

---

# EXEMPLE DE LÉOPOLD FEJÉR

*par*

Robert Rolland

---

**Résumé.** — Paul Du Bois-Reymond a donné en 1873 un exemple de fonction continue périodique dont la série de Fourier diverge au point 0. L'exemple suivant donné par Léopold Fejér dans [1] est très simple. Il est basé sur la sommation par blocs d'une série de Fourier bien choisie.

## 1. Préliminaires

**1.1. But de ce paragraphe préliminaire.** — Le but de ce paragraphe est de rappeler les propriétés de la série de Fourier :

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n},$$

qui constitue un exemple fondamental, notamment pour l'étude de la convergence ponctuelle des séries de Fourier. Nous fixerons aussi dans ce paragraphe les notations générales utilisées. Les démonstrations des résultats généraux sur les séries de Fourier se trouvent dans [2].

**1.2. Notations.** — Les notations utilisées sont celles de [2]. En particulier, si  $f$  est une fonction périodique de période  $2\pi$  qui est dans  $L^1([0, 2\pi])$ , on pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$(2) \quad a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt,$$

$$(3) \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt.$$

**Définition 1.1.** — Les coefficients  $a_n(f)$  et  $b_n(f)$  sont les **coefficients de Fourier trigonométriques** de  $f$ .

À partir de ces coefficients de Fourier on définit la **série de Fourier** de  $f$  par :

$$S[f] = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f) \cos(nt) + b_n(f) \sin(nt)).$$

Nous noterons :

$$S_N(f)(t) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n(f) \cos(nt) + b_n(f) \sin(nt))$$

la somme partielle de rang  $N$  de la série de Fourier de  $f$ .

**1.3. Un exemple fondamental.** — Les résultats concernant la série de Fourier (1) sont énoncés dans le théorème suivant :

**Théorème 1.2.** — Soit  $S$  la série de Fourier  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ . Alors cette série vérifie :

(1)  $S$  est la série de Fourier  $S[\phi]$  de la fonction  $\phi$  périodique de période  $2\pi$  qui vaut :

$$\phi(x) = \frac{\pi - x}{2}$$

sur l'intervalle semi-ouvert  $[0, 2\pi[$  et prolongée par périodicité sur tout  $\mathbb{R}$ ;

(2)  $S$  converge vers  $\phi(x)$  pour tout  $x \neq 2k\pi$  et vers 0 pour tout  $x = 2k\pi$ ;

(3)  $S$  converge uniformément vers  $\phi$  sur tout intervalle fermé de  $\mathbb{R}$  qui ne contient aucun point de la forme  $2k\pi$ ;

(4) les sommes partielles  $S_N(\phi)(x)$  de la série de Fourier  $S = S[\phi]$  sont uniformément bornées, c'est-à-dire qu'il existe une constante  $C$  telle que  $\forall N, \forall x$ , on ait :

$$|S_N(\phi)(x)| \leq C.$$

La démonstration de ce théorème se trouve dans [2].

## 2. Une famille pathologique de polynômes trigonométriques

Soient  $n$  et  $N$  deux entiers tels que :

$$0 < n < N.$$

Définissons le polynôme trigonométrique :

$$Q(x, N, n) = 2 \sin(Nx) \sum_{s=1}^n \frac{\sin(sx)}{s}.$$

Le théorème suivant est une conséquence directe du théorème 1.2 :

**Théorème 2.1.** — *La famille des polynômes  $Q(x, N, n)$  est uniformément bornée, c'est-à-dire qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que :*

$$\forall N, \forall n, \forall x, |Q(x, N, n)| \leq C.$$

*Démonstration.* — En majorant  $|\sin(Nx)|$  par 1, on obtient :

$$|Q(x, N, n)| \leq 2 \left| \sum_{s=1}^n \frac{\sin(sx)}{s} \right|.$$

Le théorème 1.2 affirme que la somme intervenant dans le second membre de l'inégalité précédente est uniformément bornée, ce qui permet de conclure.  $\square$

En utilisant la formule trigonométrique :

$$2 \sin(Nx) \sin(sx) = \cos((N - s)x) - \cos((N + s)x),$$

on obtient :

$$Q(x, N, n) = \frac{\cos((N-n)x)}{n} + \frac{\cos((N-n+1)x)}{n-1} + \dots + \frac{\cos((N-1)x)}{1} - \frac{\cos((N+1)x)}{1} - \dots - \frac{\cos((N+n-1)x)}{n-1} - \frac{\cos((N+n)x)}{n}.$$

Si on ne considère que la première partie du polynôme trigonométrique  $Q(x, N, n)$ , qu'on notera  $Q_1(x, N, n)$  :

$$Q_1(x, N, n) = \frac{\cos((N-n)x)}{n} + \frac{\cos((N-n+1)x)}{n-1} + \dots + \frac{\cos((N-1)x)}{1}$$

on voit que :

$$Q_1(0, N, n) = \sum_{s=1}^n \frac{1}{s} > \ln(n).$$

Ce polynôme contient donc en germe un comportement pathologique apte à nous aider à construire des "mauvaises" séries de Fourier.

### 3. Exemple de Fejér

Soient  $(N_k)_{k \geq 1}$  et  $(n_k)_{k \geq 1}$  deux suites d'entiers telles que :

- (1)  $0 < n_k < N_k$
- (2)  $N_k + n_k < N_{k+1} - n_{k+1}$

Nous noterons  $I_k$  l'intervalle d'entiers :

$$I_k = \{N_k - n_k, \dots, N_k + n_k\}.$$

Les intervalles  $I_k$  sont deux à deux disjoints, nous noterons :

$$I = \cup_{k=1}^{+\infty} I_k.$$

Par ailleurs, soit  $(\alpha_k)_{k \geq 1}$  une suite telle que :

- (1)  $\forall k, \alpha_k > 0$
- (2)  $\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k < +\infty$ .

Considérons alors la série :

$$(4) \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k Q(x, N_k, n_k).$$

**Proposition 3.1.** — *Cette série converge uniformément vers une fonction continue  $f$ .*

*Démonstration.* — La convergence uniforme découle immédiatement du fait que les  $Q(x, N_k, n_k)$  sont uniformément bornés et que la série de terme général positif  $\alpha_k$  est convergente. Comme les  $Q(x, N_k, n_k)$  sont des polynômes trigonométriques, donc des fonctions continues, et que la convergence de la série est uniforme, la somme  $f$  est continue.  $\square$

**Proposition 3.2.** — *La série de Fourier de  $f$  s'exprime sous la forme :*

$$S[f] = \sum_{r=1}^{+\infty} a_r \cos(rt)$$

o :

$$a_r = \begin{cases} 0 & \text{si } s \notin I \\ \frac{\alpha_k}{s} & \text{si } r = N_k - s, 1 \leq s \leq n_k \\ -\frac{\alpha_k}{s} & \text{si } r = N_k + s, 1 \leq s \leq n_k \end{cases}$$

*Démonstration.* — La définition des coefficients de Fourier de  $f$  et la convergence uniforme de la série (4) nous permet d'écrire que :

$$a_r = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(rt) dt = \lim_{M \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^M \frac{\alpha_k}{\pi} \int_0^{2\pi} Q(t, N_k, n_k) \cos(rt) dt,$$

$$b_r = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(rt) dt = \lim_{M \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^M \frac{\alpha_k}{\pi} \int_0^{2\pi} Q(t, N_k, n_k) \sin(rt) dt.$$

Comme  $Q(t, N_k, n_k)$  est un polynôme en cosinus,

$$\int_0^{2\pi} Q(t, N_k, n_k) \sin(rt) dt = 0,$$

donc  $b_r = 0$ . Dans le cas des  $a_r$  la seule contribution non nulle peut provenir d'un terme

$$\int_0^{2\pi} Q(t, N_k, n_k) \cos(rt) dt$$

pour lequel le polynôme trigonométrique  $Q(t, N_k, n_k)$  aurait un terme en  $\cos(rt)$ . Ceci donne le résultat annoncé.  $\square$

**Proposition 3.3.** — *La série de Fourier de la fonction continue  $f$  diverge au point 0.*

*Démonstration.* — Remarquons que compte tenu de la proposition 3.2 :

$$|S_{N_k-1}(f)(0) - S_{N_k-n_k}(f)(0)| = \alpha_k \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n_k-1} \right),$$

et donc :

$$|S_{N_k-1}(f)(0) - S_{N_k-n_k}(f)(0)| > \alpha_k \ln(n_k).$$

Si on prend :

$$\alpha_k = \frac{1}{k^2}, n_k = \frac{N_k}{2} = 2^{k^3},$$

alors toutes les contraintes imposées aux  $\alpha_k, N_k, n_k$  sont réalisées et de plus :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \alpha_k \ln(n_k) = +\infty.$$

La suite des sommes partielles de la série de Fourier de  $f$  au point 0 n'est pas une suite de Cauchy et donc diverge.  $\square$

### Références

- [1] **Léopold Fejér** *Sur les singularités de la série de Fourier des fonctions continues* Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série, tome 28 (1911), p. 63-104.
- [2] **Robert Rolland** *Les séries de Fourier* Document de travail version 2

---

23 Février 2006

R. ROLLAND, Institut de Mathématiques de Luminy, Case 907, 13288 Marseille cedex 9., • *E-mail* : rolland@iml.univ-mrs.fr