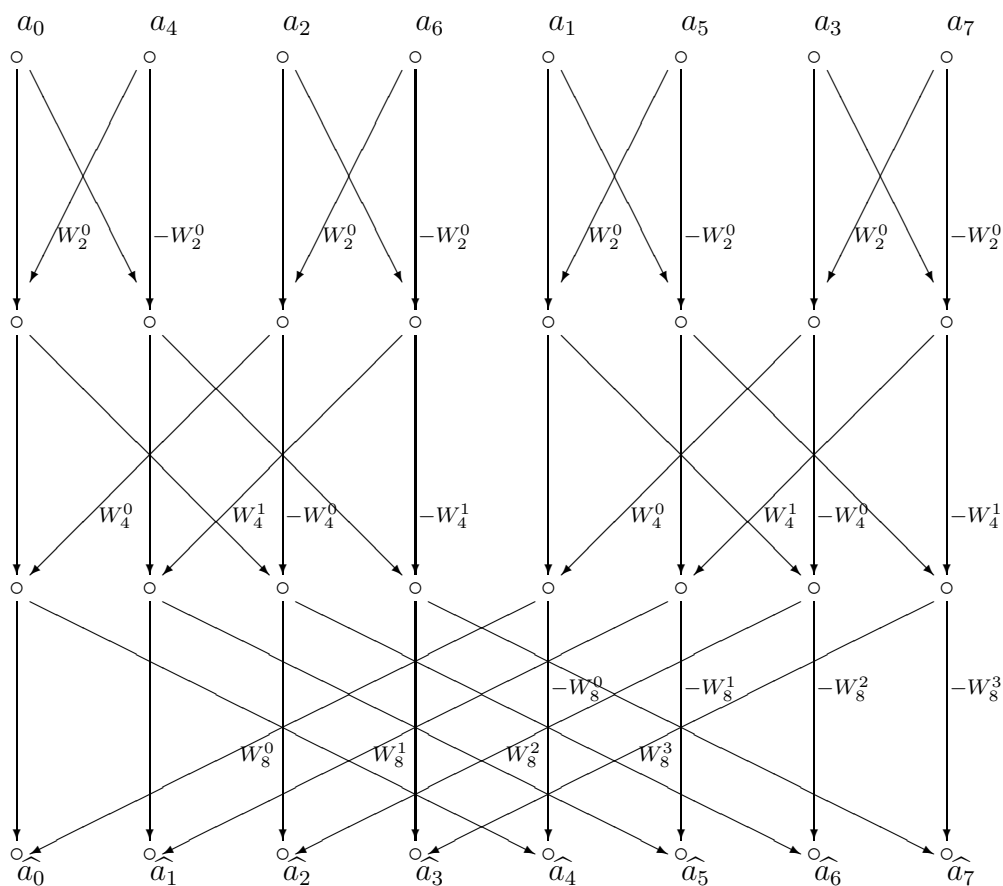


FIGURE 1. La FFT sur 8 points

Appelons  $M_8^1$ ,  $M_8^2$ ,  $M_8^3$  les matrices

$$M_8^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_8^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_8^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$S_1, S_2, S_3$  les matrices diagonales définies par

$$S_1 = \text{Diag}(1, W_2^0, 1, W_2^0, 1, W_2^0, 1, W_2^0)$$

$$S_2 = \text{Diag}(1, 1, W_4^0, W_4^1, 1, 1, W_4^0, W_4^1)$$

$$S_3 = \text{Diag}(1, 1, 1, 1, W_8^0, W_8^1, W_8^2, W_8^3)$$

et enfin  $\Sigma$  la matrice de la permutation "reverse bit"  $\sigma$ .

Dans ces conditions la matrice  $F_8$  de la transformation de Fourier sur 8 points s'écrit

$$F_8 = M_8^3 S_3 M_8^2 S_2 M_8^1 S_1 \Sigma.$$

Ceci se généralise facilement pour  $n = 2^m$ . Le nombre d'opérations à effectuer pour calculer cette transformation est de l'ordre de  $n \log(n)$ .



### 4.3. Approximation des coefficients de Fourier

Soit  $f$  une fonction d'une variable réelle périodique de période  $T$ . Nous supposons que  $f$  est développable en série de Fourier sous la forme

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{2i\pi k \frac{t}{T}}$$

les coefficients  $c_k(f)$  étant donnés par

$$c_k(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-2i\pi k \frac{t}{T}} dt.$$

Il nous faut calculer les coefficients  $c_k(f)$ . Pour cela on peut avoir deux idées suggérées par les deux formules précédentes. La première formule nous suggère d'interpoler la fonction  $f$  en un certain nombre de points par un polynôme trigonométrique, les coefficients de ce polynôme étant pris alors comme approximations des coefficients correspondants de la série de Fourier. La deuxième formule quant à elle nous incite à calculer l'intégrale du second membre par une méthode approchée. Dans les deux cas nous allons échantillonner le segment  $[0, T]$  en  $N$  intervalles de longueur  $\Delta T$ . Nous avons donc

$$N \cdot \Delta T = T$$

et nous définirons la fréquence d'échantillonnage par

$$F = \frac{1}{\Delta T}.$$

Les points de l'échantillonnage sont les points

$$t_s = s \cdot \Delta T.$$

En ces points la fonction  $f$  prend les valeurs

$$f(t_s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{2i\pi k \frac{s\Delta T}{T}}$$

ou encore

$$f(t_s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{2i\pi ks/N}.$$

Si nous voulons interpoler  $f$  aux points  $t_s$ ,  $s = 0, 1, \dots, N - 1$  par un polynôme trigonométrique, nous pouvons appliquer ce que nous savons sur la transformée de Fourier discrète. Ainsi nous pouvons écrire

$$f(t_s) = \sum_{k=0}^{N-1} C_k(f) e^{2i\pi ks/N}$$

où les coefficients  $C_k(f)$  sont obtenus à un coefficient  $1/N$  près par transformation de Fourier discrète

$$C_k(f) = \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} f(t_s) e^{-2i\pi ks/N}.$$

On remarque en passant que cette dernière formule n'est rien d'autre que l'approximation par la méthode des rectangles de l'intégrale qui donne le véritable coefficient de Fourier. On rejoint donc la deuxième idée dont nous parlions précédemment.

Remarquons que dans l'espace des temps nous avons une période  $T$  que nous avons échantillonnée grâce à un découpage en  $N$  segments de longueur  $\Delta T$ , ce qui nous donne une fréquence d'échantillonnage  $F = 1/\Delta T$ . L'espace des fréquences est échantillonné grâce à  $N$  intervalles de longueur  $\Delta F = 1/T$  ce qui nous donne une étendue de  $N \cdot \Delta F = F$  pour l'espace des fréquences et une fréquence d'échantillonnage de l'espace des fréquences de  $T$ . En résumé nous disposons des relations

$$T = N \cdot \Delta T$$

$$F = N \cdot \Delta F$$

$$F = 1/\Delta T$$

$$T = 1/\Delta F$$

$$TF = N.$$

Le problème qui se pose maintenant est de comparer le coefficient calculé  $C_k(f)$  avec le véritable coefficient  $c_k(f)$ . Pour cela repartons de la formule

$$f(t_s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{2i\pi ks/N}$$

qui en tenant compte de la périodicité s'écrit en supposant que la suite des coefficients de Fourier est sommable (ce qui est le cas si  $f$  est suffisamment régulière)

$$f(t_s) = \sum_{k=0}^{N-1} \left( \sum_{r=-\infty}^{+\infty} c_{k+rN}(f) \right) e^{2i\pi ks/N}$$

En comparant cette expression avec celle obtenue par interpolation et en vertu de l'unicité du polynôme trigonométrique d'interpolation de degré  $N - 1$  on obtient la formule de Poisson

$$C_k(f) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} c_{k+rN}(f)$$

ou encore

$$c_k(f) = C_k(f) - \sum_{r \neq 0} c_{k+rN}(f).$$

L'approximation sera donc acceptable si les coefficients de Fourier décroissent rapidement, ce qui est le cas si la fonction  $f$  est très régulière. Autrement dit l'approximation sera bonne si les hautes fréquences sont quasi-absentes du signal. Bien entendu si le signal est lui même un polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à  $N - 1$ , les  $c_k$  et les  $C_k$  coïncident (la formule d'approximation donne une valeur exacte).

Considérons un signal périodique de spectre borné (c'est-à-dire un polynôme trigonométrique). Supposons le spectre inclus dans l'intervalle  $[-S/2, S/2]$ . Alors le calcul envisagé est exact si le signal est échantillonné avec une fréquence  $F$  au moins égale à  $S$ .

Le lecteur pourra méditer sur l'inconvénient qui résulte de la non application de cette règle avec le contre exemple suivant :

On considère les deux fonctions  $\cos(2\pi t)$  et  $\cos(18\pi t)$ . On constate que ces deux fonctions coïncident pour les valeurs  $t = k/8$  (ce phénomène est appelé l'aliasing).



## CHAPITRE 5

# ANNEXE I : LE THÉORÈME D'APPROXIMATION UNIFORME DE WEIERSTRASS

### 5.1. Présentation du problème

Nous montrons essentiellement les deux versions suivantes du théorème de Weierstrass.

***Théorème 5.1.1.** — Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle fermé borné  $[a, b]$  à valeurs complexes. Il existe une suite de polynômes qui converge uniformément vers  $f$ .*

***Théorème 5.1.2.** — Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ ,  $2\pi$ -périodique, à valeurs complexes. Il existe une suite de polynômes trigonométriques qui converge uniformément vers  $f$ .*

Nous donnons sous forme d'exercices diverses démonstrations de ces résultats. En particulier nous insistons sur l'importance de la notion de noyau positif. Nous terminons en donnant une version améliorée de ces résultats, exprimée en terme d'opérateurs positifs (Théorème de Bohman, Korovkin et Popoviciu).

### 5.2. La démonstration élémentaire d'Henri Lebesgue

**5.2.1. Approximation de  $|x|$ .** — **Exercice 1 (Méthode 1)** Soit  $x$  un élément du segment  $[-1, 1]$ . Posons  $u = 1 - x^2$ , donc  $|x| = \sqrt{1 - u}$ . En conclure que la fonction  $f(x) = |x|$  est sur  $[-1, 1]$  limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

**Exercice 2 (Méthode 2)** Définissons une suite de fonctions polynomiales à coefficients réels par

$$\begin{cases} P_0(x) = 0 \\ P_n(x) = P_{n-1}(x) + \frac{1}{2} (x - P_{n-1}^2(x)) \quad \text{pour } n \geq 1 \end{cases}$$

Montrer que la suite  $P_n$  converge uniformément sur  $[0, 1]$  vers  $\sqrt{x}$ .

En conclure que  $|x|$  est sur  $[-1, 1]$  limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

### 5.2.2. La méthode de Lebesgue. —

**Exercice 3** Soit  $C[0, 1]$  l'espace des fonctions continues sur  $[0, 1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , muni de la norme uniforme. Soit  $\mathcal{A}$  le sous espace de  $C[0, 1]$  constitué des fonctions continues affines par morceaux.

a) Montrer que  $\overline{\mathcal{A}} = C[0, 1]$ .

b) Montrer que les fonctions constantes et les fonctions du type  $(x - a + |x - a|)$  forment un système générateur pour  $\mathcal{A}$ .

c) Soit  $\mathcal{P}$  le sous espace des fonctions polynomiales de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $\overline{\mathcal{P}} = C[0, 1]$

d) Soit  $[a, b]$  un intervalle fermé borné de  $\mathbb{R}$ , montrer que tout élément de  $C[a, b]$  (espace des fonctions continues de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ ) est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

e) Démontrer un résultat analogue pour  $C_{\mathbb{C}}[a, b]$ , espace des fonctions continues de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{C}$ .

### 5.3. Les noyaux positifs

**Exercice 4** Soit

$$I_{\delta}(x) = \{y \mid 0 \leq y \leq 1 \text{ et } |x - y| \geq \delta\}$$

Soit  $(K_n)_n$  une suite de fonctions de deux variables réelles à valeurs réelles telles que

a) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a

$$\int_0^1 K_n(x, y) dy = 1 \quad n = 1, 2, \dots$$

b) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{I_\delta(x)} K_n(x, y) dy = 0 \quad \delta > 0$$

c) Les  $K_n$  sont positifs,

$$K_n(x, y) \geq 0 \quad n = 1, 2, \dots$$

Soit  $f$  une fonction continue à valeurs complexes sur  $[0, 1]$ . Définissons

$$A_n(f)(x) = \int_0^1 K_n(x, y) f(y) dy.$$

Montrer que pour tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(f)(x) = f(x)$$

et que si dans l'hypothèse b) la convergence est uniforme par rapport à  $x$  alors  $A_n(f)$  converge uniformément vers  $f$ .

**Exercice 5** Soit  $[a, b]$  un segment tel que  $a < 0 < b$ . On considère une suite  $(\phi_n)_n$  de fonctions réelles intégrables sur  $[a, b]$  satisfaisant à

a) Pour tout entier  $n > 0$  on a

$$\int_a^b \phi_n(t) dt = 1$$

b) Pour tout  $\eta > 0$  tel que  $[-\eta, \eta] \subset [a, b]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_a^{-\eta} \phi_n(t) dt + \int_\eta^a \phi_n(t) dt \right) = 0$$

c) Pour tout entier  $n > 0$  on a

$$\phi_n \geq 0.$$

Etant donnée une fonction  $f$  continue sur  $\mathbb{R}$  on pose

$$\phi_n \star f(x) = \int_a^b f(x-t) \phi_n(t) dt.$$

Montrer que la suite  $(\phi_n \star f)_n$  converge uniformément vers  $f$  sur tout compact.

**Exercice 6** Soit  $f$  une fonction continue périodique de période  $2\pi$ . On pose

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt,$$

puis

$$S_n(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)),$$

et

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(f)(x).$$

Montrer que

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt$$

et que

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{n\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x+2t) \left(\frac{\sin(nt)}{\sin(t)}\right)^2 dt.$$

Montrer que  $\sigma_n(f)(x)$  converge uniformément vers  $f(x)$  (théorème de Fejér).

**Exercice 7** Posons (noyau de Landau)

$$Q_n(x) = \begin{cases} c_n(1-x^2)^n & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \text{ ou } x < -1 \end{cases}$$

où  $c_n$  est choisi de telle sorte que

$$\int_{-1}^1 Q_n(x) dx = 1.$$

Montrer que si  $x \in [0, 1]$  alors

$$(1-x^2)^n \geq 1-nx^2,$$

puis que

$$c_n \leq \sqrt{n}.$$



Soit  $f$  une fonction continue sur  $[0, 1]$  telle que  $f(0) = f(1) = 0$ . Étudier

$$Q_n \star f(x) = \int_0^1 f(t)Q_n(x-t)dt$$

où  $x \in [0, 1]$ . En conclure le théorème de Weierstrass.

**Exercice 8** Soit  $f$  une fonction continue sur  $[0, 1]$ . Posons (polynômes de Bernstein)

$$B_n(f)(x) = \sum_{p=0}^n C_n^p f\left(\frac{p}{n}\right) (1-x)^{n-p} x^p.$$

On se propose de montrer que la suite  $(B_n(f))_{n \geq 1}$  converge uniformément vers  $f$ .

a) Posons  $r_p(x) = C_n^p (1-x)^{n-p} x^p$ , montrer que

$$\sum_{p=0}^n r_p(x) = 1,$$

$$\sum_{p=0}^n p r_p(x) = nx,$$

$$\sum_{p=0}^n p(p-1) r_p(x) = n(n-1)x^2.$$

(On pourra utiliser le développement de  $(x+y)^n$ ).

b) Calculer

$$\sum_{p=0}^n (p-nx)^2 r_p(x).$$

c) On sait que  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$  t.q.  $|x-x'| \leq \delta$  implique  $|f(x) - f(x')| \leq \epsilon$ .

On étudiera alors la somme

$$\sum_{p=0}^n \left( f(x) - f\left(\frac{p}{n}\right) \right) r_p(x)$$

en la décomposant en deux suivant que  $|p-nx| \leq \delta n$  ou que  $|p-nx| > \delta n$  et on conclura.

### 5.4. Les opérateurs positifs

**Exercice 9** Soit  $K$  un espace topologique compact et  $C(K)$  l'espace des fonctions continues sur  $K$  à valeurs réelles normé par

$$\|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

Soit  $T$  un opérateur linéaire de  $C(K)$  dans lui-même tel que

$$\forall f \in C(K), f > 0 \implies T(f) \geq 0.$$

On dit alors que  $T$  est un opérateur positif.

Montrer que  $T$  est un opérateur continu et que

$$\|T\| = \|1_K\|,$$

où  $1_K$  est la fonction constante valant 1 sur  $K$ .

**Exercice 10** Soit  $B_n$  l'opérateur de  $C[0, 1]$  dans lui-même défini par

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Calculer  $\|B_n\|$ .

**Exercice 11** Soit  $f$  une fonction continue périodique de période  $2\pi$ . On reprend les notations de l'exercice 6. La fonction  $f$  peut être considérée comme élément de  $C^* = C(T)$  où  $T$  est le tore  $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ . On définit donc sur  $C^*$  l'opérateur  $S_n$  par

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t-x) dt$$

avec

$$D_n(t) = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

(noyau de Dirichlet)

et l'opérateur  $\sigma_n$  par

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_n(t-x) dt$$

avec

$$K_n(t) = \frac{1}{2n} \left( \frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right)^2$$

a) Montrer que  $\sigma_n$  est un opérateur positif et que  $\|\sigma_n\| = 1$ .

b) Montrer que pour tout  $n$ ,  $S_n$  n'est pas un opérateur positif. Montrer que

$$\|S_n\| = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt = \frac{4}{\pi^2} \log(n) + O(1).$$

Un nombre  $x$  étant fixé, calculer la norme de la forme linéaire  $S_n^x$  sur  $C^*$  définie par

$$S_n^x(f) = S_n(f)(x).$$

**Exercice 12** (Théorème de Bohman, Korovkin et Popoviciu)

Soit  $K$  un espace topologique compact possédant au moins deux points et  $C(K)$  l'espace des fonctions continues sur  $K$  à valeurs réelles normé par

$$\|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

Soient  $f_1, f_2, \dots, f_m$  des éléments de  $C(K)$  vérifiant la propriété

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } m \text{ fonctions continues réelles} \\ a_1, a_2, \dots, a_m \text{ définies sur } K, \text{ telles que la fonction} \\ Q(x, y) = \sum_{i=1}^m a_i(y) f_i(x) \text{ satisfasse à} \\ \\ a) Q(x, y) \geq 0 \\ b) Q(x, y) = 0 \iff x = y. \end{array} \right.$$

Soit  $L_n$  une suite d'opérateurs positifs de  $C(K)$  dans lui-même vérifiant :

pour tout  $i (i = 1, \dots, n)$  la suite  $(L_n(f_i))_n$  converge vers  $f_i$  dans  $C(K)$ .

Le but du problème est de démontrer que dans ces conditions pour toute fonction  $f \in C(K)$  la suite  $(L_n(f))_n$  converge vers  $f$ .

**Partie I.** Soit  $E$  le sous-espace vectoriel de  $C(K)$  engendré par  $f_1, f_2, \dots, f_m$ .

a) Montrer que si  $f \in E$  la suite  $(L_n(f))_n$  converge vers  $f$ .

b) Montrer qu'il existe  $g \in E$  tel que pour tout  $x \in K$  on ait  $g(x) > 0$ .

Soit  $y$  fixé dans  $K$ . On note  $Q_y$  la fonction définie par  $Q_y(x) = Q(x, y)$ . On note  $\phi_n$  la fonction définie par  $\phi_n(y) = L_n(Q_y)(y)$ .

c) Montrer que la suite  $(\phi_n)_n$  converge uniformément vers 0.

d) Montrer qu'il existe  $M_0 > 0$  tel que pour tout  $n$  on ait  $\|L_n(1_K)\| \leq M_0$  où  $1_K$  est la fonction constante valant 1.

**Partie II.** Soit  $F$  un élément de  $C(K \times K)$ . Si  $y \in K$  notons  $F_y$  la fonction définie par  $F_y(x) = F(x, y)$ . Supposons en outre que  $F(x, x) = 0$  pour tout  $x \in K$ .

a) Soit  $\epsilon > 0$  montrer qu'il existe un compact  $A \subset K \times K$  tel que

$$(x, y) \notin A \implies |F(x, y)| \leq \epsilon,$$

$$m = \inf_{(x, y) \in A} Q(x, y) > 0.$$

Notons alors

$$M = \sup_{(x, y) \in A} |F(x, y)|.$$

b) Montrer que pour tout couple  $(x, y) \in K \times K$  on a

$$|F(x, y)| \leq \epsilon + \frac{M}{m} Q(x, y).$$

c) En conclure qu'il existe un entier  $N$  tel que  $\forall n \geq N, \forall y \in K$  on ait

$$|L_n(F_y)(y)| \leq (M_0 + 1)\epsilon.$$

**Partie III.** Soit  $f$  un élément de  $C(k)$ . On pose

$$F(x, y) = f(x) - \frac{f(y)}{g(y)}g(x).$$

En utilisant les résultats précédents, montrer que la suite  $(L_n(f))_n$  converge vers  $f$ .

**Applications.**

a) On prend  $K = [0, 1]$ ,  $m = 3$ ,  $f_1 = 1_K$ ,  $f_2 = x$ ,  $f_3 = x^2$ . on vérifiera avec  $Q(x, y) = (y - x)^2$  que ce système satisfait bien à la condition (1). On prend  $L_n = B_n$  (opérateur de Bernstein). Retrouver ainsi les résultats de l'exercice 8.

b) On prend  $K = T = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ ,  $m = 3$ ,  $f_1 = 1_K$ ,  $f_2 = \cos(x)$ ,  $f_3 = \sin(x)$ . On vérifiera avec  $Q(x, y) = 1 - \cos(x - y)$  que ce système satisfait bien à la condition (1). On prend  $L_n = \sigma_n$  (opérateur de Fejér). Retrouver ainsi les résultats de l'exercice 6.