THÉORÈME DE BANACH-STEINHAUS ET SÉRIES DE FOURIER NON CONVERGENTES

par

Robert Rolland

Résumé. — Pour montrer l'existence d'une fonction continue périodique dont la série de Fourier diverge en un point on peut construire explicitement des exemples ou alors, montrer l'existence d'une telle pathologie de manière non constructive, par des arguments d'analyse fonctionnelle. La première voie a été suivie par Paul Du Bois-Reymond qui le premier a donné en 1873 un exemple de fonction continue périodique dont la série de Fourier diverge au point 0. Par la suite, Léopold Fejér a construit un exemple très simple. La deuxième méthode utilise la théorie de Baire, et plus particulièrement le théorème de Banach-Steinhaus encore appelé "principe de condensation des singularités".

1. Préliminaires

1.1. But de ce paragraphe préliminaire. — Le but de ce paragraphe est de rappeler les définitions élémentaires habituelles de la théorie des séries de Fourier, et de définir les opérateurs à base de noyaux attachés à ces objets.

1.2. Notations. — Soit $T = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ le tore. Notons $C(T)$ l'espace de Banach des fonctions continues sur T muni de la norme de la convergence uniforme :

$$\|f\| = \sup_{t \in T} |f(t)|,$$

qu'on peut voir aussi comme l'espace des fonctions continues sur $[0, 2\pi]$ telles que $f(0) = f(2\pi)$ muni de la norme :

$$\|f\| = \sup_{t \in [0,2\pi]} |f(t)|.$$

Les notations utilisées sont celles de [**2**]. En particulier, si $f \in C(T)$ on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt, \tag{1}$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt, \tag{2}$$

et pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt. \tag{3}$$

Définition 1.1. — Les coefficients $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont les **coefficients de Fourier trigonométriques** de f, les coefficients c_n sont les **coefficients de Fourier exponentiels**.

À partir de ces coefficients de Fourier on définit la **série de Fourier** de f par :

$$S[f] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{int} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n(f) \cos(nt) + b_n(f) \sin(nt)\right).$$

Nous noterons :

$$S_N(f)(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e^{int} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n(f) \cos(nt) + b_n(f) \sin(nt)\right)$$

la somme partielle de rang N de la série de Fourier de f.

1.3. Noyau de Dirichlet. — Il existe des polynômes trigonométriques liés aux séries de Fourier qui sont très intéressants sur le plan de l'approximation. Ces polynômes donnent des "noyaux". Nous nous intéressons ici au noyau de Dirichlet qui est intimement lié aux sommes partielles des séries de Fourier. Hélas ce noyau n'est pas un noyau positif, ce qui explique le mauvais comportement, du point de vue de la convergence ponctuelle, des séries de Fourier. Posons :

$$D_n(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx).$$

Définition 1.2. — La fonction D_n est appelée le **noyau de Dirichlet**.

Un calcul simple montre que :

Lemme 1.3. — *Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ on a :*

$$D_n(x) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \tag{4}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)dx = 1 \tag{5}$$

Si $S_n(f)(x)$ est la somme partielle de rang n de la série de Fourier de la fonction f on a successivement :

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx},$$

où :

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt\right) e^{ikx},$$

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{ik(x-t)}dt\right),$$

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(t-x)}dt,$$

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t-x)dt.$$

En conséquence nous pouvons énoncer :

Théorème 1.4. — *La somme partielle $S_n(f)(x)$ de la série de Fourier de la fonction f est obtenu par convolution entre f et le noyau D_n.*

Malheureusement D_n n'est pas un noyau positif, et le comportement de $S_n(f)(x) = f * D_n(x)$ n'est pas aussi bon qu'on aurait pu l'espérer si on avait eu une convolution avec un noyau positif (cf. [**2**]). C'est bien là le fond du problème.

2. Applications linéaires liées aux sommes partielles des séries de Fourier

Soit T_n l'application linéaire de l'espace $C(T)$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) définie par :

$$T_n(f) = S_n(f)(0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t)dt.$$

On peut montrer facilement que :

Théorème 2.1. — *L'application linéaire T_n est continue et sa norme est donnée par :*

$$\|T_n\| = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right| dt = \frac{4}{\pi^2}\ln(n) + O(1).$$

3. Exemple d'une fonction continue périodique dont la série de Fourier diverge en un point

3.1. Le théorème de Banach-Steinhaus. — Nous rappelons ici sans démonstration le théorème de Banach-Steinhaus, qui découle du théorème de Baire.

Théorème 3.1 **(Banach-Steinhaus)**. — *Soit B un espace de Banach, F un espace vectoriel normé. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'applications linéaires continues de B dans F. On suppose que pour tout x de B on ait :*

$$\sup_{i\in I}\|T_i(x)\| < +\infty.$$

Alors :

$$\sup_{i\in I}\|T_i\| < +\infty.$$

3.2. Application à l'exemple en vue. — Supposons que pour toute fonction $f \in C(T)$ la série de Fourier de f soit convergente en tout point, en particulier au point 0. On aurait alors :

$$\lim_{n \to +\infty} S_n(f)(0) = l \in \mathbb{C},$$

soit encore :

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n(f)(0)| < +\infty,$$

c'est-à-dire :

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |T_n(f)| < +\infty.$$

Le théorème de Banach-Steinhaus nous permettrait donc d'affirmer que :

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| < +\infty,$$

ce qui est contradictoire avec l'évaluation de ces normes donnée par le théorème 2.1

Références

[1] **Léopold Fejér** *Sur les singularités de la série de Fourier des fonctions continues* Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 28 (1911), p. 63-104.

[2] **Robert Rolland** *Les séries de Fourier* Document de travail version 2

23 Février 2006

R. ROLLAND, Institut de Mathématiques de Luminy, Case 907, 13288 Marseille cedex 9., • *E-mail :* rolland@iml.univ-mrs.fr