Robert Rolland

Théorie élémentaire de la mesure et de l'intégration.

Table des matières.

Chapitre I.

Evolution de la notion d'intégrale.

1.1. Intégrale de Cauchy.

Avant les travaux du mathématicien français A. Cauchy (1789-1857), la notion d'intégrale était, semble-t-il, perçue à l'aide de la notion de primitive. Certes, l'interprétation géométrique de l'intégrale en tant qu'aire, et la possibilité d'approcher cette aire par des aires de rectangles, étaient connues, mais cette interprétation ne

dépassait pas le stade de l'intuition géométrique. Cauchy étudie pour une fonction continue sur un segment $[a,b]$, les sommes

$$S_\sigma = \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i)\,(x_{i+1} - x_i) \quad , \text{ où}$$

$a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ est un partage σ du segment $[a,b]$, et où ξ_i est un élément du segment $[x_i, x_{i+1}]$.

Il montre alors que ces sommes ont une limite quand le pas du partage tend vers 0. (On remarquera qu'il y a ici une difficulté pour définir dans ce cas la notion de limite.)

1.2. Intégrale de Riemann.

L'essor de l'étude des développements des fonctions en series trigonométriques (étude entreprise par le mathématicien français J. Fourier (1768-1830) et continuée par le mathématicien allemand P. G. Lejeune-Dirichlet (1805-1850)) nécessitait de savoir intégrer des fonctions non continues. Cauchy déjà avait remarqué que sa définition de l'intégrale pouvait s'appliquer sans que la fonction soit continue en tout point. Le mathématicien allemand B. Riemann (1826 - 1866), en modifiant la définition de Cauchy, donne une notion d'intégrale qui permet d'intégrer certaines fonctions discontinues ; il donne d'ailleurs, pour montrer la force de son procédé, un exemple d'intégration d'une fonction ayant un ensemble dense de discontinuités.

Il introduit les sommes

$$S_\sigma = \sum_{i=1}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i) \quad \text{et} \quad s_\sigma = \sum_{i=1}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i)$$

où $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ est un partage σ du segment $[a,b]$, et où

$$M_i = \sup_{x_i \le x \le x_{i+1}} |f(x)| \quad , \quad m_i = \inf_{x_i \le x \le x_{i+1}} |f(x)| .$$

Si ces sommes ont des limites communes lorsque le pas du partage tend vers 0, alors f est intégrable au sens de Riemann.

Pour éviter, si l'on veut, d'avoir à préciser le sens de ce passage à la limite, on peut définir l'intégrale de Riemann de la façon suivante : soit f une fonction bornée définie sur un intervalle $[a,b]$; définissons

$$I_*(f) = \sup_{\varphi \in \mathcal{E}_f} I(\varphi) \quad \text{et} \quad I^*(f) = \inf_{\varphi \in \mathcal{E}^f} I(\varphi)$$

où $\mathcal{E}_f$ (resp. $\mathcal{E}^f$) est l'ensemble des fonctions en escalier majorées (resp. minorées) par f, et où $I(\varphi)$ est l'intégrale de la fonction en escalier φ ; si $I_*(f) = I^*(f)$, on dit que f est intégrable au sens de Riemann, son intégrale étant $I(f) = I_*(f) = I^*(f)$.

1.3. La conception de Lebesgue.

L'intégrale de Riemann est mal adaptée au passage à la limite simple. Il est en effet possible de trouver une suite de fonctions bornées intégrables au sens de Riemann qui converge vers une fonction bornée non intégrable au sens de Riemann (cf. exercice n° 1). De plus, du point de vue de la complétude, l'intégrale de Riemann n'est pas satisfaisante non plus (cf. exercice n° 3).

Le mathématicien français H. Lebesgue (1875-1941)

montre ce qui dans la définition de Riemann entraine les insuffisances indiquées : le découpage de l'axe des x, n'est pas une bonne classification des points, dès que f n'est pas continue. C'est pour cela que l'intégrale de Riemann ne s'applique qu'aux fonctions qui ne sont pas trop discontinues. On a en fait le résultat suivant : (cf. exercice n°10)
pour qu'une fonction bornée f, soit intégrable au sens de Riemann, il faut et il suffit que l'ensemble de ses points de discontinuité soit de mesure nulle.
Pour Lebesgue, une bonne classification des points passe par un découpage de l'axe des y : on regroupe des points qui ont des images voisines. Bien entendu ceci pose le problème de savoir "mesurer" alors l'image réciproque d'un intervalle. (cf. [ ].)

1.4. Diverses façons de concevoir la notion d'intégrale.

La notion d'intégrale peut se présenter de divers points de vue qui relèvent généralement

des types suivants :

a) Le point de vue de la mesure abstraite : il s'agit de mesurer certains ensembles, puis à partir de là, suivant la méthode de Lebesgue, de définir l'intégrale des fonctions dont l'image réciproque de tout intervalle est un ensemble que l'on sait mesurer. C'est le point de vue que nous adopterons, tout au moins pour commencer, dans ce cours.

b) Le point de vue des formes linéaires continues : On remarque par exemple que l'application

$$I : \mathcal{C}[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \longmapsto \int_a^b f(t)\,dt$$

est une forme linéaire continue sur l'espace $\mathcal{C}[a,b]$ des fonctions continues sur le segment $[a,b]$, muni de la norme uniforme.
Dans cette présentation, on appellera mesure (de Radon) toute forme linéaire continue sur l'espace de fonctions continues considéré, forme que l'on prolonge ensuite à un espace plus grand.

c) L'exposé de Danniel, plus

général, établit des ponts entre les points de vue précédents, et montre l'intérêt de la notion de treillis dans les questions relatives à l'intégration.
On peut se demander si une mesure au sens de Radon a un lien quelconque avec une mesure au sens du a); le théorème de Riesz permet de répondre à cette question.
Dans le point de vue b), on définit des mesures liées à une topologie; cette définition est donc à priori moins générale que celle des mesures abstraites; qu'en est-il exactement? Le théorème de Kakutani permet de répondre à cette question.

1.5. Introduction aux chapitres suivants.

Dans les chapitres suivants nous exposons tout d'abord la théorie de la mesure abstraite. Les mesures sont alors définies comme des fonctions d'ensembles. C'est la formalisation de l'idée intuitive que l'on peut se faire des grandeurs suivantes par

exemple : la mesure des aires, la charge électrique d'un corps, la probabilité d'un événement.
Dans un premier temps nous étudions les propriétés des mesures positives sur une tribu; dans un deuxième temps nous montrons comment construire de telles mesures.
Ensuite nous donnons la définition de l'intégrale, nous en étudions les propriétés, et nous introduisons les espaces de l'intégration.
Enfin, le lien avec les formes linéaires continues (point de vue également très important) est fait.

Exercices.

L'exercice 1 donne un exemple d'une suite de fonctions intégrables au sens de Riemann, qui converge vers une fonction bornée, non intégrable au sens de Riemann.

Exercice 1.

Etudier $f(t) = \lim_{m\to\infty} \left(\lim_{n\to\infty} (\cos \pi m!t)^{2n}\right)$

Montrer que f est bornée, non intégrable au sens de Riemann sur $[0,1]$, et qu'elle est limite simple d'une suite de fonctions intégrables au sens de Riemann sur $[0,1]$.

Les exercices 2 et 3 mettent en évidence le mauvais comportement de l'intégrale de Riemann vis à vis de la complétude des espaces de fonctions intégrables. Plus précisément, l'exercice 2 montre que l'espace des fonctions continues n'est pas complet pour la norme intégrale, et l'exercice 3 montre que le passage aux fonctions intégrables au sens de Riemann ne suffit pas pour le compléter.

Exercice 2.

Notons $\mathcal{C}[0,1]$ l'espace des fonctions continues définies sur $[0,1]$ à valeurs réelles. Munissons cet espace de la norme

$$\|f\| = \int_0^1 |f(t)|\, dt .$$

Montrer que $\mathcal{C}[0,1]$ muni de cette norme n'est pas complet.

On pourra par exemple étudier la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 2}$ où f_n est la fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ -n(x-\frac{1}{2}) & \text{si } \frac{1}{2} - \frac{1}{n} < x < \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ -1 & \text{si } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Exercice 3.

Soit $\mathcal{R}[0,1]$ l'espace des fonctions intégrables au sens de Riemann sur $[0,1]$. On considère sur cet espace la semi-norme

$$N(f) = \int_0^1 |f(t)|\, dt .$$

Si on passe au quotient par la relation

d'équivalence : $f \sim g$ si et seulement si $N(f-g)=0$, on obtient un espace $R[0,1]$ qui est normé par :

$$\|\dot{f}\| = \int_0^1 |f(t)|\, dt$$

où $\dot{f}$ représente la classe de f pour la relation d'équivalence indiquée.

Nous allons montrer que $R[0,1]$ muni de la norme indiquée n'est pas complet.

a) Montrer que l'on peut construire par récurrence une suite $(E_n)_{n\geq 1}$ de sous ensembles de $[0,1]$ de telle sorte que le complémentaire F_n de E_n soit réunion finie d'intervalles maximaux deux à deux disjoints en posant :

$E_1 = [1/3, 2/3]$

$E_{n+1} = E_n \cup A_n$ où A_n est construit à partir de E_n de la façon suivante :

on prend dans chaque intervalle maximal A du complémentaire F_n de E_n, l'intervalle fermé central de longueur $1/3^{n+1}$. longueur de A.

A_n est alors la réunion de tous ces intervalles fermés centraux.

Posons $E = \bigcup_{n\geq 1} E_n$ et $F = \complement E$.

Montrer que E est dense dans $[0,1]$

b) χ_{F_n} étant la fonction caractéristique de F_n, on note $I(\chi_{F_n})$ l'intégrale de χ_{F_n}. (χ_{F_n} est une fonction en escalier.)

Montrer que :

$I(\chi_{F_n}) = (1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{9})\dots(1-\frac{1}{3^n})$.

En conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} I(\chi_{F_n}) = \beta$ où $0<\beta<1$.

En conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} I(\chi_{E_n}) = \alpha = 1-\beta$ $0<\alpha<1$.

c) Posons $f_n = \chi_{E_n}$. Montrer que la suite $(\dot{f}_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $R[0,1]$ muni de la norme indiquée.

Supposons que $(\dot{f}_n)_{n\geq 1}$ converge dans $R[0,1]$ vers un élément $\dot{f}$. Montrer que l'on peut alors trouver h dans la classe $\dot{f}$ de telle sorte que :

$0 \leq h(x) \leq 1$ pour tout x, et $h(x)=1$ pour $x \in E$.

Montrer que $I(h) \leq \alpha$.

En conclure que l'on peut construire une fonction en escalier $g \geq h$ telle que $I(g) < 1$,

$0 \leq g(x) \leq 1$ pour tout x et $g(x)=1$ pour $x \in E$.

Etudier alors $\chi_{[0,1]} - g$. Conclure.

L'exercice suivant montre comment on peut définir pour une classe de fonctions intermédiaire entre celle des fonctions continues et celle des fonctions intégrables au sens de Riemann une intégrale bien adaptée à la convergence uniforme : l'intégrale des fonctions réglées.

Exercice 4.

Soit $[a,b]$ un compact de $\mathbb{R}$. Une fonction f défini sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$, ou même un espace de Banach F) est dite réglée, si elle est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de fonctions en escalier.

a) Montrer que pour qu'une fonction f définie sur $[a,b]$ soit réglée, il faut et il suffit que pour tout $x \in]a,b[$, f ait une limite à droite et une limite à gauche en x, que f ait une limite à droite en a et une limite à gauche en b. En particulier toute fonction continue est réglée, toute fonction monotone est réglée.

b) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction réglée f. L'intégrale $\int_a^b f_n(t)\,dt$ de la fonction en escalier f_n étant définie de la manière habituelle, démontrer que la suite $\left(\int_a^b f_n(t)\,dt\right)_{n\geq 1}$ est convergente et que sa limite ne dépend que de f et non pas de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ qui converge uniformément vers f. On définit alors : $\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt$.

Comparer cette définition de l'intégrale avec celle de Cauchy, puis avec celle de Riemann.

Les deux exercices suivants sont centrés sur la première classe de Baire. Le problème de construire une classe stable par passage à la limite simple est posé.

Exercice 5.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction qui est limite simple d'une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions continues. (Fonction de la première classe de Baire)

A étant un fermé de $\mathbb{R}$ posons $A_n = \{y, d(y,A) < \frac{1}{n}\}$.

Montrer que $f^{-1}(A) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} f_{n+k}^{-1}(A_n) \right)$.

En conclure que pour tout fermé A, $f^{-1}(A)$ est un ensemble G_δ (intersection dénombrable d'ensembles ouverts).

Soit $(O_n)_{n\geq 1}$ une base d'ouverts de la topologie de $\mathbb{R}$, et $F_n = \complement O_n$. Soit D l'ensemble des points de discontinuité de f.

Montrer que

$$D = \bigcup_{n\geq 1}\left(f^{-1}(O_n) - \left(f^{-1}(O_n)\right)^{\circ}\right) = \bigcup_{n\geq 1}\left(\overline{f^{-1}(F_n)} - f^{-1}(F_n)\right).$$

Montrer que

$\overline{f^{-1}(F_n)} - f^{-1}(F_n)$ est réunion dénombrable d'ensembles fermés d'intérieurs vides.

En conclure que D est réunion dénombrable d'ensembles fermés d'intérieurs vides, puis que $\complement D$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 6.

Utiliser les exercices 1 et 5 pour montrer que la première classe de Baire (ensemble des fonctions qui sont limites simples de fonctions continues) n'est pas stable pour le passage à la limite simple.

Les deux exercices suivants montrent que les liens entre intégrales et primitives ne sont pas simples.

Exercice 7.

Soit f' une fonction dérivée ; on suppose que $f'(a) = A$ et que $f'(b) = B$ avec $A < B$. Soit C tel que $A < C < B$. Montrer qu'il existe c dans $]a, b[$ tel que $f'(c) = C$.

Utiliser ce résultat pour montrer qu'il existe des fonctions intégrables au sens de Riemann qui ne sont pas des fonctions dérivées.

Exercice 8.

Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Étudier la fonction

$$\varphi_a(x) = \begin{cases} (x-a)^2 \sin\frac{1}{x-a} & \text{si } x \neq a. \\ 0 & \text{si } x = a. \end{cases}$$

Soit $a + c(a,b)$ la plus grande valeur de x inférieure ou égale à $\frac{a+b}{2}$ qui annule $\varphi_a'(x)$.

Reprenons maintenant les notations de l'exercice 5. Définissons alors la fonction f de la manière suivante :

Sur tout intervalle $[\alpha, \beta]$, maximal, constitutif de E,

f est égale à $\varphi_\alpha(x)$ de α à $\alpha + c(\alpha,\beta)$; f est constante et égale à $\varphi_\alpha(\alpha + c(\alpha,\beta))$ de $\alpha + c(\alpha,\beta)$ à $\beta - c(\alpha,\beta)$, f est égale à $-\varphi_\beta(x)$ de $\beta - c(\alpha,\beta)$ à β.
En tout point de $\complement E = F$, f est nulle.
Montrer que f est dérivable, que f' est bornée et que f' n'est pas intégrable au sens de Riemann.

Dans les exercices suivants nous nous proposons de donner une première définition des ensembles de mesure nulle au sens de Lebesgue.
Nous caractérisons ensuite les fonctions intégrables au sens de Riemann.

Exercice 9.

Un ensemble de points de $\mathbb{R}$ est dit de mesure nulle si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une suite d'intervalles de $\mathbb{R}$ dont la réunion contient cet ensemble et dont la somme des longueurs est inférieure à ε.
Montrer qu'une réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle est aussi de mesure nulle.

Soit $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$.
A étant un sous ensemble fermé de $[a,b]$ de mesure nulle, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une famille finie d'intervalles $(I_n)_{n=1,\dots,p}$ telle que $A \subset \bigcup_{n=1}^{p} I_n$ et $\sum_{n=1}^{p} |I_n| \leq \varepsilon$.
où $|I_n|$ est la longueur de l'intervalle I_n.

Exercice 10.

Soient f une fonction réelle bornée définie sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ et x_0 un point de $[a,b]$. On définit l'oscillation de f au point x_0, que l'on note $\omega(f,x_0)$ par :

$$\omega(f,x_0) = \overline{\lim_{x_0}} f(x) - \underline{\lim_{x_0}} f(x) .$$

(Donc $\omega(f,x_0) = 0$ caractérise les points de continuité de f).
ε étant un réel strictement positif, montrer que l'ensemble des éléments x de $[a,b]$ tels que $\omega(f,x) \geq \varepsilon$ est un fermé.
Montrer que pour que f soit intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$ il faut et il suffit que l'ensemble des points de discontinuité de f soit de mesure nulle.

Chapitre II.

Espaces mesurables. Fonctions mesurables.

Dans ce chapitre, ainsi que dans le suivant, nous allons mettre en place les notions concernant la théorie de la mesure.
Evidemment, en raison des liens étroits qui les unissent, mesure et intégration se sont developpées simultanément. L'évolution a eu lieu suivant deux directions complémentaires.
La première direction, developpée par C. Jordan (1838-1922), E. Borel (1871-1956),

H. Lebesgue, consiste à définir la mesure d'un ensemble à partir de la longueur des intervalles. Jordan le fait avec des opérations finies; Borel a l'idée d'introduire des opérations dénombrables. Cette dernière méthode est précisée par Lebesgue, qui avec sa construction de l'intégrale, en montre toute la force.
La deuxième direction, dont on peut attribuer la paternité à T. Stieltjes (1856-1894), consiste à attribuer des "poids" aux intervalles, c'est à dire qu'au lieu de mesurer les intervalles par leurs longueurs, on les mesure grâce à une fonction de répartition F, en attribuant à l'intervalle (a,b) la mesure $F(b)-F(a)$.
C'est ainsi que Stieltjes définit à la manière de Riemann l'intégrale d'une fonction f en prenant des sommes: (Intégrale de Riemann-Stieltjes)

$$S_\sigma=\sum_{i=1}^{n-1} M_i\left(F(x_{i+1})-F(x_i)\right) \quad \text{et} \quad s_\sigma=\sum_{i=1}^{n-1} m_i\left(F(x_{i+1})-F(x_i)\right)$$

Dans cette optique, il est clair que l'on définit une infinité de mesures distinctes en faisant varier F.

J. Radon (1887-1956) reprend ce point de vue en l'adaptant à l'intégrale de Lebesgue (Intégrale de Lebesgue-Stieltjes).
Enfin la version quasi-définitive de la mesure abstraite, est due à M. Frechet (1878-

2.1. Clans unitaires.

Définition 1. Soit E un ensemble non vide. Une famille non vide $\mathcal{C}$ de parties de l'ensemble E est appelée clan unitaire sur E si les conditions suivantes sont réalisées :

(c_1) Pour tout A et tout B éléments de $\mathcal{C}$, $A \cup B$ est un élément de $\mathcal{C}$.

(c_2) Pour tout A, élément de $\mathcal{C}$, le complémentaire de A est élément de $\mathcal{C}$.

Les propositions suivantes sont des conséquences immédiates de la définition précédente :

Proposition 1. Si $\mathcal{C}$ est un clan

unitaire, on a :

(c_1') Pour tout A et tout B, éléments de $\mathcal{C}$, $A \cap B$ est un élément de $\mathcal{C}$.

Proposition 2. Si $\mathcal{C}$ est un clan unitaire sur E, $\emptyset$ et E sont des éléments de $\mathcal{C}$.

Proposition 3. Si $\mathcal{C}$ est un clan unitaire sur E, pour toute famille finie $(A_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathcal{C}$, $\bigcup_{i\in I} A_i$ et $\bigcap_{i\in I} A_i$ sont des éléments de $\mathcal{C}$.

Exemple 1. Soit E un ensemble non vide ; l'ensemble des parties de E est un clan unitaire sur E.

Exemple 2. Soit E un ensemble non vide ; l'ensemble à deux éléments $\{\emptyset ; E\}$ est un clan unitaire sur E.

Exemple 3. L'ensemble de toutes les réunions finies d'intervalles de $\mathbb{R}$ est un clan unitaire sur $\mathbb{R}$. (Il s'agit ici d'intervalles

(a,b), ouverts, ou fermés, ou semi-ouverts, avec $a \leq b$ et éventuellement a ou b prenant les valeurs $\pm \infty$.)
On trouvera une démonstration de cet important résultat au chapitre n° 2, page

Proposition 4. Soit $(\mathcal{C}_i)_{i \in I}$ une famille non vide de clans unitaires sur E. Alors, $\bigcap_{i \in I} \mathcal{C}_i$ est un clan unitaire sur E.

Proposition 5. Soit E un ensemble non vide et $\mathcal{A}$ un ensemble de parties de E. Il existe un plus petit clan unitaire (pour l'inclusion) contenant $\mathcal{A}$. Ce clan unitaire est l'intersection de tous les clans unitaires contenant $\mathcal{A}$.

Cette proposition nous permet de donner la definition suivante :

Définition 2. Le plus petit clan unitaire sur E, contenant $\mathcal{A}$ est appelé clan unitaire engendré par $\mathcal{A}$; nous le noterons $\mathcal{C}(\mathcal{A})$.

2.2. Tribus

Définition 3. Soit E un ensemble non vide. Une famille $\mathcal{T}$ de parties de E est appelée tribu sur E si les conditions suivantes sont réalisées :
(t_1) $\mathcal{T}$ est un clan unitaire sur E.
(t_2) Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}$, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est un élément de $\mathcal{T}$.

Les propositions suivantes sont des conséquences immédiates de la définition.

Proposition 6. Si $\mathcal{T}$ est une tribu sur E, $\emptyset$ et E sont des éléments de $\mathcal{T}$.

Proposition 7. Si $\mathcal{T}$ est une tribu sur E :
(t_2') Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est élément de $\mathcal{T}$.

Les exemples 1 et 2 sont des exemples de tribus. Par contre l'exemple 3 est un exemple de clan unitaire qui n'est pas une tribu.

Proposition 8. Soit $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille non vide de tribus sur E. Alors $\bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$ est une tribu sur E.

Proposition 9. Soient E un ensemble non vide et $\mathcal{A}$ une famille de parties de E. Il existe une plus petite tribu sur E (pour l'inclusion) contenant $\mathcal{A}$; cette tribu est l'intersection de toutes les tribus sur E contenant $\mathcal{A}$.

La proposition 9 nous permet de donner la définition suivante :

Définition 4. La plus petite tribu sur E contenant $\mathcal{A}$ est appelé tribu engendrée par $\mathcal{A}$; nous la noterons $\mathcal{T}(\mathcal{A})$.

Dans le cas où E est un espace topologique, il est interessant d'introduire la tribu sur E engendrée par les parties ouvertes de E. Cette tribu est appelée tribu borelienne de E ; nous la noterons $\mathcal{B}_E$
Les éléments de la tribu $\mathcal{B}_E$ sont appelés les parties boréliennes de E.

Comme conséquence immédiate des définitions on peut énoncer la proposition suivante :

Proposition 10. Si E est un espace topologique, la tribu borélienne de E est aussi la tribu engendrée par les parties fermées de E.

2.3. Espaces mesurables.

Définition 5. On appelle espace mesurable un couple $(E,\mathcal{T})$ où E est un ensemble non vide, et où $\mathcal{T}$ est une tribu sur E.
Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés les parties mesurables de l'espace mesurable $(E,\mathcal{T})$.

Proposition 11. Soit $(E,\mathcal{T})$ un espace mesurable, et A un sous ensemble non vide de E. Posons :

$$\mathcal{T}_{/A} = \{ B\cap A \,;\, B\in\mathcal{T} \}.$$

Alors $\mathcal{T}_{/A}$ est une tribu sur A.

Définition 7. Si $(E, \mathcal{C})$ est un espace mesurable, on appelle sous espace mesurable de $(E, \mathcal{C})$ tout couple $(A, \mathcal{C}')$ où A est un sous ensemble non vide de E et où $\mathcal{C}'$ est la tribu induite par $\mathcal{C}$ sur A.

Définition 8. Si $(E_i, \mathcal{C}_i)_{i \in I}$ est une famille finie non vide d'espaces mesurables, on appelle espace mesurable produit de ces espaces, l'espace mesurable $\left(\prod_{i \in I} E_i, \prod_{i \in I} \mathcal{C}_i\right)$

où $\prod_{i \in I} E_i$ est le produit cartesien des ensembles E_i,

et où $\prod_{i \in I} \mathcal{C}_i$ est la tribu sur $\prod_{i \in I} E_i$ engendrée par les parties de la forme $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ avec $A_i \in \mathcal{C}_i$.

2.4. Fonctions mesurables.

Définition 10. Soient $(E_1, \mathcal{C}_1)$ et $(E_2, \mathcal{C}_2)$ deux espaces mesurables, et f une application de E_1 dans E_2. L'application f est dite $\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2$-mesurable (ou plus brièvement mesurable, si aucune confusion n'en résulte) si :

(m) Pour tout élément B de $\mathcal{C}_2$, $f^{-1}(B)$ est un élément de $\mathcal{C}_1$.

Nous noterons $\mathcal{M}((E_1, \mathcal{C}_1), (E_2, \mathcal{C}_2))$ l'ensemble des applications $\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2$-mesurables de E_1 dans E_2.
Si E_1 et E_2 sont deux espaces topologiques, nous noterons $\mathcal{M}(E_1, E_2)$ l'ensemble des applications $\mathcal{B}_{E_1}\mathcal{B}_{E_2}$-mesurables de E_1 dans E_2 ; nous appellerons ces applications, fonctions boreliennes de E_1 dans E_2.

Exemple 4. Soient E_1 et E_2 deux ensembles non vides, $\mathcal{C}_1$ une tribu quelconque sur E_1, $\mathcal{C}_2$ la tribu $\{\emptyset, E_2\}$, f une application quelconque de E_1 dans E_2.
Alors f est $\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2$-mesurable.

Exemple 5. Soient E_1 et E_2 deux ensembles non vides, $\mathcal{C}_2$ une tribu quelconque sur E_2 ; toute application f de E_1 dans E_2 est alors $\mathcal{P}(E_1)\mathcal{C}_2$-mesurable.

Exemple 6. Soient $(E_1, \mathcal{C}_1)$ et $(E_2, \mathcal{C}_2)$ deux espaces mesurables, f une application constante de E_1 dans E_2. Alors f est $\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2$-mesurable.

Exemple 7. Soient $(E_2,\mathcal{C}_2)$ un espace mesurable, $(E_1,\mathcal{C}_1)$ un sous espace mesurable de $(E_2,\mathcal{C}_2)$, f l'injection canonique de E_1 dans E_2. Alors f est $\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2$-mesurable.

Exemple 8. Soient $(E_1,\mathcal{C}_1)$ et $(E_2,\mathcal{C}_2)$ deux espaces mesurables, f la surjection canonique de $E_1 \times E_2$ sur E_1.
Alors f est $(\mathcal{C}_1\times\mathcal{C}_2)\mathcal{C}_1$-mesurable.

Nous donnons maintenant quelques résultats généraux importants concernant les fonctions mesurables.

Proposition 12. Soient $(E_1,\mathcal{C}_1)$, $(E_2,\mathcal{C}_2)$, $(E_3,\mathcal{C}_3)$ trois espaces mesurables, f une application $\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2$-mesurable de E_1 dans E_2, g une application $\mathcal{C}_2\mathcal{C}_3$-mesurable de E_2 dans E_3.
Alors $g \circ f$ est $\mathcal{C}_1\mathcal{C}_3$-mesurable.

Proposition 13. Soient E_1 et E_2 deux

ensembles non vides, f une application de E_1 dans E_2.
Si $\mathcal{C}_2$ est une tribu sur E_2, la famille $f^{-1}(\mathcal{C}_2)$ est une tribu sur E_1.
Si $\mathcal{a} \subset \mathcal{P}(E_2)$, $f^{-1}(\mathcal{C}(\mathcal{a})) = \mathcal{C}(f^{-1}(\mathcal{a}))$.
(On rappelle que $\mathcal{C}(\mathcal{a})$ est la tribu engendrée par $\mathcal{a}$).

Démonstration.
Par définition, $f^{-1}(\mathcal{C}_2) = \{ f^{-1}(B) \,;\, B \in \mathcal{C}_2 \}$.
Comme $\mathcal{C}_2$ est une famille non vide, il en est de même pour la famille $f^{-1}(\mathcal{C}_2)$.
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $f^{-1}(\mathcal{C}_2)$; alors, $A_n = f^{-1}(B_n)$ où $B_n \in \mathcal{C}_2$.
Donc, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n) = f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n)$.
Par suite, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in f^{-1}(\mathcal{C}_2)$.
De même si $A \in f^{-1}(\mathcal{C}_2)$, le complémentaire de A est aussi un élément de $f^{-1}(\mathcal{C}_2)$.
$f^{-1}(\mathcal{C}_2)$ est donc une tribu.
Soit $\mathcal{a} \subset \mathcal{P}(E_2)$; il resulte de la première partie de la proposition que $\mathcal{C}(f^{-1}(\mathcal{a})) \subset f^{-1}(\mathcal{C}(\mathcal{a}))$.
Posons $\mathcal{L} = \{ B \subset E_2 \,;\, B \in \mathcal{C}(\mathcal{a})$ et $f^{-1}(B) \in \mathcal{C}(f^{-1}(\mathcal{a})) \}$.

Il est facile de voir que $\mathcal{L}$ est une tribu sur E_2.
D'autre part, $\mathcal{A} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{T}(\mathcal{A})$; donc $\mathcal{L} = \mathcal{T}(\mathcal{A})$.
Par suite pour tout élément B de $\mathcal{T}(\mathcal{A})$, $f^{-1}(B)$ est élément de $\mathcal{T}(f^{-1}(\mathcal{A}))$, ce qui achève la démonstration.

La démonstration précédente est exemplaire du point de vue de la méthode employée : on veut montrer que tous les éléments d'une tribu $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ engendrée par $\mathcal{A}$, possèdent une propriété P ; on introduit alors $\mathcal{L}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ qui possèdent P et on montre que $\mathcal{L}$ est une tribu contenant $\mathcal{A}$; alors $\mathcal{L} = \mathcal{T}(\mathcal{A})$, ce qui permet de conclure. Nous aurons par la suite l'occasion d'utiliser cette méthode.

Théorème 1. (Critère de mesurabilité).
Soient $(E_1, \mathcal{T}_1)$ et $(E_2, \mathcal{T}_2)$, deux espaces mesurables, $\mathcal{A}$ une famille de parties de E_2 telle que $\mathcal{T}(\mathcal{A}) = \mathcal{T}_2$.
Dans ces conditions, pour qu'une application f de E_1 dans E_2 soit $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2$-mesurable, il faut et il suffit que $f^{-1}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{T}_1$.

Ce résultat très important est une conséquence immédiate de la proposition précédente.

2.5. Exemples importants.

Proposition 15. Soit $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{A}'$) l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$ de la forme $]-\infty, a]$ (resp. $]-\infty, a[$).
Alors $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{T}(\mathcal{A})$ (resp. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{T}(\mathcal{A}')$).

Démonstration.
Pour tout réel b on peut écrire :
$]-\infty, b[= \bigcup_{n \geq 1}]-\infty, b - 1/n]$;
donc $]-\infty, b[\in \mathcal{T}(\mathcal{A})$, ainsi que son complémentaire $[b, +\infty[$.
Par suite pour tous réels a et b tels que $a < b$, l'intervalle $]a, b[$ appartient à $\mathcal{T}(\mathcal{A})$.
Tout ouvert de $\mathbb{R}$ étant réunion dénombrable d'intervalles ouverts de la forme $]a, b[$, on en déduit que $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ contient tous les ouverts de $\mathbb{R}$.

De la même façon on peut énoncer la proposition suivante :

Proposition 16. Soit $\mathcal{a}$ (resp. $\mathcal{a}'$) l'ensemble des intervalles de $\overline{\mathbb{R}}$ de la forme $[-\infty, a]$ (resp. $[-\infty, a[$), où $a \in \mathbb{R}$.
Alors $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} = \mathcal{C}(\mathcal{a})$ (resp. $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} = \mathcal{C}(\mathcal{a}')$).

On déduit immédiatement des définitions et du théorème 1 :

Proposition 17. Toute fonction continue d'un espace topologique E_1 dans un espace topologique E_2 est borélienne.

Proposition 18. Soient E un espace topologique, et A un sous ensemble de E. La tribu $\mathcal{B}_{E/A}$ induite sur A par la tribu borélienne de E, est la tribu borélienne sur A.

Démonstration :
Notons Ω_E la famille des ouverts de E, Ω_A la famille des ouverts de A et i l'injection canonique de A dans E.

D'après la proposition 13 (page 31)
$i^{-1}(\mathcal{C}(\Omega_E)) = \mathcal{C}(i^{-1}(\Omega_E))$,
c'est à dire : $\mathcal{B}_{E/A} = \mathcal{B}_A$.

Proposition 19. Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille finie non vide d'espaces topologiques ayant chacun une base dénombrable d'ouverts.
Alors $\mathcal{B}_{\prod_{i \in I} E_i} = \prod_{i \in I} \mathcal{B}_{E_i}$.

Démonstration.
Soit $I = \{1, 2, \dots, n\}$. Notons p_k la surjection canonique du produit des E_i sur E_k.
p_k est une application continue ; c'est donc une fonction borélienne. Par suite pour tout élément k de I et pour tout élément B_k de $\mathcal{B}_{E_k}$, $E_1 \times E_2 \times \dots \times B_k \times \dots \times E_n$ est un élément de la tribu borélienne de $\prod_{i \in I} E_i$.
Si $B_1 \in \mathcal{B}_{E_1}, \dots, B_n \in \mathcal{B}_{E_n}$, on peut écrire :
$B_1 \times \dots \times B_n = (B_1 \times E_2 \times \dots \times E_n) \cap \dots \cap (E_1 \times E_2 \times \dots \times B_n)$
Donc $B_1 \times \dots \times B_n \in \mathcal{B}_{\prod_{i \in I} E_i}$
On en déduit l'inclusion $\prod_{i \in I} \mathcal{B}_{E_i} \subset \mathcal{B}_{\prod_{i \in I} E_i}$
(On remarquera que pour démontrer cette

inclusion on ne s'est pas servi des bases dénombrables d'ouverts des espaces topologiques E_i).
Soit $\mathcal{U}_i$ une base dénombrable d'ouverts de E_i.
Les ensembles $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ où $A_i \in \mathcal{U}_i$ forment une base dénombrable d'ouverts, pour l'espace topologique produit $\prod_{i\in I} E_i$, que l'on note $\mathcal{U}$.
On a clairement l'inclusion $\mathcal{U} \subset \prod_{i\in I} \mathcal{B}_{E_i}$
Soit $\mathcal{O}$ la famille des ouverts de $\prod_{i\in I} E_i$. Tout élément de $\mathcal{O}$ est soit la partie vide, soit réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{U}$. Donc $\mathcal{O} \subset \prod_{i\in I} \mathcal{B}_{E_i}$ et par suite $\mathcal{B}_{\prod_{i\in I} E_i} \subset \prod_{i\in I} \mathcal{B}_{E_i}$.

Remarquons que ce résultat s'applique en particulier si les E_i sont des espaces métriques séparables.
Par exemple $E_i = \mathbb{R}$ où $E_i = \overline{\mathbb{R}}$

Proposition 20. Soient $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable, $(F_i)_{i\in I}$ une famille finie non vide d'espaces topologiques possédant chacun une base dénombrable d'ouverts.
Soit $u : E \longrightarrow \prod_{i\in I} F_i$

$$x \longmapsto u(x) = (u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x))$$

Pour que u soit $\mathcal{E}\mathcal{B}_{\prod_{i\in I} F_i}$-mesurable, il faut et il suffit que pour tout i de I, u_i soit une application $\mathcal{E}\mathcal{B}_{F_i}$-mesurable.

Démonstration.
Si k appartient à I, notons p_k la surjection canonique de $\prod_{i\in I} F_i$ sur F_k. Alors $u_k = p_k \circ u$.
p_k est continue, donc $\mathcal{B}_{\prod_{i\in I} F_i} \mathcal{B}_{F_k}$-mesurable ;
par suite si u est $\mathcal{E}\mathcal{B}_{\prod_{i\in I} F_i}$-mesurable, d'après la proposition 12 (page 31), u_k est $\mathcal{E}\mathcal{B}_{F_k}$-mesurable.
Réciproquement, si pour tout k de I, u_k est $\mathcal{E}\mathcal{B}_{F_k}$-mesurable, pour tout ensemble $B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n$, où $B_k \in \mathcal{B}_{F_k}$, on a :

$$u^{-1}(B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n) = \bigcap_{i\in I} u_i^{-1}(B_i) \text{ ; donc}$$

$$u^{-1}(B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n) \in \mathcal{E}.$$

En vertu du critère de mesurabilité (page 33) on en déduit que u est $\mathcal{E} \prod_{i\in I} \mathcal{B}_{F_i}$-mesurable.

La proposition 19 (page 36) nous permet alors de conclure.

Théorème 2. Soient $(E,\mathcal{C})$ un espace mesurable, F un espace vectoriel normé séparable sur K ($K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$)
Alors $\mathcal{M}((E,\mathcal{C}),(F,\mathcal{B}_F))$ est un espace vectoriel sur K. Si de plus F est une algèbre normée, $\mathcal{M}((E,\mathcal{C}),(F,\mathcal{B}_F))$ est une algèbre.

Démonstration.
Montrons que si f et g sont des éléments de $\mathcal{M}((E,\mathcal{C}),(F,\mathcal{B}_F))$ il en est de même de $f+g$.
Soit $u : E \longrightarrow F\times F$, $x \longmapsto (f(x), g(x))$.

D'après la proposition 20 (page 37)
u est $\mathcal{C}\mathcal{B}_{F\times F}$-mesurable.
Soit $\varphi : F\times F \longrightarrow F$, $(x,y) \longmapsto x+y$

φ est continue, donc $\mathcal{B}_{F\times F}\mathcal{B}_F$-mesurable.
Mais $f+g = \varphi\circ u$, donc $f+g$ est $\mathcal{C}\mathcal{B}_F$-mesurable.
La mesurabilité de λf ou de $f.g$ se démontre de manière analogue.

Théorème 3. Soit $(E,\mathcal{C})$ un espace mesurable. La somme et le produit de deux fonctions $\mathcal{C}\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}^+}}$-mesurables de E dans $\overline{\mathbb{R}^+}$ sont mesurables.
Le produit d'une fonction $\mathcal{C}\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}^+}}$-mesurable par un élément de $\overline{\mathbb{R}^+}$ est une fonction $\mathcal{C}\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}^+}}$-mesurable.

La démonstration de ce théorème diffère très légèrement de celle du théorème précédent du fait que l'application $(x,y) \longmapsto xy$ n'est pas continue aux points $(0,+\infty)$ et $(+\infty,0)$.

Théorème 4. Soient f et g deux fonctions $\mathcal{C}\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$-mesurables d'un espace mesurable $(E,\mathcal{C})$ dans $\overline{\mathbb{R}}$.
Alors, $\sup(f,g)$, $\inf(f,g)$, f^+, f^-, $|f|$ sont $\mathcal{C}\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$-mesurables.

Démonstration.
Soit $u : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}\times\overline{\mathbb{R}}$, $x \longmapsto (f(x), g(x))$

u est $\mathcal{C}\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}\times\overline{\mathbb{R}}}$-mesurable.

Soit $\varphi : \overline{\mathbb{R}}\times\overline{\mathbb{R}} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$
$\qquad (x,y) \longmapsto \sup(x,y)$

φ est continue donc $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}\times\overline{\mathbb{R}}}\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ - mesurable.

Or $\sup(f,g) = \varphi \circ u$, donc $\sup(f,g)$ est mesurable. Il en est de même pour $\inf(f,g)$.
Alors, $f^+ = \sup(f,0)$, $f^- = -\inf(f,0)$ et $|f| = f^+ + f^-$ sont clairement des fonctions mesurables.

Théorème 5. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $\mathcal{E}\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ - mesurables d'un espace mesurable $(E,\mathcal{E})$ dans $\overline{\mathbb{R}}$.
Les fonctions $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n$ et $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n$ sont $\mathcal{E}\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ - mesurables.

Démonstration.
D'après le théorème 4, pour tout entier naturel N, la fonction $\varphi_N = \sup\limits_{n\leq N} f_n$ est mesurable.
La suite $(\varphi_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est croissante et de plus

$\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n = \sup\limits_{N\in\mathbb{N}} f_n$.

Il suffit donc de montrer que pour toute

suite croissante $(\varphi_N)_{N\in\mathbb{N}}$ de fonctions $\mathcal{E}\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ - mesurables, la fonction $\sup\limits_{N\in\mathbb{N}} \varphi_N$ est $\mathcal{E}\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ - mesurable.
Or pour tout réel a ,
$\left(\sup\limits_{N\in\mathbb{N}} \varphi_N\right)^{-1}([-\infty,a]) = \bigcap\limits_{N\in\mathbb{N}} \varphi_N^{-1}([-\infty,a])$,
ce qui prouve que $\left(\sup\limits_{N\in\mathbb{N}} \varphi_N\right)^{-1}([-\infty,a]) \in \mathcal{E}$.

En utilisant la proposition 16 (page 35), puis le théorème 1 (page 33) on a le résultat voulu.
De la même façon on montre la mesurabilité de la fondion $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$.
Les égalités

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n = \inf\limits_{N\in\mathbb{N}}\left(\sup\limits_{n\geq N} f_n\right)$ et

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n = \sup\limits_{N\in\mathbb{N}}\left(\inf\limits_{n\geq N} f_n\right)$

permettent de conclure.

On déduit de ce théorème l'important résultat suivant en ce qui concerne la stabilité pour le passage à la limite simple.

Théorème 6. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $\mathcal{CB}_{\overline{\mathbb{R}}}$-mesurables. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f, f est une fonction $\mathcal{CB}_{\overline{\mathbb{R}}}$-mesurable.

Démonstration.

Il suffit de remarquer que dans ce cas

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, f_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, f_n = \lim_{n\to\infty} f_n .$$

Exercices.

L'exercice 11 qui suit met en lumière une technique qui peut être utile dans certaines questions. Il consiste à écrire une réunion d'ensembles en réunion disjointe de ses atomes.

Exercice 11.

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille non vide de sous ensembles d'un ensemble E.

Pour toute partie non vide J de I on pose :

$$E_J = \Big(\bigcap_{i\in J} A_i\Big) \cap \Big(\bigcap_{i\in I-J} \complement A_i\Big)$$

Montrer que si $J_1 \neq J_2$, $E_{J_1} \cap E_{J_2} = \emptyset$,

et que :

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{\substack{J\in\mathcal{P}(I)\\ J\neq\emptyset}} E_J .$$

Enfin, soit $i_0 \in I$; montrer que $A_{i_0} = \bigcup_{J\ni i_0} E_J$

Les exercices qui suivent situent les clans unitaires et les tribus par rapport à des structures algébriques qu'il peut être bon de faire intervenir dans ces questions.

Exercice 12.

Soit $(A,+,\times)$ un anneau dans lequel $x^2 = x$ pour tout x (Anneau de Boole.)

a) Montrer que pour tout x de A, $x+x=0$; montrer que A est commutatif.

b) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est un exemple d'anneau de Boole ; dans ce cas c'est même un corps. Réciproquement montrer que tout anneau de Boole unitaire qui est un corps est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

c) A étant un anneau de Boole unitaire on définit la relation $\prec$ par :

$x \prec y \iff x = xy$.

Montrer que $\prec$ est une relation d'ordre sur A et que A muni de la relation d'ordre $\prec$ est un treillis ayant une unité et un zéro, complémenté et distributif.

Réciproquement soit T un treillis* ayant une unité, un zéro, complémenté et distributif.

Montrer que si on pose

$xy = x \wedge y$ et $(x+y) = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y)$ où x' représente le complément de x et y' celui de y,

on obtient pour T une structure d'anneau unitaire.

$(T,+,\times,\prec)$ est dit alors algèbre de Boole.

d) Soit E un ensemble non vide. Montrer que $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap, \subset)$ est une algèbre de Boole.

Soit $\mathcal{C}$ un clan unitaire de parties de E ; montrer que $\mathcal{C}$ est une sous algèbre de Boole de la précédente.

* On rappelle qu'un treillis T est un ensemble non vide muni d'une relation d'ordre $\prec$, de telle sorte que deux éléments quelconques x et y de T aient une borne supérieure notée $x \vee y$ et une borne inférieure notée $x \wedge y$.

Un treillis T a une unité notée e si pour tout x de T on a : $x \prec e$.

Un treillis T a un zéro noté ω si pour tout x de T on a : $\omega \prec x$.

Un treillis T avec unité et zéro est complémenté si pour tout x de T il existe x' de T tel que $x \vee x' = 1$ et $x \wedge x' = 0$.

Un treillis T est distributif si pour tout x, tout y, tout z de T on a $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (z \wedge x)$ et $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Exercice 13.

Soit E un ensemble non vide. On appelle clan sur E toute famille $\mathcal{R}$ de parties de E telle que :

(r_1) Si $A \in \mathcal{R}$ et $B \in \mathcal{R}$ alors $A \cup B \in \mathcal{R}$.

(r_2) Si $A \in \mathcal{R}$ et $B \in \mathcal{R}$ alors $A - B \in \mathcal{R}$.

Montrer que l'intersection d'une famille de clans est un clan. En conclure que si $\mathcal{A}$ est une famille de parties de E il existe un plus petit clan contenant $\mathcal{A}$ noté $\mathcal{R}(\mathcal{A})$.

Les familles suivantes sont-elles des clans ? Des clans unitaires ?

α) $E = \mathbb{R}^n$; $\mathcal{R}$ est la classe des réunions finies d'ensembles de la forme :

$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \; ; \; -\infty < a_i \leq x_i < b_i < +\infty \quad i = 1, \ldots, n\}$

β) E est un ensemble non dénombrable ; $\mathcal{R}$ est la classe de tous les sous ensembles de E qui soit sont dénombrable, soit ont leurs complémentaires dénombrables.

Soit $\mathcal{A}$ une famille non vide de parties d'un ensemble non vide E ; montrer que tout élément de $\mathcal{R}(\mathcal{A})$ peut être recouvert par une réunion finie d'éléments de $\mathcal{A}$.

Exercice 14.

Soit $\mathcal{I}$ l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$ (Intervalles ouverts, fermés, semi ouverts à droite, à gauche, bornés ou non).

Notons $\mathcal{C}$ l'ensemble des réunions finies d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{I}$.

Montrer que $\mathcal{C}$ est un clan unitaire sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15.

Soient $(E_1, \mathcal{T}_1)$ et $(E_2, \mathcal{T}_2)$ deux espaces mesurables.

On note $\mathcal{R}$ l'ensemble des rectangles de $E_1 \times E_2$ c'est à dire les parties de la forme $A \times B$ où $A \in \mathcal{T}_1$ et $B \in \mathcal{T}_2$.

Notons $\mathcal{C}$ l'ensemble des réunions finies de rectangles deux à deux disjoints.

Montrer que $\mathcal{C}$ est un clan unitaire.

L'exercice 16, emploie une méthode importante souvent utilisée pour montrer que des ensembles sont mesurables.

Exercice 16.

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions boréliennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit E l'ensemble des x de $\mathbb{R}$ tels que la suite $(f_n(x))_{n\geq 1}$ converge.

Montrer que E est une partie borélienne de $\mathbb{R}$.

Exercice 17.

Soient f et g deux fonctions boréliennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; montrer que $F: \begin{array}{l}\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto f(x-y)g(y)\end{array}$ est borélienne.

Chapitre III.

Mesures positives. Espaces mesurés.

3.1. Mesures positives sur un clan unitaire.

Définition 12. Soit $\mathcal{C}$ un clan unitaire sur un ensemble non vide E. Une mesure positive μ sur le clan unitaire $\mathcal{C}$ est une application de $\mathcal{C}$ dans $\overline{\mathbb{R}}^+$ telle que :

(m_1) Il existe un élément A de $\mathcal{C}$ tel que $\mu(A) < +\infty$.

(m_2) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{C}$ deux à deux disjoints, telle que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}$, alors $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$.

Les propositions suivantes sont des conséquences immédiates de la définition.

Proposition 21. Si μ est une mesure positive sur un clan unitaire $\mathcal{C}$, $\mu(\emptyset) = 0$.

Proposition 22. Si μ est une mesure positive sur un clan unitaire $\mathcal{C}$, on a pour toute famille finie $(A_i)_{i\in I}$ d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{C}$:
$\mu\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mu(A_i)$.

Proposition 23. Si μ est une mesure positive sur un clan unitaire $\mathcal{C}$, et si A et B sont deux éléments de $\mathcal{C}$ tels que $A \subset B$, alors $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Proposition 24. Si μ est une mesure positive sur un clan unitaire $\mathcal{C}$, et si A et B sont deux éléments de $\mathcal{C}$, alors
$\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$.

Ce dernier résultat s'étend par récurrence à un nombre fini quelconque d'éléments de $\mathcal{C}$.

Exemple 9. Soit E un ensemble non vide. Prenons $\mathcal{C} = \mathcal{P}(E)$, et fixons $x_0 \in E$. L'application δ_{x_0} de $\mathcal{P}(E)$ dans $\overline{\mathbb{R}^+}$ définie par :

$$\delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 0 \text{ si } x_0 \notin A \\ 1 \text{ si } x_0 \in A \end{cases}$$

est une mesure positive sur $\mathcal{P}(E)$.
On l'appelle la mesure de Dirac en x_0.

Exemple 10. Soient E un ensemble non vide, $\mathcal{C} = \mathcal{P}(E)$. L'application μ de $\mathcal{C}$ dans $\overline{\mathbb{R}^+}$ qui à A associe le nombre d'éléments de A est une mesure positive sur $\mathcal{P}(E)$.

Définition 13. Soit μ une mesure positive sur un clan unitaire $\mathcal{C}$.
μ est dite finie si pour tout élément A de $\mathcal{C}$, $\mu(A) < +\infty$.
μ est dite σ-finie si tout élément A de $\mathcal{C}$ peut être recouvert par une famille dénombrable $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{C}$, telle que pour tout n, $\mu(A_n) < +\infty$.

Remarquons que si $\mathcal{C}$ est un clan unitaire sur E, et μ une mesure positive sur $\mathcal{C}$, pour que μ soit finie il faut et il suffit que $\mu(E) < +\infty$. Pour que μ soit σ-finie, il faut et il suffit qu'il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{C}$ telle que $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, et $\mu(A_n) < +\infty$.
Enfin il est clair que toute mesure finie est σ-finie.

Théorème 7. Soient μ une mesure positive sur un clan unitaire $\mathcal{C}$, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{C}$ telle que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}$.
On a alors $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$.

Démonstration.
Posons $A_0 = B_0$, et si $n \geq 1$ posons $B_n = A_n - A_{n-1}$.
Alors $B_n \in \mathcal{C}$. De plus si $n \neq p$ $B_n \cap B_p = \emptyset$.
$A_n = \bigcup_{p=0}^{n} B_p$, donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$.
On a $\mu(A_n) = \sum_{p=0}^{n} \mu(B_p)$.
D'autre part, $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n)$.

Mais la série $\sum_{p\in\mathbb{N}} \mu(B_p)$ étant une série à termes positifs,

$$\sum_{p\in\mathbb{N}} \mu(B_p) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{p\le n} \mu(B_p)\Big) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Remarquons que ce sup peut éventuellement être $+\infty$.

Proposition 25. Soit μ une mesure positive sur un clan unitaire $\mathcal{C}$. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}$ telle que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}$. On a alors :

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Démonstration.

On écrit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Big(\bigcup_{p\le n} A_p\Big)$.

La suite $\Big(\bigcup_{p\le n} A_p\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, donc

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\Big(\bigcup_{p\le n} A_p\Big)\Big) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu\Big(\bigcup_{p\le n} A_p\Big) ;$$

mais $\mu\Big(\bigcup_{p\le n} A_p\Big) \le \sum_{p\le n} \mu(A_p)$

donc $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mu\Big(\bigcup_{p\le n} A_p\Big) \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{p\le n} \mu(A_p) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$

ce qui démontre la proposition.

Proposition 26. Soient μ une mesure positive sur un clan unitaire $\mathcal{C}$, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{C}$ telle que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}$.

S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(A_{n_0}) < +\infty$, on a

$$\mu\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Démonstration.

$$A_{n_0} - \bigcap_{n\ge n_0} A_n = \bigcup_{n\ge n_0} (A_{n_0} - A_n)$$

La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante, la suite $(A_{n_0} - A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ; donc :

$\mu\Big(\bigcup_{n\ge n_0} (A_{n_0} - A_n)\Big) = \sup_{n\ge n_0} \mu(A_{n_0} - A_n)$, ou encore

$$\mu\Big(A_{n_0} - \bigcap_{n\ge n_0} A_n\Big) = \mu(A_{n_0}) - \inf_{n\ge n_0} \mu(A_n).$$

Mais d'autre part, $\bigcap_{n\ge n_0} A_n \subset A_{n_0}$, donc

$$\mu\Big(A_{n_0} - \bigcap_{n\ge n_0} A_n\Big) = \mu(A_{n_0}) - \mu\Big(\bigcap_{n\ge n_0} A_n\Big)$$

Du fait que $\mu(A_{n_0}) < +\infty$ on déduit que :

$$\mu\Big(\bigcap_{n\ge n_0} A_n\Big) = \inf_{n\ge n_0} \mu(A_n).$$

La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante on a aussi :

$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Remarquons que dans la proposition 26 l'hypothèse : il existe n_0 tel que $\mu(A_{n_0}) < +\infty$, ne peut être supprimée. (Considérer par exemple dans $\mathbb{R}$ muni de la mesure de Borel la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ où $A_n = [n, +\infty[$) On n'a donc pas un résultat tout à fait analogue à celui du théorème 7.

Définition 14. Soit μ une mesure positive sur un clan unitaire $\mathcal{C}$. Un élément A de $\mathcal{C}$ est dit μ-négligeable si $\mu(A) = 0$.

Si E est un ensemble non vide muni d'un clan unitaire $\mathcal{C}$ sur lequel est défini une mesure positive μ, nous emploierons les expressions "μ-presque partout dans E", ou "pour μ-presque tout x de E", ou encore μ-presque sûrement dans E" pour dire : pour tous les x d'un sous ensemble A de E

tel que le complémentaire de A est inclus dans un ensemble μ-négligeable.

On déduit immédiatement de la proposition 25 (page 54) la proposition 27.

Proposition 27. Soit μ une mesure positive sur un clan unitaire $\mathcal{C}$. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments μ-négligeables de $\mathcal{C}$, telle que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}$, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est μ-négligeable.

Il est à remarquer que lorsqu'on a affaire à une mesure sur une tribu la condition (m_2) s'exprime sous la forme :
Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{C}$, $\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$.
En effet dans ce cas l'hypothèse $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}$ est automatiquement satisfaite.

3.2. Espaces mesurés.

Définition 15. On appelle espace

mesuré un triplet $(E, \mathcal{C}, \mu)$, où $(E, \mathcal{C})$ est un espace mesurable, et μ une mesure positive sur la tribu $\mathcal{C}$.

Proposition 28. Soit $(E, \mathcal{C}, \mu)$ un espace mesuré. Etant donné un élément A de $\mathcal{C}$, la tribu $\mathcal{C}_{/A}$, induite par $\mathcal{C}$ sur A peut être définie par :
$\mathcal{C}_{/A} = \{ B \in \mathcal{C} \ ; B \subset A \}$.
L'application μ restreinte à $\mathcal{C}_{/A}$ est une mesure positive sur $\mathcal{C}_{/A}$.

Définition 16. Soit $(E, \mathcal{C}, \mu)$ un espace mesuré ; on appelle sous espace mesuré de $(E, \mathcal{C}, \mu)$ tout triplet $(A, \mathcal{C}_{/A}, \mu')$ où $A \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C}_{/A}$ est la tribu induite par $\mathcal{C}$ sur A, et μ' la restriction de μ à $\mathcal{C}_{/A}$.

Proposition 29. Soient $(E, \mathcal{C}, \mu)$ un espace mesuré, $(E', \mathcal{C}')$ un espace mesurable, f une application de E dans E' $\mathcal{C}\mathcal{C}'$-mesurable. L'application μ' de $\mathcal{C}'$ dans $\overline{\mathbb{R}}^+$ définie par $\mu'(B) = \mu(f^{-1}(B))$ est une mesure positive.

Définition 17. La mesure μ' définie dans la proposition précédente est appelée la mesure image par la fonction f de la mesure μ.

En ce qui concerne le produit des mesures le problème est le suivant : étant donnés deux espaces mesurés $(E_1, \mathcal{C}_1, \mu_1)$ et $(E_2, \mathcal{C}_2, \mu_2)$ nous voudrions mesurer l'espace mesurable $(E_1 \times E_1, \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)$ par une mesure positive μ de telle sorte que pour tout A de $\mathcal{C}_1$ et tout B de $\mathcal{C}_2$, $\mu(A \times B) = \mu_1(A) \cdot \mu_2(B)$.
Nous verrons comment cela est possible après avoir mis en place la méthode fondamentale du prolongement d'une mesure.

3.3. Prolongements d'une mesure positive

Etant donnée une mesure positive μ sur un clan unitaire $\mathcal{C}$, il est utile, afin d'obtenir un espace mesuré (et donc de savoir mesurer plus de parties), de trouver une mesure $\tilde{\mu}$ sur $\mathcal{C}(\mathcal{C})$ dont la restriction à

$\mathcal{C}$ est égale à μ.
Nous verrons que dans de nombreux cas de constructions de mesures, le problème se présente de cette façon. (Voir par exemple la construction de la mesure de Lebesgue.
Le théorème suivant permet de répondre à la question posée.

Théorème 8. Soit $\mathcal{C}$ un clan unitaire, μ une mesure positive sur $\mathcal{C}$. Il existe une mesure positive $\tilde{\mu}$ sur $\mathcal{T}(\mathcal{C})$ qui prolonge μ. Si de plus μ est σ-finie, le prolongement $\tilde{\mu}$ est unique, et la mesure $\tilde{\mu}$ est σ-finie.

Démonstration.
La démonstration comporte plusieurs étapes:

A. Les mesures extérieures.

Soit E un ensemble non vide; on appelle mesure extérieure sur E toute application λ de $\mathcal{P}(E)$ dans $\overline{\mathbb{R}}^+$ vérifiant:

(me_1) $\lambda(\emptyset) = 0$

(me_2) $\forall A\ \forall B\ \left(A \subset B \subset E \Longrightarrow \lambda(A) \leq \lambda(B)\right)$

(me_3) Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{P}(E)$, $\lambda(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(A_n)$.

A.1. Tribu associée à une mesure extérieure.
Soit λ une mesure extérieure sur E. L'ensemble $\mathcal{T}_\lambda$ des parties A de E telles que
$\lambda(B) = \lambda(B\cap A) + \lambda(B\cap \complement A)$ pour tout B de $\mathcal{P}(E)$
est une tribu sur E, et la restriction de λ à $\mathcal{T}_\lambda$ est une mesure positive sur $\mathcal{T}_\lambda$.

Remarquons tout d'abord que pour toutes parties A et B de E on a en vertu de (me_3):
$\lambda(B) \leq \lambda(B\cap A) + \lambda(B\cap\complement A)$.
Donc pour montrer qu'une partie A est dans $\mathcal{T}_\lambda$, il suffit d'établir que pour toute partie B de E:
$\lambda(B) \geq \lambda(B\cap A) + \lambda(B\cap\complement A)$.

1) $\mathcal{T}_\lambda$ est un clan unitaire: il est clair que $\emptyset \in \mathcal{T}_\lambda$, donc $\mathcal{T}_\lambda$ est une famille non vide.
D'après la définition de $\mathcal{T}_\lambda$ on voit que si A est un élément de $\mathcal{T}_\lambda$, il en est de même de $\complement A$.
Soient A et B deux éléments de $\mathcal{T}_\lambda$; alors pour toute partie P de E :

$\lambda(P) = \lambda(P \cap A) + \lambda(P \cap \complement A)$

$\lambda(P) = \lambda(P \cap A \cap B) + \lambda(P \cap A \cap \complement B) + \lambda(P \cap \complement(A \cap B))$

$\quad + \lambda(P \cap \complement A \cap \complement B)$

mais :

$(P \cap A \cap \complement B) \cup (P \cap \complement A \cap B) \cup (P \cap \complement A \cap \complement B) = P \cap \complement(A \cap B)$

donc en vertu de (me_3) :

$\lambda(P) \geq \lambda(P \cap A \cap B) + \lambda(P \cap \complement(A \cap B))$

ce qui montre que $A \cap B \in \mathcal{T}_\lambda$. Donc $\mathcal{T}_\lambda$ est un clan unitaire.

2) $\mathcal{T}_\lambda$ est une tribu, et $\lambda_{/\mathcal{T}_\lambda}$ est une mesure positive sur $\mathcal{T}_\lambda$:

λ vérifie (m_1) du fait que $\emptyset \in \mathcal{T}_\lambda$ et $\lambda(\emptyset) = 0$.

Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{T}_\lambda$, et si $P \subset E$, alors $\lambda\left(\bigcup_{n \leq k} A_n \cap P\right) = \sum_{n \leq k} \lambda(A_n \cap P)$ pour tout entier k.

En effet cette égalité est vraie pour $k = 0$.

Supposons la vraie à l'ordre k, et montrons qu'elle est vraie à l'ordre $k+1$:

$A_{k+1} \in \mathcal{T}_\lambda$, donc

$\lambda\left(\bigcup_{n \leq k+1} A_n \cap P\right) = \lambda\left(\bigcup_{n \leq k+1} A_n \cap P \cap A_{k+1}\right)$

$\quad + \lambda\left(\bigcup_{n \leq k+1} A_n \cap P \cap \complement A_{k+1}\right)$.

En utilisant le fait que A_{k+1} est disjoint de $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ on obtient :

$\lambda\left(\bigcup_{n \leq k+1} A_n \cap P\right) = \lambda(A_{k+1} \cap P) + \lambda\left(\bigcup_{n \leq k} A_n \cap P\right)$.

L'application de l'hypothèse de récurrence donne alors le résultat voulu.

$\mathcal{T}_\lambda$ étant un clan unitaire, si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{T}_\lambda$ et si $P \subset E$, alors :

$\lambda(P) = \lambda\left(\bigcup_{n \leq k} A_n \cap P\right) + \lambda\left(\complement\left(\bigcup_{n \leq k} A_n\right) \cap P\right)$.

Posons $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$; alors $\complement A \subset \complement\left(\bigcup_{n \leq k} A_n\right)$.

Par suite d'après (me_2) :

$\lambda(P) \geq \sum_{n \leq k} \lambda(A_n \cap P) + \lambda(\complement A \cap P)$.

Donc :

(1) $\lambda(P) \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(A_n \cap P) + \lambda(\complement A \cap P)$.

En appliquant (me_3) on obtient :

$\lambda(P) \geq \lambda(A \cap P) + \lambda(\complement A \cap P)$, ce qui montre que $A \in \mathcal{T}_\lambda$.

De plus en reprenant l'inégalité (1) appliquée avec $P = A$, on obtient : $\lambda(A) \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(A_n)$, ce qui montre que $\lambda(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(A_n)$ et permet d'affirmer que λ est une mesure positive sur $\mathcal{C}_\lambda$.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}_\lambda$; en posant $B_0 = A_0$, $B_{n+1} = A_{n+1} - \bigcup_{k\leq n} A_k$, on voit que les B_n forment une suite d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{C}_\lambda$ et que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$.

Donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}_\lambda$; par suite $\mathcal{C}_\lambda$ est une tribu.

B. Le prolongement.

B1. Mesure extérieure associée à une mesure positive.

Soit $\mathcal{C}$ un clan unitaire sur un ensemble E, et soit μ une mesure positive sur $\mathcal{C}$.

Pour tout $P \subset E$ posons :

$\mu^*(P) = \inf\left(\sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i)\right)$ où la borne inférieure est prise sur toutes les suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{C}$ telles que $P \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

(il en existe toujours au moins une, par exemple $A_n = E$ pour tout n).

Alors μ^* est une mesure extérieure sur E.

Il est clair que $\mu^*(\emptyset) = 0$ et que si $P_1 \subset P_2$ on a $\mu^*(P_1) \leq \mu^*(P_2)$.

Soient $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{P}(E)$, et $\varepsilon > 0$. Pour chaque n soit une suite $(A_k^n)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{C}$ telle que :

$P_n \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k^n$ et $\mu^*(P_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \geq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k^n)$.

Alors par définition de μ^* :

$$\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n\right) \leq \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ k\in\mathbb{N}}} \mu(A_k^n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k^n)\right)$$

Par suite : $\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(P_n) + \varepsilon$,

et ceci pour tout ε, ce qui implique :

$\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(P_n)$.

B.2. Etude de la tribu $\mathcal{C}_{\mu^*}$ associée à la mesure extérieure μ^*.

$\mathcal{C}_{\mu^*}$ contient la tribu $\mathcal{E}(\mathcal{C})$, et μ^* restreinte à $\mathcal{C}$ est égale à μ.

Soit $A \in \mathcal{C}$; il est clair que $\mu(A) \leq \mu^*(A)$; d'autre part si on considère la suite $A_0 = A$, $A_1 = \emptyset$, $A_2 = \emptyset$, ... on voit que $\mu^*(A) \leq \mu(A)$;

Donc $\mu(A) = \mu^*(A)$.

Soit $A \in \mathcal{C}$. Une partie P de E, et $\varepsilon > 0$ étant donnés, soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}$ telle que $P \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $\mu^*(P) + \varepsilon \geq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$.

On a alors :

$\mu^*(A_n) = \mu(A_n) = \mu(A_n \cap A) + \mu(A_n \cap \complement A)$

$\mu(A_n) = \mu^*(A_n \cap A) + \mu^*(A_n \cap \complement A)$;

donc :

$$\mu^*(P) + \varepsilon \geq \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(A_n \cap A) + \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(A_n \cap \complement A)$$

$$\mu^*(P) + \varepsilon \geq \mu^*\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cap A\Big) + \mu^*\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cap \complement A\Big)$$

$\mu^*(P) + \varepsilon \geq \mu^*(P\cap A) + \mu^*(P \cap \complement A)$, et ceci pour tout $\varepsilon > 0$.

Donc $\mu^*(P) \geq \mu^*(P\cap A) + \mu^*(P\cap \complement A)$, ce qui montre que $A \in \mathcal{C}_{\mu^*}$.

Puisque $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_{\mu^*}$, et que $\mathcal{C}_{\mu^*}$ est une tribu, on en déduit que $\mathcal{T}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}_{\mu^*}$.

Notons $\tilde{\mu}$ la restriction de μ^* à $\mathcal{T}(\mathcal{C})$.

On sait que μ^* restreinte à $\mathcal{C}_{\mu^*}$ est une mesure positive sur $\mathcal{C}_{\mu^*}$, donc $\tilde{\mu}$ est une mesure positive sur $\mathcal{T}(\mathcal{C})$; de plus $\mu^*|_{\mathcal{C}} = \tilde{\mu}|_{\mathcal{C}} = \mu$.

B.3. Unicité du prolongement dans le cas où la mesure μ est σ-finie.

μ étant σ-finie, il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments du clan unitaire $\mathcal{C}$, telle que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = E$, et $\mu(A_n) < +\infty$ pour tout n.

Soit alors la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$B_0 = A_0$, $B_n = A_n - \bigcup_{k\leq n-1} A_k$ si $n \geq 1$.

B_n est donc un élément de $\mathcal{C}$, et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = E$.

De plus, si $n \neq p$ $B_n \cap B_p = \emptyset$, et $\mu(B_n) < +\infty$.

Pour tout B de la tribu $\mathcal{T}(\mathcal{C})$ on peut donc écrire $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (B_n \cap B)$; donc si μ_1 est un prolongement de μ à $\mathcal{T}(\mathcal{C})$:

$\mu_1(B) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_1(B_n \cap B)$.

Nous allons montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\mu_1(B_n \cap B) = \tilde{\mu}(B_n \cap B)$. Pour cela remarquons tout d'abord que pour tout M de $\mathcal{T}(\mathcal{C})$ et pour toute suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{C}$ telle que : $M \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n$, on a :

$\mu_1(M) \leq \mu_1\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n\big) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_1(Q_n)$.

Donc $\mu_1(M) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(Q_n)$,

d'où

$$\mu_1(M) \leq \inf\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(Q_n)\Big) = \mu^*(M) = \tilde{\mu}(M).$$

Mais :

$\mu_1(B_n-(B_n\cap B))+\mu_1(B_n\cap B)=\mu_1(B_n)=\mu(B_n)$,

et $\mu(B_n)=\tilde{\mu}(B_n-(B_n\cap B))+\tilde{\mu}(B_n\cap B)$

donc :

$\mu_1(B_n-(B_n\cap B))+\mu_1(B_n\cap B)=\tilde{\mu}(B_n-(B_n\cap B))+\tilde{\mu}(B_n\cap B)$.

Or $\mu_1(B_n)=\tilde{\mu}(B_n)=\mu(B_n)<+\infty$, donc tous les nombres intervenant dans l'égalité précédente sont finis ; par suite :

$\mu_1(B_n-(B_n\cap B))-\tilde{\mu}(B_n-(B_n\cap B))=\tilde{\mu}(B_n\cap B)-\mu_1(B_n\cap B)$

D'après la remarque faite, le premier membre de cette égalité est négatif ou nul (appliquer la remarque avec $M=B_n-(B_n\cap B)$), tandis que le second membre est positif ou nul (appliquer la remarque avec $M=B_n\cap B$). Donc $\tilde{\mu}(B_n\cap B)=\mu_1(B_n\cap B)$.

Nous allons voir dans le paragraphe suivant comment ce théorème de prolongement permet de construire certaines mesures.

Auparavant nous allons nous occuper d'un autre problème de prolongement.

Définition 18. Soit $(E,\mathcal{C},\mu)$ un espace mesuré. La tribu $\mathcal{C}$ est dite μ-complète si :

$\forall A\,\forall B\ (A\subset B$ et $B\in\mathcal{C}$ et $\mu(B)=0)\Longrightarrow(A\in\mathcal{C})$

Le problème qui se pose est de savoir si étant donné un espace mesuré $(E,\mathcal{C},\mu)$, il existe un prolongement μ' de μ à une tribu $\mathcal{C}'$ qui soit μ' complète. Le théorème suivant donne une réponse positive à cette question, et montre aussi comment est construit un tel prolongement. Les ensembles de mesures nulles jouent un rôle primordial dans cette question.

Théorème 9. Soit $(E,\mathcal{C},\mu)$ un espace mesuré. Soit $\hat{\mathcal{C}}=\{A\cup N\ ;\ A\in\mathcal{C},\ N\subset M$ où $M\in\mathcal{C}$ et $\mu(M)=0\}$. $\hat{\mathcal{C}}$ est une tribu sur E, et μ se prolonge d'une manière unique en une mesure positive $\hat{\mu}$ sur $\hat{\mathcal{C}}$. $\hat{\mathcal{C}}$ est $\hat{\mu}$-complète.

Démonstration.

$\hat{\mathcal{C}}$ est non vide : il est clair en effet que $\mathcal{C}\subset\hat{\mathcal{C}}$.

Si $B\in\hat{\mathcal{C}}$, alors $B=A\cup N$ où $A\in\mathcal{C}$ et où $N\subset M$ avec $\mu(M)=0$.

Alors $\complement B=\complement(A\cup N)=(\complement(A\cup M))\cup((M-N)\cap\complement A)$.

Or $A \cup M \in \mathcal{C}$, donc $\complement(A \cup M) \in \mathcal{C}$ et $(M-N) \cap \complement A \subset M$; par suite $\complement B \in \widehat{\mathcal{C}}$.

Soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\widehat{\mathcal{C}}$.
$B_n = A_n \cup N_n$ où $A_n \in \mathcal{C}$ et $N_n \subset M_n$ avec $\mu(M_n) = 0$.

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\Big) \cup \Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n\Big).$$

Mais $\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\Big) \in \mathcal{C}$ et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$; d'après la proposition 27 (page 57) $\mu\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n\Big) = 0$, donc $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \widehat{\mathcal{C}}$, et $\widehat{\mathcal{C}}$ est une tribu.

S'il existe un prolongement de μ en une mesure $\widehat{\mu}$ sur $\widehat{\mathcal{C}}$, nécessairement ce prolongement est unique : en effet nécessairement on aura : $\widehat{\mu}(A \cup N) \le \widehat{\mu}(A) + \widehat{\mu}(N) \le \widehat{\mu}(A) + \widehat{\mu}(M)$ et donc $\widehat{\mu}(A \cup N) \le \widehat{\mu}(A) = \mu(A)$.
D'autre part $\widehat{\mu}(A \cup N) \ge \widehat{\mu}(A) = \mu(A)$.
Donc $\widehat{\mu}(A \cup N) = \mu(A)$.
Soit B un élément de $\widehat{\mathcal{C}}$, et supposons que B admette deux décompositions sous la forme :
$B = A \cup N = A' \cup N'$ avec $A \in \mathcal{C}$, $A' \in \mathcal{C}$,
$N \subset M$, $N' \subset M'$, $\mu(M) = 0$, $\mu(M') = 0$.
Alors : $A' \subset A \cup N \subset A \cup M$, d'où $\mu(A') \le \mu(A)$.

De même $\mu(A) \le \mu(A')$, donc $\mu(A) = \mu(A')$.
On peut donc définir l'application $\widehat{\mu}$ par :

$$\widehat{\mu} : \widehat{\mathcal{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$$
$$A \cup N \longmapsto \mu(A)$$

Ainsi définie l'application $\widehat{\mu}$ est une mesure positive sur $\widehat{\mathcal{C}}$. En effet, d'une part $\mu(\emptyset) = 0$, d'autre part si B_n est une suite d'éléments deux à deux disjoints de $\widehat{\mathcal{C}}$, alors $B_n = A_n \cup N_n$ avec $A_n \in \mathcal{C}$ et $N_n \subset M_n$ où $\mu(M_n) = 0$; donc $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\Big) \cup \Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n\Big)$, ce qui entraîne que $\widehat{\mu}\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\Big) = \mu\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \widehat{\mu}(B_n)$.
De plus, si $B \in \widehat{\mathcal{C}}$ et $\widehat{\mu}(B) = 0$, et si $N \subset B$ alors B est inclus dans un $A \in \mathcal{C}$ tel que $\mu(A) = 0$, et donc en écrivant $N = \emptyset \cup N$ et en remarquant que $N \subset A$, on voit que $N \in \widehat{\mathcal{C}}$ et $\widehat{\mu}(N) = 0$.
Ceci montre que la tribu $\widehat{\mathcal{C}}$ est $\widehat{\mu}$-complète.
Remarquons encore que si μ est σ-finie, il en est de même de $\widehat{\mu}$.

Définition 19. $\widehat{\mathcal{C}}$ est appelée la tribu complétée de la tribu $\mathcal{C}$ par rapport à la mesure μ.

Théorème 10 : $\widehat{\mathcal{C}}$ est la plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$ vérifiant : il existe un prolongement de μ en une mesure positive $\widehat{\mu}$ sur $\widehat{\mathcal{C}}$ telle que $\widehat{\mathcal{C}}$ soit $\widehat{\mu}$-complète.

La proposition suivante indique une autre façon de définir la tribu $\widehat{\mathcal{C}}$.

Proposition 30. La tribu $\widehat{\mathcal{C}}$ peut être définie par :

$$\widehat{\mathcal{C}} = \{B ; \exists A_1 \in \mathcal{C}_1 , \exists A_2 \in \mathcal{C}_2 \text{ t.q. } A_1 \subset B \subset A_2 \text{ et } \mu(A_2 - A_1) = 0\}$$

Les deux sortes de prolongements que nous avons étudiés nous permettent de faire les constructions suivantes :
à partir d'une mesure σ-finie μ sur un clan unitaire $\mathcal{C}$, nous pouvons prolonger μ d'une manière unique en une mesure positive $\tilde{\mu}$ sur $\mathcal{E}(\mathcal{C})$, et $\tilde{\mu}$ est σ-finie.
$\tilde{\mu}$ peut être alors prolongée d'une manière unique en une mesure positive $\widehat{\tilde{\mu}}$ sur $\widehat{\mathcal{E}(\mathcal{C})}$, et $\widehat{\tilde{\mu}}$ est aussi σ-finie.
Mais en fait il faut remarquer que la

mesure $\widehat{\tilde{\mu}}$ est obtenue directement au cours de la première construction : c'est μ^* restreinte à la tribu $\mathcal{C}_{\mu^*}$.

Théorème 11. Si μ est une mesure σ-finie sur le clan unitaire $\mathcal{C}$, alors

$$\widehat{\mathcal{E}(\mathcal{C})} = \mathcal{C}_{\mu^*} , \text{ et } \widehat{\tilde{\mu}} = \mu^*|_{\mathcal{C}_{\mu^*}}$$

Démonstration.
Montrons tout d'abord que $\mathcal{C}_{\mu^*}$ est une tribu $\mu^*|_{\mathcal{C}_{\mu^*}}$-complète, ce qui prouvera d'après le théorème 10 (page 72) que $\widehat{\mathcal{E}(\mathcal{C})} \subset \mathcal{C}_{\mu^*}$.
Pour cela soit $A \in \mathcal{C}_{\mu^*}$ avec $\mu^*(A) = 0$, et soit $B \subset A$.
Pour tout P inclus dans E, d'après (me_2), $\mu^*(P) \geq \mu^*(P \cap \complement B)$; de plus $B \subset A$ implique $\mu^*(P \cap B) \leq \mu^*(P \cap A) \leq \mu^*(A) = 0$.
Donc $\mu^*(P \cap B) = 0$.
On en déduit que $\mu^*(P) \geq \mu^*(P \cap B) + \mu^*(P \cap \complement B)$ ce qui prouve que $B \in \mathcal{C}_{\mu^*}$.
Montrons maintenant que $\mathcal{C}_{\mu^*} \subset \widehat{\mathcal{E}(\mathcal{C})}$.
Soit $A \in \mathcal{C}_{\mu^*}$. Pour tout $n \geq 1$ il existe une suite $(A_p^n)_{p \in \mathbb{N}}$ d'éléments deux à deux

disjoints de $\mathcal{C}$ telle que $A \subset \bigcup_{p\in\mathbb{N}} A_p^n$

et $\mu^*(A) + \frac{1}{n} \geq \sum_{p\in\mathbb{N}} \mu(A_p^n)$.

Posons $B^n = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} A_p^n$; alors $B^n \in \mathcal{E}(\mathcal{C})$ et

$\mu^*(A) + \frac{1}{n} \geq \tilde{\mu}(B^n) \geq \mu^*(A)$

Soit $B = \bigcap_{n>0} B_n$, alors $B \in \mathcal{E}(\mathcal{C})$ et $\tilde{\mu}(B) = \mu^*(A) = \mu^*(B)$.

(En effet, $\forall n$, $A \subset B \subset B^n$; donc $\mu^*(A) \leq \mu^*(B) = \tilde{\mu}(B)$

et $\tilde{\mu}(B) \leq \tilde{\mu}(B^n) \leq \mu^*(A) + \frac{1}{n}$)

Comme $A \subset B$ on en déduit $\mu^*(B-A) = 0$.

En réappliquant le résultat démontré pour A, à l'élément $B-A$ de $\mathcal{C}_{\mu^*}$, on voit que $B-A$ peut être inclus dans un élément U de $\mathcal{E}(\mathcal{C})$ ayant même mesure extérieure que lui.

$B-A \subset U$ avec $\mu^*(U) = \mu^*(B-A) = 0$.

alors $A = (B-U) \cup (A \cap U)$ où $B-U \in \mathcal{E}(\mathcal{C})$

et $A \cap U \subset U$ avec $U \in \mathcal{E}(\mathcal{C})$ et $\tilde{\mu}(U) = 0$; ceci prouve que $A \in \widehat{\mathcal{E}(\mathcal{C})}$.

D'autre part, $\hat{\mu}$ et $\mu^*|_{\mathcal{C}_{\mu^*}}$ sont deux mesures positives sur $\widehat{\mathcal{E}(\mathcal{C})}$, qui prolongent $\tilde{\mu}$; elles sont donc égales. (cf. theorème 9 page 69).

3.4. Constructions de mesures.

A. Mesure produit.

Soient $(E_1, \mathcal{C}_1, \mu_1)$ et $(E_2, \mathcal{C}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés. On suppose que les mesures μ_1 et μ_2 sont σ. finies. On se propose de définir une mesure μ sur $(E_1 \times E_2, \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)$ vérifiant :
$\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2)$ pour tout A_1 de $\mathcal{C}_1$ et tout A_2 de $\mathcal{C}_2$.

A.1. Le clan des réunions finies de rectangles deux à deux disjoints.

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des éléments de la forme $A = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \times B_i)$ où les rectangles $A_i \times B_i$ sont disjoints deux à deux, et où $A_i \in \mathcal{C}_1$ et $B_i \in \mathcal{C}_2$.

Proposition 31. $\mathcal{C}$ est un clan unitaire sur $E_1 \times E_2$.

Démonstration.

Remarquons que l'intersection de deux rectangles est un rectangle :

$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$

avec $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{C}_1$ et $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{C}_2$.
On en conclut que si $A \in \mathcal{C}$ et $A' \in \mathcal{C}$ alors $A \cap A' \in \mathcal{C}$.
Soit $A_1 \times B_1$ un rectangle, alors
$\complement(A_1 \times B_1) = (\complement A_1 \times B_1) \cup (A_1 \times \complement B_1) \cup (\complement A_1 \times \complement B_1)$
donc $\complement(A_1 \times B_1) \in \mathcal{C}$.
Par suite si $A \in \mathcal{C}$, $\complement A \in \mathcal{C}$, et donc $\mathcal{C}$ est un clan unitaire sur $E_1 \times E_2$.

A.2. Définition d'une mesure sur $\mathcal{C}$, adaptée au problème posé.
Pour tout $A \in \mathcal{C}$ et pour toute décomposition (δ) de A sous forme de réunion finie de rectangles deux à deux disjoints,

$$(\delta) \qquad A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \times B_i$$

on pose :

$$\mu_\delta(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu_1(A_i)\, \mu_2(B_i)$$

Proposition 32. Si (δ) et (δ') sont deux décompositions de A, alors $\mu_\delta(A) = \mu_{\delta'}(A)$.

Démonstration.
Remarquons tout d'abord que si un

rectangle $P \times Q$ est réunion finie de rectangles deux à deux disjoints :

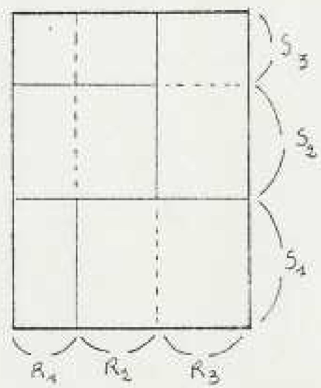
$$P \times Q = \bigcup_{i=1}^{n} P_i \times Q_i \,,$$

alors $\mu_1(P) \times \mu_2(Q) = \sum_{i=1}^{n} \mu_1(P_i) \times \mu_2(Q_i)$.
On voit en effet que $P = \bigcup_{i=1}^{n} P_i$ et $Q = \bigcup_{i=1}^{n} Q_i$.
On décompose alors $\bigcup_{i=1}^{n} P_i$ en ses atomes : (cf. ex. 11 page 44)

$$P = \bigcup_{i=1}^{n} P_i = \bigcup_{j \in J} R_j \,,$$

et on décompose $\bigcup_{i=1}^{n} Q_i$ en ses atomes :

$$Q = \bigcup_{i=1}^{n} Q_i = \bigcup_{k \in K} S_k \,.$$



Alors $P \times Q = \bigcup_{(j,k) \in J \times K} R_j \times S_k$.

D'autre part :

$$\sum_{(j,k)} \mu_1(R_j)\cdot\mu_2(S_k) = \Big(\sum_j \mu_1(R_j)\Big)\Big(\sum_k \mu_2(S_k)\Big)$$

donc :

$$\sum_{(j,k)} \mu_1(R_j)\cdot\mu_2(S_k) = \mu_1(P)\cdot\mu_2(Q)$$

Remarquons maintenant que l'on peut trouver une partition de $J\times K$ sous la forme $J\times K = J_1\times K_1 \cup J_2\times K_2 \cup \dots \cup J_n\times K_n$ en n sous ensembles de $J\times K$ de telle sorte que

$$P_i\times Q_i = \bigcup_{(j,k)\in J_i\times K_i} R_j\times S_k \ .$$

(On pourra définir $J_i = \{ j\in J \ ; \ R_j \subset P_i\}$ et $K_i = \{k\in K \ ; \ S_k\subset Q_i\}$)

Il est clair alors que comme précédemment

$$\mu_1(P_i)\cdot\mu_2(Q_i) = \sum_{(j,k)\in J_i\times K_i} \mu_1(R_j)\cdot\mu_2(S_k) .$$

Par suite :

$$\mu_1(P)\cdot\mu_2(Q) = \sum_{i=1}^{n} \mu_1(P_i)\cdot\mu_2(Q_i) \ .$$

Soient maintenant deux décompositions (δ) et (δ') d'un élément A de $\mathcal{C}$.

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i\times B_i = \bigcup_{j=1}^{m} C_j\times D_j$$

Alors :

$$A_i\times B_i = \bigcup_{j=1}^{m} (C_j\cap A_i)\times(D_j\cap B_i) \ ,$$

et d'après ce qui a été vu :

$$\mu_1(A_i)\mu_2(B_i) = \sum_{j=1}^{m} \mu_1(C_j\cap A_i)\cdot\mu_2(D_j\cap B_i)$$

et donc :

$$\mu_\delta(A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mu_1(C_j\cap A_i)\cdot\mu_2(D_j\cap B_i)$$

de même :

$$\mu_{\delta'}(A) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \mu_1(C_j\cap A_i)\cdot\mu_2(D_j\cap B_i)$$

ce qui montre que $\mu_\delta(A) = \mu_{\delta'}(A)$.

On peut donc définir l'application :

$$\mu : \begin{array}{l} \mathcal{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+ \\ A \longmapsto \mu_\delta(A) \end{array}$$

Proposition 33. μ est une mesure positive σ-finie sur le clan unitaire $\mathcal{C}$.

Démonstration.

Il est clair que l'on peut trouver $A\in\mathcal{C}$ tel que $\mu(A)<\infty$.
D'autre part d'après la définition de μ, on voit que μ est additive.
Pour montrer que μ est dénombrablement

additive, il suffit de faire une démonstration analogue à celle de la proposition 32 (page 76)
Par ailleurs, il est clair que μ est σ-finie.

A.3. Mesure produit.

Le théorème de prolongement (Théorème 8 page 60) nous permet d'affirmer qu'il existe une mesure $\tilde{\mu}$ et une seule sur $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 = \mathcal{E}(\mathcal{C})$, qui prolonge μ.
C'est par définition la mesure produit $\mu_1 \times \mu_2$.

Remarquons que la démonstration donnée ici est assez lourde. Il est en fait plus commode, bien que ce résultat soit spécifiquement un résultat de théorie de la mesure, de faire appel à la théorie de l'intégration pour le démontrer.
(cf. théorème de Fubini page 146).
En fait on a très souvent intérêt à utiliser l'interaction entre mesure et intégration, et à profiter du double aspect : ensembliste et fonctionnel, des problèmes.

B. Mesure de Borel, et mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Il s'agit de construire une mesure sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, de telle sorte que la mesure d'un intervalle (a, b) soit sa longueur $b-a$.

B.1. Le clan des réunions finies d'intervalles deux à deux disjoints.

Notons $\mathcal{C}$ l'ensemble des réunions finies d'éléments deux à deux disjoints de l'ensemble $\mathcal{I}$ des intervalles de $\mathbb{R}$.

Proposition 34. $\mathcal{C}$ est un clan unitaire sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.
Remarquons que l'intersection de deux intervalles est un intervalle.
Soient $A = \bigcup_k P_k$ et $B = \bigcup_j Q_j$ deux éléments de $\mathcal{C}$ décomposés en réunions finies d'intervalles deux à deux disjoints.
Alors $A \cap B = (\bigcup_k P_k) \cap (\bigcup_j Q_j) = \bigcup_{j,k} (P_k \cap Q_j)$
et les $P_k \cap Q_j$ sont des intervalles deux à deux

disjoints. Donc $A \cap B' \in \mathcal{C}$.

On montre par récurrence que si $(A_i)_{1 \le i \le n}$ est une famille finie d'éléments de $\mathcal{C}$, alors $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ est un élément de $\mathcal{C}$.

Remarquons maintenant que le complémentaire d'un intervalle est soit un intervalle, soit une réunion de deux intervalles disjoints. Donc le complémentaire d'un intervalle est un élément de $\mathcal{C}$. Si $A = \bigcup_k P_k$ est un élément de $\mathcal{C}$ décomposé en réunion finie d'intervalles deux à deux disjoints, alors $\complement A = \bigcap_k \complement P_k$; or $\complement P_k \in \mathcal{C}$, donc $\complement A \in \mathcal{C}$.

On déduit de cette étude que $\mathcal{C}$ est un clan unitaire sur $\mathbb{R}$.

B.2. Mesure sur le clan $\mathcal{C}$, attachée à la longueur des intervalles.

Pour tout $A \in \mathcal{C}$, et toute décomposition (δ) de A sous forme de réunion finie d'intervalles deux à deux disjoints :

$(\delta) \quad A = \bigcup_k P_k$

on pose:

$\mu_\delta(A) = \sum_k \ell(P_k)$ où $\ell(P_k)$ est la longueur de P_k.

($\mu_\delta(A)$ est donc un élément de $\overline{\mathbb{R}^+}$)

Proposition 34. Si (δ): $A = \bigcup_k P_k$ et (δ'): $A = \bigcup_j Q_j$ sont deux décompositions de A, alors $\mu_\delta(A) = \mu_{\delta'}(A)$.

Démonstration.

Remarquons que si un intervalle (a, b) est réunion finie des intervalles deux à deux disjoints (a_i, b_i) où $0 \le i \le n$, alors les points a_i et b_i sont tels que:

$a = a_{i_0} \le b_{i_0} = a_{i_1} \le b_{i_1} = a_{i_2} \le b_{i_2} \dots = a_{i_m} \le b_{i_m} = b$

et donc:

$\ell(a, b) = \sum_{i=0}^{n} \ell(a_i, b_i)$

Remarquons maintenant que $P_k = P_k \cap A = \bigcup_j (P_k \cap Q_j)$, et que les $P_k \cap Q_j$ sont deux à deux disjoints ;

donc $\ell(P_k) = \sum_j \ell(P_k \cap Q_j)$,

et par suite $\mu_\delta(A) = \sum_{k,j} \ell(P_k \cap Q_j)$.

On démontre de même que $\mu_{\delta'}(A) = \sum_{k,j} \ell(P_k \cap Q_j)$.

La proposition 34 nous permet de définir pour tout $A \in \mathcal{C}$, $\mu(A) = \mu_\delta(A)$, ce nombre étant indépendant de la décomposition choisie.

Proposition 35. L'application $\mu : \mathcal{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$, $A \longmapsto \mu(A)$ est une mesure positive σ-finie.

Démonstration.

Il est clair qu'il existe $A \in \mathcal{C}$ tel que $\mu(A) < +\infty$.
D'autre part, par définition même de μ, si A et B sont deux éléments disjoints de $\mathcal{C}$, $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.
Soit A un élément de $\mathcal{C}$, et $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}$ telle que $A \subset \bigcup_{n \geq 1} A_n$;
alors $\mu(A) \leq \sum_{n \geq 1} \mu(A_n)$.
Supposons tout d'abord que A est borné, et soit $\varepsilon > 0$. Il existe un élément compact K de $\mathcal{C}$ tel que $K \subset A$ et $\mu(K) \geq \mu(A) - \frac{\varepsilon}{2}$.
Pour chaque A_n on peut trouver un ouvert $\mathcal{O}_n$ élément de $\mathcal{C}$ tel que $A_n \subset \mathcal{O}_n$ et
$\mu(\mathcal{O}_n) \leq \mu(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$

alors $K \subset \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{O}_n$.

On peut donc extraire un recouvrement fini $\mathcal{O}_{n_1}, \mathcal{O}_{n_2}, \ldots, \mathcal{O}_{n_s}$ du compact K.
Donc en utilisant l'additivité finie :
$\mu(K) \leq \sum_{i=1}^{s} \mu(\mathcal{O}_{n_i})$.
alors :
$$\mu(A) \leq \mu(K) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{i=1}^{s} \mu(\mathcal{O}_{n_i}) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{n \geq 1} \mu(A_n) + \sum_{n \geq 1} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$\mu(A) \leq \sum_{n \geq 1} \mu(A_n) + \varepsilon$;

d'où $\mu(A) \leq \sum_{n \geq 1} \mu(A_n)$.

Si maintenant A n'est pas borné, alors A contient un intervalle du type $(a, +\infty)$ ou du type $(-\infty, a)$. (En effet A, ne peut être réunion finie d'intervalles bornés).
Supposons par exemple que $(a, +\infty) \subset A$;
posons $B_n = (a, n)$ où $n > a$; alors :
$B_n \subset \bigcup_{k \geq 1} A_k$; donc d'après ce que l'on vient de démontrer : $\mu(B_n) \leq \sum_{k \geq 1} \mu(A_k)$,
c'est à dire :
$n - a \leq \sum_{k \geq 1} \mu(A_k)$, et ceci pour tout n,
donc $\sum_{k \geq 1} \mu(A_k) = +\infty$, ce qui démontre l'inégalité voulue.

Soit maintenant $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{C}$ telle que $A = \bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{C}$.

On vient de montrer que $\mu(A) \leq \sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$;
d'autre part puisque $\bigcup_{n=1}^{N} A_n \subset A$, on a :
$\mu(\bigcup_{n=1}^{N} A_n) \leq \mu(A)$, c'est à dire $\sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) \leq \mu(A)$.
On en déduit que $\sum_{n\geq 1} \mu(A_n) \leq \mu(A)$, et donc que $\sum_{n\geq 1} \mu(A_n) = \mu(A)$.

μ est donc une mesure positive sur $\mathcal{C}$.
En écrivant $\mathbb{R}$ sous la forme $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (]n, n+1])$, on voit que μ est σ-finie.

B.3. Mesure de Borel et mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.
Remarquons que la tribu $\mathcal{T}(\mathcal{C})$ engendrée par $\mathcal{C}$, est la tribu borélienne $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}$.
En vertu du théorème de prolongement, il existe une mesure et une seule sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ qui prolonge la mesure μ définie au paragraphe précédent, et cette mesure est σ-finie. C'est la mesure de Borel sur $\mathbb{R}$; on la note dx (ou dy, ou dt, ...).
La tribu de Lebesgue est alors la tribu complétée de la tribu borélienne pour la mesure dx.
Le prolongement de la mesure de Borel à la tribu de Lebesgue est appelé mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$; on la notera aussi dx, sauf dans les cas où il sera vraiment nécessaire de distinguer mesure de Borel et mesure de Lebesgue ; dans ces cas, dx sera la mesure de Borel, et $\widehat{dx}$ la mesure de Lebesgue.

C. Mesure associée à une fonction de répartition.

Proposition 36. Soit ν une mesure positive finie sur la tribu borélienne $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ de $\mathbb{R}$. Posons $f_\nu(x) = \nu(]-\infty, x[)$; alors f_ν est une fonction bornée, monotone croissante, continue à gauche et telle que $\lim_{x\to-\infty} f_\nu(x) = 0$.

Démonstration.
ν étant une mesure positive fini sur la tribu borélienne $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, pour tout réel x on peut

écrire :

$0 \leq \nu(]-\infty, x[) \leq \nu(\mathbb{R}) < +\infty$.

Donc f_ν est une fonction bornée.

Si $x \leq x'$, alors $]-\infty, x[\subset]-\infty, x'[$; donc $\nu(]-\infty, x[) \leq \nu(]-\infty, x'[)$, c'est à dire $f_\nu(x) \leq f_\nu(x')$; ceci montre que f_ν est croissante.

Pour toute suite croissante $(x_n)_{n\geq 1}$ qui converge vers x, posons $A_n =]-\infty, x_n[$; la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante de boréliens telle que $\bigcup_{n\geq 1} A_n =]-\infty, x[$.

Par suite $\nu(]-\infty, x[) = \sup_{n\geq 1} \nu(A_n) = \lim_{n\to\infty} f_\nu(x_n)$.

Ceci montre que f_ν est continue à gauche.

Pour toute suite décroissante $(x_n)_{n\geq 1}$ qui diverge vers $-\infty$, posons $A_n =]-\infty, x_n[$; la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante de boréliens telle que $\bigcap_{n\geq 1} A_n = \emptyset$; de plus, la mesure ν est finie, donc :

$\nu(\bigcap_{n\geq 1} A_n) = \inf_{n\geq 1} \nu(A_n) = \lim_{n\to\infty} f_\nu(x_n)$;

ce qui montre que :

$\lim_{x\to-\infty} f_\nu(x) = 0$.

Nous nous proposons maintenant de donner une réciproque de cette proposition.

Proposition 37. Soit F une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$, bornée, croissante, continue à gauche, telle que $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$. Alors il existe une mesure positive finie ν, sur la tribu borélienne $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, et une seule telle que : $F = f_\nu$.

Démonstration.

Il s'agit donc, là encore, de construire une mesure ; nous raisonnerons de la même manière que pour la construction de la mesure de Borel.

S'il existe une mesure ν répondant à la question, alors on a nécessairement :

$$\left.\begin{aligned}
&\nu(]-\infty, a[) = F(a) \\
&\nu(]-\infty, a]) = F(a^+) = \lim_{x\to a^+} F(x) \\
&\nu(]a, +\infty[) = M - F(a^+) \quad \text{où } M = \sup_x F(x) \\
&\nu([a, +\infty[) = M - F(a) \\
&\nu(]a, b[) = F(b) - F(a^+) \\
&\nu([a, b[) = F(b) - F(a) \\
&\nu([a, b]) = F(b^+) - F(a) \\
&\nu(]a, b]) = F(b^+) - F(a^+)
\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{I})$$

Donc ν est entièrement déterminée sur les intervalles, et par conséquent sur le clan des réunions finies d'intervalles deux à deux disjoints. Ceci implique l'unicité de ν (si cette mesure existe.)

Soient A un élément de $\mathcal{C}$, et (δ) une décomposition de A sous la forme $A = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$ où les intervalles I_i sont deux à deux disjoints.

Posons $\nu_\delta(A) = \sum_{i=1}^{n} \nu(I_i)$ où les $\nu(I_i)$ sont donnés par les formules (I).

Remarquons que si un intervalle I s'écrit comme réunion finie d'intervalles deux à deux disjoints $I = \bigcup_{i=1}^{n} I_n$ alors $\nu(I) = \sum_{i=1}^{n} \nu(I_n)$.

Ceci nous permet de voir que si A admet deux décompositions (δ) et (δ'), alors $\nu_\delta(A) = \nu_{\delta'}(A)$.

On peut alors définir $\nu(A) = \nu_\delta(A)$; il nous reste à vérifier la σ-additivité de ν.

Pour cela il suffit de remarquer que grâce à la continuité à gauche et au comportement à l'infini de F, pour chaque $A \in \mathcal{C}$, on peut trouver un compact K de $\mathcal{C}$ tel que $K \subset A$ et $\nu(K) \geq \nu(A) - \varepsilon/2$, et que si $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_n$ (où $A_n \in \mathcal{C}$), pour chaque n on peut trouver un ouvert $\mathcal{O}_n$ élément de $\mathcal{C}$ tel que $A_n \subset \mathcal{O}_n$

et $\nu(\mathcal{O}_n) \leq \nu(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$.

La démonstration se poursuit alors comme celle de la proposition 35 (page 84).

f_ν est appelée la fonction de répartition de la mesure ν.

Nous renvoyons à l'exercice n° 30 page 101 pour une analyse plus détaillée des démonstrations de la proposition 35 et de la proposition 37.

Exercices.

Exercice 18.

Montrer qu'il est équivalent de dire qu'un sous ensemble de $\mathbb{R}$ est de mesure nulle au sens de l'exercice 9 (page 19) ou qu'il est de mesure de Lebesgue nulle.

Exercice 19.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1. Montrer que dans $\mathbb{R}^2$, le graphe de f est de mesure nulle.

Exercice 20.

Montrer que dans $\mathbb{R}^n$, le complémentaire d'une partie de mesure de Lebesgue nulle est dense.
Trouver une partie dense dont le complémentaire n'est pas de mesure de Lebesgue nulle.

Exercice 21.

Montrer qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}^n$, à

valeurs dans $\mathbb{R}$ qui est continue presque partout est $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbb{R}^n}\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mesurable. ($\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbb{R}^n}$ est la tribu de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$).
(Remarquons qu'on est souvent amené à grossir la tribu de l'espace de départ en prenant la tribu de Lebesgue au lieu de celle de Borel : il y a en effet alors plus de fonctions mesurables ; par contre on ne grossit jamais la tribu d'arrivée, car alors on risque de perdre des fonctions mesurables)

Exercice 22.

Soit $\varepsilon > 0$; construire dans $\mathbb{R}$ un ouvert dense, et de mesure inférieure à ε.
Montrer qu'il existe des ensembles négligeables non dénombrables et denses dans $\mathbb{R}$.

Dans l'exercice suivant on montre l'existence d'ensembles non boréliens et même non lebesguiens sur $\mathbb{R}$.

Exercice 23.

Considérons sur $\mathbb{R}$ la relation d'équivalence $x \mathcal{R} y$ si et seulement si $x - y \in \mathbb{Q}$.

Toutes les classes d'équivalence ont une intersection non vide avec $]0,1]$. Choisissons dans chaque classe un point de $]0,1]$ (axiome du choix). Soit E l'ensemble ainsi obtenu ; $E \subset]0,1]$.

Soient a_1 et a_2 deux rationnels distincts.

Posons :

$E_1 = \{x \,;\, x = e + a_1 \,,\, e \in E\}$

$E_2 = \{x \,;\, x = e + a_2 \,,\, e \in E\}$

Montrer que $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.

Soient $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ l'ensemble des nombres rationnels de l'intervalle $]-1,1[$, et $E_n = \{x \,;\, x = e + a_n \,,\, e \in E\}$.

Montrer que $]0,1] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ et que $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset]-1,2[$.

Si μ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, et si l'on suppose que $\mu(E) = \alpha$, montrer que $\mu(E_n) = \alpha$.

En conclure que E n'est pas mesurable.

L'exercice qui suit, fait montrer un résultat connu sous le nom de lemme de Borel Cantelli, très utile en probabilités.

Exercice 24.

Notons dv_n la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

Soit $(E_i)_{i \geq 1}$ une suite de parties mesurables non vides de $\mathbb{R}^n$.

1°) Notons A l'ensemble des x de $\mathbb{R}^n$ qui appartiennent à une infinité de E_i.

a) Montrer que A est mesurable.

b) Montrer que si $dv_n\left(\bigcup_{i \geq 1} E_i\right) < +\infty$, alors $dv_n(A) \geq \alpha = \inf_{i \geq 1} \left(dv_n(E_i)\right)$.

Donner un exemple prouvant que la condition $dv_n\left(\bigcup_{i \geq 1} E_i\right) < +\infty$ n'est pas superflue.

c) Montrer que si $\sum_{i \geq 1} dv_n(E_i) < +\infty$, alors A est négligeable.

2°) Pour tout $k \geq 1$, on note A_k l'ensemble des points qui appartiennent à au moins k ensembles E_i. Montrer que A_k est mesurable et que $k\, dv_n(A_k) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} dv_n(E_i)$.

Les deux exercices suivants introduisent des notions de convergence, et les comparent entre elles. Ainsi l'exercice 25 étudie

les rapports entre convergence simple et convergence presque uniforme (Théorème d'Egoroff.)
L'exercice 26 étudie la convergence en mesure.

Exercice 25.

On se propose de démontrer le résultat suivant :
Soit μ une mesure positive finie sur un espace mesurable $(E,\mathcal{E})$. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\overline{\mathbb{R}}$, finies presque partout, qui converge presque partout sur E vers une fonction f finie presque partout.
Alors quel que soit $\varepsilon>0$ il existe un sous ensemble F de E, mesurable, tel que $\mu(F)<\varepsilon$, et tel que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur $E-F$.
Pour cela, posons $E_n^m = \bigcap_{i=n}^{\infty} \{x ; |f_i(x)-f(x)| < \frac{1}{m}\}$.
Montrer que :
$E_1^m \subset E_2^m \subset \dots \subset E_n^m \subset \dots$
Montrer que :
$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^m \supset E-H$ où $\mu(H)=0$.
En conclure que $\lim_{n\to\infty} \mu(E-E_n^m)=0$.

Soit pour chaque m, un $n_0(m)$ tel que
$\mu(E-E_{n_0(m)}^m) < \frac{\varepsilon}{2^m}$.

Posons $F=\bigcup_{m=1}^{\infty}(E-E_{n_0(m)}^m)$.
Montrer que F répond à la question.
Enoncer et démontrer une réciproque du théorème précédent.

Exercice 26.

Soit $(E,\mathcal{E},\mu)$ un espace mesuré ; on suppose en outre que μ est une mesure finie.
Soient $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions réelles, mesurables sur E, f une fonction réelle mesurable sur E.
Pour tout $\varepsilon>0$, posons :
$E_n(\varepsilon) = \{x ; |f_n(x)-f(x)| \geq \varepsilon\}$; montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge vers f μ-presque partout, si et seulement si :
pour tout $\varepsilon>0$, $\lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} E_m(\varepsilon)\right)=0$.
On dira que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge en mesure vers f, si pour tout $\varepsilon>0$
$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x ; |f_n(x)-f(x)| \geq \varepsilon\})=0$
Montrer que si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge vers f μ-presque partout, alors $(f_n)_{n\geq 1}$ converge vers f en mesure.

Montrer que si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge presque uniformément vers f (c'est à dire que pour tout $\varepsilon>0$ il existe $F\subset E$ tel que $\mu(F)<\varepsilon$ et $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur $E-F$) alors $(f_n)_{n\geq 1}$ converge en mesure vers f.

Montrer que la limite en mesure d'une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est unique à un ensemble de mesure nulle près.

Nous dirons que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy pour la convergence en mesure si pour tout $\varepsilon>0$, et pour tout $\delta>0$, il existe N tel que si $n\geq N$ et $m\geq N$, $\mu(\{x\,;\,|f_n(x)-f_m(x)|\geq\varepsilon\})\leq\delta$.

Montrer que si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge en mesure elle est de Cauchy en mesure.

Montrer que si $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy en mesure, on peut en extraire une sous suite qui est de Cauchy pour la presque convergence uniforme.

Montrer que si $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy en mesure, il existe une fonction mesurable f telle que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge vers f en mesure.

L'exercice 27, montre comment on peut associer une métrique à une mesure positive finie.

Exercice 27.

Soit μ une mesure positive finie sur un espace mesurable $(E,\mathcal{E})$.

A et B étant des éléments de $\mathcal{E}$, on pose : $\rho(A,B)=\mu(A\Delta B)$; montrer que ρ est un écart sur $\mathcal{E}$.

On a alors la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par $A\mathcal{R}B \Longleftrightarrow \rho(A,B)=0$.

Posons $\mathcal{E}(\mu)=\mathcal{E}/\mathcal{R}$; ceci nous permet d'obtenir une métrique sur $\mathcal{E}(\mu)$ en posant $d(\hat{A},\hat{B})=\rho(A,B)$ (où $\hat{A}$ représente la classe de A)

Montrer que $(\mathcal{E}(\mu),d)$ est un espace complet.

(On pourra par exemple introduire les fonctions caractéristiques des ensembles que l'on est amené à étudier, et utiliser les résultats sur la convergence en mesure.)

Soit $\mathcal{C}$ un clan tel que $\mathcal{E}=\mathcal{E}(\mathcal{C})$. Montrer que $\mathcal{C}$ est dense dans $\mathcal{E}$ pour l'écart ρ ; c'est à dire : $\forall\varepsilon>0, \forall A\in\mathcal{E}, \exists A_0\in\mathcal{C}$ tel que $\mu(A\Delta A_0)\leq\varepsilon$.

Exercice 28.

Soit $(E, \mathcal{C}, \mu)$ un espace mesuré par une mesure positive finie.

Un atome dans cet espace est une partie A de $\mathcal{C}$ de mesure non nulle telle que pour tout élément B de $\mathcal{C}$, inclus dans A, on ait :
$\mu(B) = 0$ ou $\mu(B) = \mu(A)$. Donner des exemples.

Démontrer qu'au sens de la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par $A \mathcal{R} B \Longleftrightarrow \mu(A \Delta B) = 0$, il y a au plus une infinité dénombrable de classes d'équivalence distinctes d'atomes.

Montrer que si $(E, \mathcal{C}, \mu)$ est sans atomes, il existe pour tout x vérifiant $0 \leq x \leq \mu(E)$ un élément A de $\mathcal{C}$ tel que $\mu(A) = x$.

Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une partition finie de E formée d'éléments de $\mathcal{C}$ qui sont, soit des atomes de mesure $> \varepsilon$, soit des ensembles de mesure $\leq \varepsilon$.

L'exercice suivant étudie quelques propriétés élémentaires de la mesure de Borel (ou de Lebesgue.)

Exercice 29.

Montrer que pour tout borélien A de $\mathbb{R}$, $dx(A) = dx(-A)$.

Montrer que pour tout borélien A de $\mathbb{R}$, et tout réel a, $dx(a + A) = dx(A)$.

Montrer que pour tout borélien A de $\mathbb{R}$, et tout réel $\lambda \geq 0$, $dx(\lambda A) = \lambda\, dx(A)$.

Nous avons vu, lors de la construction de la mesure de Lebesgue, qu'il est parfois difficile de prouver la σ. additivité d'une fonction additive d'ensembles définie sur un clan unitaire ; nous nous proposons de préciser dans l'exercice 30 la méthode mise en œuvre lors de la démonstration de la proposition 35.

Exercice 30.

Soit $\mathcal{C}$ un clan unitaire sur un ensemble E.

Soit $\mathcal{K}$ une partie de $\mathcal{C}$ telle que :

(k) Pour toute suite $(K_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{K}$ telle que $\bigcap_{n \geq 1} K_n = \emptyset$ il existe N tel que $\bigcap_{n \leq N} K_n = \emptyset$.

Montrer que dans ces conditions, toute fonction additive d'ensembles μ, appliquant $\mathcal{C}$ dans $[0, M]$, telle que $\mu(E) = M$, et telle que $\mu(A) = \sup\{\mu(K) ;\ K \subset A \text{ et } K \in \mathcal{K}\}$ pour tout $A \in \mathcal{C}$, est σ-additive.

Regarder comment s'applique ce résultat pour les démonstrations des propositions 35 et 37.

Exercice 31.

a) Soient $(E, \mathcal{C}, \mu)$ un espace mesuré et $(A, \mathcal{C}_{/A}, \mu_{/A})$ un sous espace mesuré de $(E, \mathcal{C}, \mu)$; montrer que $\widehat{\mathcal{C}}_{/A} = \widehat{\mathcal{C}_{/A}}$
et que $\widehat{\mu}_{/A} = \widehat{\mu_{/A}}$.

b) Soient $(E_1, \mathcal{C}_1, \mu_1)$ un espace mesuré, $(E_2, \mathcal{C}_2)$ un espace mesurable et f une application $\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2$-mesurable de E_1 dans E_2.
Soit μ_2 la mesure image par f de μ_1.
Montrer que f est $\widehat{\mathcal{C}}_1\widehat{\mathcal{C}}_2$-mesurable et que $\widehat{\mu}_2 = f(\widehat{\mu}_1)$.

Chapitre IV.

Intégration par rapport à une mesure positive.

Dans ce chapitre, nous définissons l'intégrale par rapport à une mesure positive en suivant les idées de Lebesgue que nous avons indiquées au chapitre I. Le procédé de construction met en évidence l'importance des fonctions simples (cf. définition 20) qui jouent en quelque sorte le rôle que jouaient les fonctions en escaliers vis à vis de l'intégrale de Riemann. Comme il a été dit au chapitre I, ces fonctions simples sont adaptées à un découpage de l'espace d'arrivée, et non plus à un découpage de l'espace de départ.
En ce qui concerne les propriétés de l'intégrale ainsi construite, le point fort se situe dans les théorèmes de stabilité vis à vis de la convergence simple : théorème de Beppo-Levi et lemme de Fatou en ce qui concerne les fonctions positives, théorème de convergence dominée de Lebesgue pour les fonctions réelles ou complexes.

Un autre point fondamental est l'introduction des espaces L^p de l'intégration, dont le comportement est bien meilleur que ceux liés à l'intégrale de Riemann (cf. exercices 2 et 3 page 12). Dans la suite on étudie l'intégrale par rapport à certains types de mesures, et notamment par rapport à une mesure produit (avec l'important théorème de Fubini).
Au cours de ce chapitre, et de manière un peu transversale à son déroulement, nous verrons comment grâce à l'intégrale, définir des mesures ayant une densité par rapport à une mesure donnée ; cet important point de vue sera développé plus systématiquement dans le chapitre VI.

4.1. Les fonctions simples.

Définition 20. Soient $(E,\mathcal{T})$ un espace mesurable et f une application de E dans $\mathbb{R}^+$. L'application f est dite $\mathcal{T}$-simple si les conditions suivantes sont satisfaites :

$(\mathcal{S}_1)$ $f(E)$ est un ensemble fini de $\mathbb{R}^+$; $f(E)=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$

$(\mathcal{S}_2)$ Quel que soit i appartenant à l'ensemble $\{1,2,\dots,n\}$, $f^{-1}(\{\alpha_i\})$ est un élément de $\mathcal{T}$.

Exemple 11. Rappelons que si A est un sous ensemble de E, on appelle fonction caractéristique de A et on note χ_A, l'application de E dans $\mathbb{R}^+$ définie par :

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in A\\ 0 & \text{si } x\notin A\end{cases}$$

Si A est un élément de la tribu $\mathcal{T}$, χ_A est une fonction $\mathcal{T}$-simple.

Proposition 38. Soit $(E,\mathcal{T})$ un espace mesurable. f étant une fonction $\mathcal{T}$-simple distincte de la fonction nulle, il existe une écriture unique de f sous la forme : $f=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\chi_{A_i}$, où les A_i sont des éléments non vides de $\mathcal{T}$, deux à deux disjoints, et où les λ_i sont des réels strictement positifs deux à deux distincts.

Démonstration.

$f(E)-\{0\}=\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\}$ par définition de f.

Soit alors $A_i = f^{-1}(\{\lambda_i\})$; il est clair que $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{A_i}$ et que les A_i et les λ_i vérifient bien les conditions énoncées dans la proposition. L'écriture indiquée est évidemment unique à l'ordre des termes près.

Proposition 39. Si f est une fonction $\mathcal{C}$-simple, f est $\mathcal{C}\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}^+}$-mesurable.

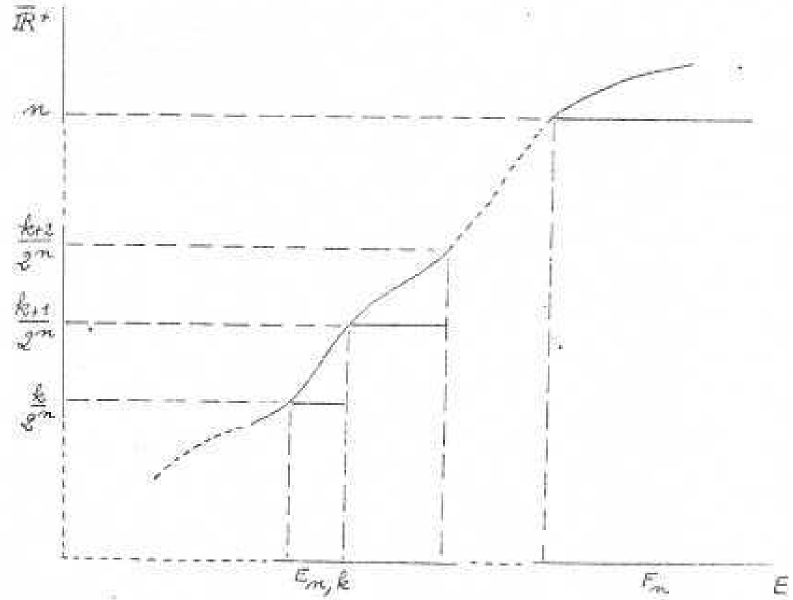
Proposition 40. Si f et g sont des fonctions $\mathcal{C}$-simples, et α un nombre réel positif, $f+g$, fg, αf sont des fonctions $\mathcal{C}$-simples.

Le théorème suivant est un théorème d'approximation de fonctions mesurables par des fonctions simples ; il est fondamental pour la construction que nous donnons de l'intégrale, et pour son fonctionnement.

Théorème 12. Soient $(E,\mathcal{C})$ un espace mesurable, f une application $\mathcal{C}\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}^+}$-mesurable de E dans $\overline{\mathbb{R}}^+$. Il existe une suite croissante

$(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions $\mathcal{C}$-simples qui converge simplement vers f.

Démonstration.



Posons $E_{n,k} = f^{-1}([\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[)$ où $n \in \mathbb{N}$ et où $k \in \{0, 1, \dots, n2^n - 1\}$

Alors $E_{n,k} \in \mathcal{C}$, et si $k \neq k'$ $E_{n,k} \cap E_{n,k'} = \emptyset$.

Posons $F_n = f^{-1}([n, +\infty])$; alors $F_n \in \mathcal{C}$ et $F_n = \complement \bigcup_{k=0}^{n2^n-1} E_{n,k}$.

Soit $\varphi_n = \sum_{k=1}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \chi_{E_{n,k}} + n\chi_{F_n}$; φ_n est une fonction $\mathcal{T}$-simple.

En remarquant que $\chi_{E_{n,k}} = \chi_{E_{n+1,2k}} + \chi_{E_{n+1,2k+1}}$

et que $\chi_{F_n} = \chi_{E_{n+1,(n+1)2^{n+1}-1}} + \chi_{F_{n+1}}$

on montre aisément que la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Si x est tel que $f(x) < +\infty$; soit $n_0 > f(x)$; alors pour tout $n > n_0$, $|\varphi_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2^n}$.

Si x est tel que $f(x) = +\infty$, quel que soit n, $x \in F_n$; donc $\varphi_n(x) = n$.

On voit que dans tous les cas $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$ dans $\overline{\mathbb{R}}^+$.

Les fonctions $\mathcal{T}$-simples engendrent donc par passage à la limite simple, la famille des fonctions $\mathcal{T}\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}^+}$-mesurables, famille qui est stable par passage à la limite simple (Théorème 6 page 43).

On pourra comparer cette situation avec celle de l'exercice 4 page 15.

Définition 21. Soient $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et f une fonction $\mathcal{T}$-simple.

Si f est nulle posons $I(f) = 0$.

Si f n'est pas nulle, f s'écrit de manière unique sous la forme $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{A_i}$, où les A_i et les λ_i vérifient les conditions indiquées dans la proposition 38 page 106.

Posons alors : $I(f) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu(A_i)$.

L'élément $I(f)$ de $\overline{\mathbb{R}}^+$ ainsi défini est appelé l'intégrale par rapport à μ de la fonction $\mathcal{T}$-simple f.

La proposition suivante est une conséquence immédiate de la définition.

Proposition 41. Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. f et g étant des fonctions $\mathcal{T}$-simples et λ un réel positif, on a les égalités suivantes :

$I(f+g) = I(f) + I(g)$

$I(\lambda f) = \lambda I(f)$,

et l'inégalité :

si $f \leq g$ alors $I(f) \leq I(g)$.

La proposition qui suit aborde le problème de la définition des mesures ayant une densité par rapport à une autre ; nous retrouverons cette question lors de la proposition 48 page 120, et au chapitre VI.

Proposition 42. Soient $(E,\mathcal{C},\mu)$ un espace mesuré, φ une fonction $\mathcal{C}$-simple, ν_φ l'application de $\mathcal{C}$ dans $\overline{\mathbb{R}}^+$ définie par : $\nu_\varphi(A) = I(\varphi . \chi_A)$.
Alors ν_φ est une mesure positive sur $\mathcal{C}$.

Démonstration.
Il est clair que $\nu_\varphi(\emptyset) = 0$; donc ν_φ vérifie (m_1).
Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{C}$; si φ est nulle, le résultat est trivial, sinon écrivons φ sous la forme $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{A_i}$.
Posons $B = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$; $\nu_\varphi(B) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu(A_i \cap B)$,
donc $\nu_\varphi(B) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_{j=0}^{\infty} \mu(A_i \cap E_j) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu(A_i \cap E_j)$.
Par suite $\nu_\varphi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \nu_\varphi(E_j)$.

4.2. Intégration des fonctions mesurables positives.

Définition 22. Soient $(E,\mathcal{C},\mu)$ un espace mesuré et f une fonction $\mathcal{C}\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}^+}$-mesurable de E dans $\overline{\mathbb{R}}^+$.
Notons $\int f d\mu$ la borne supérieure des intégrales des fonctions $\mathcal{C}$-simples majorées par f.
$\int f d\mu$, qui est un élément de $\overline{\mathbb{R}}^+$, est appelé l'intégrale de f par rapport à la mesure μ.

Remarques. Si f est une fonction $\mathcal{C}$-simple, alors $\int f d\mu = I(f)$.
La définition 22 permet évidemment de définir l'intégrale des fonctions $\mathcal{C}\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}^+}$-mesurables.
Les propositions qui suivent vont permettre de donner une définition de l'intégrale à l'aide de suites de fonctions, équivalente à la définition 22, mais d'utilisation plus aisée ; on verra notamment, grâce au théorème 12 (page 107) l'importance de l'hypothèse de mesurabilité, qui n'apparaît pas clairement dans la définition 22.

Proposition 43. Soient $(E, \mathcal{C}, \mu)$ un espace mesuré, f et g des fonctions $\mathcal{C}\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}^+}$-mesurables, telles que $f \leq g$.
Alors $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$.

Théorème 13. (Théorème de Beppo-Levi)
Soient $(E, \mathcal{C}, \mu)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite croissante de fonctions $\mathcal{C}\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}^+}$-mesurables de E dans $\overline{\mathbb{R}}^+$.
Alors la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers une fonction f, $\mathcal{C}\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}^+}$-mesurable, et $\left(\int f_n \, d\mu\right)_{n \geq 1}$ converge vers $\int f \, d\mu$ dans $\overline{\mathbb{R}}^+$

Démonstration.
$(f_n)_{n \geq 1}$ étant une suite croissante de fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}^+$, converge simplement vers une fonction f à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}^+$; de plus, compte tenu du théorème 6 page 43, f est $\mathcal{C}\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}^+}$-mesurable.
$(f_n)_{n \geq 1}$ étant une suite croissante, la suite $\left(\int f_n \, d\mu\right)_{n \geq 1}$ est croissante ; il existe donc $l \in \overline{\mathbb{R}}^+$ tel que $\lim_{n \to +\infty} \int f_n \, d\mu = l$.

Or quel que soit n, $f_n \leq f$; donc $\int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu$; par suite $l \leq \int f \, d\mu$.
Soient k un constante vérifiant $0 < k < 1$, et φ une fonction $\mathcal{C}$ simple majorée par f.
Posons $E_n = \{x \in E \; ; \; f_n(x) \geq k\varphi(x)\}$;
f_n et $k\varphi$ sont mesurables, donc $E_n \in \mathcal{C}$.
La suite $(f_n)_{n \geq 1}$ est croissante, donc $E_n \subset E_{n+1}$.
Soit x un élément de E ; si $f(x) = 0$, alors x appartient à tous les E_i ; si $f(x) > 0$, alors $k\varphi(x) \leq k f(x) < f(x)$, et puisque $(f_n(x))_{n \geq 1}$ converge vers $f(x)$, il existe n_0 tel que $k\varphi(x) \leq f_{n_0}(x)$, ce qui montre que $x \in E_{n_0}$.
Par suite $E = \bigcup_{n \geq 1} E_n$.

$f_n \geq f_n \chi_{E_n}$, donc $\int f_n \, d\mu \geq \int f_n \chi_{E_n} \, d\mu \geq k \int \varphi \chi_{E_n} \, d\mu$;
donc, $\int f_n \, d\mu \geq k \nu_\varphi(E_n)$.
Or ν_φ est une mesure positive sur $\mathcal{C}$ (proposition 42 page 111), donc :
$\nu_\varphi\left(\bigcup_{n \geq 1} E_n\right) = \sup_{n \geq 1} \nu_\varphi(E_n)$, (Théorème 7 page 53)
c'est à dire : $\nu_\varphi(E) = \sup_{n \geq 1} \nu_\varphi(E_n)$.
Sachant que $l \geq \int f_n \, d\mu \geq k\nu_\varphi(E_n)$, on déduit que $l \geq k\nu_\varphi(E) = k \int \varphi \, d\mu$.
Cette dernière inégalité a lieu pour toute

fonction $\mathcal{C}$-simple majorée par f ; donc $\ell \geq k \int f \, d\mu$, et ceci pour tout k vérifiant $0 < k < 1$; donc $\ell \geq \int f \, d\mu$.

Comme corollaire du théorème de Beppo-Levi, on obtient le théorème suivant, qui donne une définition de l'intégrale plus aisée à manipuler.

Théorème 14. Soient $(E, \mathcal{C}, \mu)$ un espace mesuré et f une fonction $\mathcal{C}\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}^+}$-mesurable de E dans $\overline{\mathbb{R}}^+$.
Soit $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ une suite croissante de fonctions $\mathcal{C}$-simples qui converge simplement vers f (Théorème 12 page 107).
Alors $\int f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} I(\varphi_n)$.

Proposition 44. Soient $(E, \mathcal{C}, \mu)$ un espace mesuré, f et g des fonctions $\mathcal{C}\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}^+}$-mesurables de E dans $\overline{\mathbb{R}}^+$, λ un réel positif. On a alors les égalités suivantes :
$\int (f+g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$,
$\int (\lambda f) \, d\mu = \lambda \int f \, d\mu$.

Démonstration.
Soient $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ une suite croissante de fonctions $\mathcal{C}$-simples qui converge simplement vers f, et $(\psi_n)_{n \geq 1}$ une suite croissante de fonctions $\mathcal{C}$-simples qui converge simplement vers g.
Nous savons que $I(\varphi_n + \psi_n) = I(\varphi_n) + I(\psi_n)$; d'autre part la suite $(\varphi_n + \psi_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers $f+g$; donc :
$\int (f+g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$.
La deuxième égalité se démontre de façon analogue.

Théorème 15. Soient $(E, \mathcal{C}, \mu)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions $\mathcal{C}\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}^+}$-mesurables de E dans $\overline{\mathbb{R}}^+$; soit $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ définie par $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ (ce qui a un sens puisque nous nous plaçons dans $\overline{\mathbb{R}}^+$).
Alors f est $\mathcal{C}\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}^+}$-mesurable et $\int f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\mu$.

Ce théorème est une conséquence immédiate du théorème de Beppo-Levi.

Théorème 16. (Lemme de Fatou)

Soient $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions de E dans $\overline{\mathbb{R}}^+$ $\mathcal{E}\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}^+}$-mesurables.

alors : $\int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$.

Démonstration.

Soit $\varphi_n = \inf_{k \geq n} f_k$; alors $\varphi_n \leq f_n$, donc $\int \varphi_n \, d\mu \leq \int f_n \, d\mu$.

La suite $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ étant une suite croissante de fonctions $\mathcal{E}\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}^+}$-mesurables, nous avons en vertu du théorème de Beppo-Levi :
$\int \lim_{n\to\infty} \varphi_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n \, d\mu$.

Mais $\lim_{n\to\infty} \int \varphi_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$;

par suite $\int \lim_{n\to\infty} \varphi_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$.

Mais $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \liminf_{n\to\infty} f_n$, d'où le résultat.

Proposition 45. Soient $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un

espace mesuré, f une fonction de E dans $\overline{\mathbb{R}}^+$ $\mathcal{E}\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}^+}$-mesurable. Pour que $\int f d\mu = 0$, il faut et il suffit que f soit nulle μ-presque partout.

Démonstration.

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$; posons
$A_n = \{x \in E \,;\, f(x) \geq \frac{1}{n}\}$.
Il est clair que $A_n \in \mathcal{E}$.
Soit $A = \{x \in E \,;\, f(x) \neq 0\}$; alors $A = \bigcup_{n\geq 1} A_n$.
Si $\mu(A) \neq 0$, il existe n_0 tel que $\mu(A_{n_0}) \neq 0$.
Mais $\int f d\mu \geq \int f \chi_{A_{n_0}} \, d\mu \geq \frac{1}{n_0} \mu(A_{n_0})$,
donc si $\mu(A) \neq 0$, $\int f \, d\mu \neq 0$.

Pour démontrer la réciproque, partons de l'inégalité $f \leq \sup_{n\geq 1} n \chi_A$; donc
$\int f \, d\mu \leq \int \sup_{n\geq 1} n\chi_A \, d\mu$, et par utilisation du théorème de Beppo-Levi : $\int f d\mu \leq \sup n \, \mu(A)$.
Si $\mu(A) = 0$, on conclut que $\int f d\mu = 0$.

Proposition 46. Soient $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré, f et g des fonctions $\mathcal{E}\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}^+}$-mesurables de E dans $\overline{\mathbb{R}}^+$.

Si $f(x) \le g(x)$ μ-presque partout ; alors $\int f d\mu \le \int g d\mu$.

Démonstration.

Soit $A = \{x \,;\, f(x) > g(x)\}$; alors $A \in \mathcal{E}$ et $\mu(A) = 0$.
On voit donc que $\int f d\mu = \int f \chi_{\complement A} d\mu$ et que $\int g d\mu = \int g \chi_{\complement A} d\mu$ d'après la proposition 45.
Mais $\int f \chi_{\complement A} d\mu \le \int g \chi_{\complement A} d\mu$, d'où le résultat.

Proposition 47. Soient $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré, f une fonction $\mathcal{E}\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}^+}$-mesurable de E dans $\overline{\mathbb{R}}^+$.
Si $\int f d\mu < +\infty$, alors $f(x) < +\infty$ μ-presque partout.

Démonstration.

Soit $A = \{x \,;\, f(x) = +\infty\}$; alors $A \in \mathcal{E}$ et :
$f \ge \sup_{n \ge 1} n \chi_A$, donc $\int f d\mu \ge \int \sup_{n \ge 1} n \chi_A \, d\mu$.
Par application du théorème de Beppo-Levi
$\int f d\mu \ge \sup_{n \ge 1} n \mu(A)$
Donc si $\int f d\mu < +\infty$ alors $\mu(A) = 0$.
Remarquons que la réciproque est fausse !

Proposition 48. Soient $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré, f une fonction de E dans $\overline{\mathbb{R}}^+$ $\mathcal{E}\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}^+}$-mesurable, ν_f l'application de $\mathcal{E}$ dans $\overline{\mathbb{R}}^+$ définie par :
$\nu_f(A) = \int f \chi_A d\mu$.
Alors ν_f est une mesure positive sur $\mathcal{E}$, et si g est une fonction $\mathcal{E}\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}^+}$-mesurable, $\int g \, d\nu_f = \int g f \, d\mu$.

Démonstration.

Il est clair que $\nu_f(\emptyset) = 0$.
Soit $(A_n)_{n \ge 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{E}$ deux à deux disjoints ; posons $A = \bigcup_{n \ge 1} A_n$.
Alors $\chi_A \cdot f = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n} \cdot f$, d'où
$\nu_f(A) = \int \chi_A \cdot f \, d\mu = \int \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n} \cdot f \, d\mu$;
mais $\int \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n} \cdot f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int \chi_{A_n} \cdot f \, d\mu$
donc $\nu_f(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_f(A_n)$.
La démonstration de la deuxième partie de la proposition utilise une démarche importante que nous retrouverons en diverses occasions.

Soit $g = \chi_A$ où $A \in \mathcal{T}$; alors :
$\int g \, d\nu_f = \nu_f(A) = \int \chi_A f \, d\mu$.
On en déduit que l'égalité à démontrer a lieu pour toutes les fonctions $\mathcal{T}$-simples.
Si g est une fonction mesurable quelconque, on sait qu'il existe une suite croissante $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ de fonctions $\mathcal{T}$-simples qui converge simplement vers g ; si $n \geq 1$ alors $\int \varphi_n \, d\nu_f = \int \varphi_n . f \, d\mu$, et en utilisant le théorème de Beppo-Lévi :
$\int g \, d\nu_f = \int g . f \, d\mu$.

4.3. Intégration des fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ et $\mathbb{C}$

Définition 23. Soient $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, f une application $\mathcal{T}\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$-mesurable de E dans $\overline{\mathbb{R}}$.
f^+ et f^- sont alors des fonctions $\mathcal{T}\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+}$-mesurables.
Si f est telle que l'un des deux nombres $\int f^+ d\mu$, $\int f^- d\mu$ est fini, on pose :
$\int f \, d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$.
$\int f \, d\mu$ est appelé intégrale de f par rapport à μ.

Remarquons alors que si l'on note $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions de E dans $\mathbb{R}$ (ou dans $\overline{\mathbb{R}}$) dont on peut définir l'intégrale au sens de la définition 23 (page 121), $\mathcal{I}$ n'est pas stable pour l'addition des fonctions. Nous sommes donc amenés afin d'obtenir un ensemble plus maniable à restreindre $\mathcal{I}$; les fonctions intégrables seront celles dont l'intégrale est finie ; ceci fait l'objet du paragraphe suivant.
Toutefois, il est très utile dans le cas des fonctions positives de faire intervenir des intégrales valant $+\infty$; nous ne dirons pas alors que la fonction est intégrable, mais que l'on peut définir son intégrale.

Définition 24. Soient $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, f une application $\mathcal{T}\mathcal{B}$-mesurable de E dans $\mathbb{C}$.
Alors $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Re} f$ sont deux fonctions $\mathcal{T}\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mesurables de E dans $\mathbb{R}$.
Si $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Re} f$ sont intégrables, on pose :

$$\int f d\mu = \int \mathrm{Re} f \, d\mu + i \int \mathrm{Im} f \, d\mu .$$

4.4. Espaces $\mathcal{L}^p$ et L^p

A. Les espaces $\mathcal{L}^1$ et L^1.

Définition 25. Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré. Nous noterons $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ (resp. $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$) l'ensemble des fonctions f $\mathcal{E}\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$-mesurables de E dans $\mathbb{C}$ (resp. $\mathcal{E}\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mesurables de E dans $\mathbb{R}$) telles que $\int |f| \, d\mu < +\infty$.

Il est alors aisé d'obtenir la proposition suivante :

Proposition 49. Soit f une fonction $\mathcal{E}\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$-mesurable (resp. $\mathcal{E}\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mesurable). Pour que f soit élément de $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ (resp. $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$) il faut et il suffit que f soit intégrable.

On voit donc que pour une fonction

mesurable, son intégrabilité est équivalente à l'intégrabilité de sa valeur absolue. A ce propos il faut remarquer que $|f|$ peut être mesurable sans que f le soit.

Théorème 17. $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ (resp. $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$) est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ (resp. sur $\mathbb{R}$) des fonctions $\mathcal{E}\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$-mesurables (resp. $\mathcal{E}\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mesurables). De plus :

$$\int (f+g) \, d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$$

$$\int \lambda f d\mu = \lambda \int f d\mu .$$

Démonstration.

$|f+g| \leq |f| + |g|$, donc $\int |f+g| \, d\mu \leq \int |f| d\mu + \int |g| d\mu$ par suite $\int |f+g| \, d\mu < +\infty$.

De même $|\lambda f| = |\lambda| |f|$, donc $\int |\lambda f| \, d\mu = |\lambda| \int |f| \, d\mu < +\infty$.

Si f et g sont des éléments de $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$

$(f+g)^+ - (f+g)^- = f+g = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-)$,

donc $(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$

d'où :

$$\int (f+g)^+ d\mu + \int f^- d\mu + \int g^- d\mu = \int (f+g)^- d\mu + \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu.$$

$$\int (f+g)^+ d\mu - \int (f+g)^- d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu + \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu$$

d'où $\int (f+g)\, d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$.
Le reste de la démonstration se termine aisément.

Théorème 18. Soit f un élément de $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$; alors $\left|\int f d\mu\right| \leq \int |f|\, d\mu$.

Démonstration.
Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$; alors $\int f d\mu \in \mathbb{C}$, et il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ de module 1 tel que
$\alpha \int f d\mu = \left|\int f d\mu\right|$.
$\left|\int f d\mu\right| = \int \alpha f\, d\mu$, d'où :

$$\left|\int f d\mu\right| = \int \mathrm{Re}(\alpha f)\, d\mu + i \int \mathrm{Im}(\alpha f)\, d\mu .$$

Mais comme $\left|\int f d\mu\right|$ est réel,
$\int \mathrm{Im}(\alpha f)\, d\mu = 0$.
Donc $\left|\int f d\mu\right| = \int \mathrm{Re}(\alpha f)\, d\mu$.
Mais $\mathrm{Re}(\alpha f) \leq |f|\,|\alpha| = |f|$,
donc $\left|\int f d\mu\right| \leq \int |f|\, d\mu$.

Théorème 19. Soit N_1 l'application de $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ dans $\mathbb{R}^+$ (resp. $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ dans $\mathbb{R}^+$) définie par $N_1(f) = \int |f|\, d\mu$.
Alors N_1 est une semi-norme.

Démonstration.
Il est clair que $N_1(f) \geq 0$ et que $N_1(0) = 0$ (mais si $N_1(f) = 0$ il se peut que f ne soit pas nulle).
$N_1(f+g) = \int |f+g|\, d\mu \leq \int |f|\, d\mu + \int |g|\, d\mu$
donc :
$N_1(f+g) \leq N_1(f) + N_1(g)$.
$N_1(\lambda f) = \int |\lambda f|\, d\mu = |\lambda| \int |f|\, d\mu = |\lambda|\, N_1(f)$.

Théorème 20. $\mathcal{L}^1(\mu)$ que l'on supposera toujours dans la suite, sauf mention expresse, muni de la semi-norme N_1 est complet.

Démonstration.
La démonstration que nous donnons ici est valable aussi pour les espaces $\mathcal{L}^p(\mu)$ avec $1 \leq p < +\infty$.

Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}^1(\mu)$.
Il existe une sous suite $(f_{n_i})_{i\geq 1}$ de la suite $(f_n)_n$ telle que :

(1) $N_1(f_{n_{i+1}} - f_{n_i}) < \frac{1}{2^i}$ pour tout $i \geq 1$.

Posons $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} |f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)|$

et $\varphi_k(x) = \sum_{i=1}^{k} |f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)|$. φ et φ_k sont alors mesurables.

En vertu de (1):

$N_1(\varphi_k) < 1$ pour tout entier $k \geq 1$.

Par application du lemme de Fatou (Théorème 16 page 117) à la suite $(\varphi_k)_{k\geq 1}$ on obtient :

$$\int \liminf_{k\to\infty} \varphi_k \, d\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int \varphi_k \, d\mu$$

c'est à dire $\int \varphi \, d\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int \varphi_k \, d\mu \leq 1$.

En vertu de la proposition 47 page 119, $\varphi(x)$ est finie presque partout ; donc la série $\sum_{i=1}^{\infty} (f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x))$ converge presque partout.

Posons alors $f(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} (f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x))$ pour les x faisant converger la série intervenant au second membre, et posons $f(x) = 0$ ailleurs.

Alors $f(x) = \lim_{i\to\infty} f_{n_i}(x)$ presque partout, et f est mesurable.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $n \geq N$ et $m \geq N$ implique $N_1(f_n - f_m) \leq \varepsilon$.

Pour tout $m \geq N$ le lemme de Fatou nous permet d'obtenir :

$$\int |f - f_m| \, d\mu \leq \liminf_{i\to\infty} \int |f_{n_i} - f_m| \, d\mu \leq \varepsilon .$$

Donc $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $\lim_{m\to\infty} N_1(f - f_m) = 0$.

En fait, la proposition 45 page 117 nous montre que du point de vue de l'intégration on ne parvient pas à distinguer des fonctions qui sont égales presque partout. Ceci explique pourquoi l'espace $\mathcal{L}^1(\mu)$ n'est pas séparé. L'étude qui suit va nous permettre de régler ce problème.

Proposition 50. Soit $\mathcal{R}$ la relation dans $\mathcal{L}^1(\mu)$ définie par : $f \mathcal{R} g$ si et seulement si $f(x) = g(x)$ μ-presque partout. $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence compatible avec l'addition et la multiplication par

un scalaire.
Nous noterons $L^1(\mu)$ l'espace vectoriel quotient $\mathcal{L}^1(\mu)/\mathcal{R}$.

Remarquons aussi que si $f_1 = g_1$ μ-presque partout et si $f_2 = g_2$ μ-presque partout, alors $f_1 f_2 = g_1 g_2$ μ-presque partout.

Si $f \mathcal{R} g$, il est clair que $\int |f|\, d\mu = \int |g|\, d\mu$, donc on peut étudier l'application

$$\begin{aligned} \| \ \|_1 : L^1(\mu) &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \dot{f} &\longmapsto \int |f|\, d\mu \end{aligned}$$

où $\dot{f}$ est la classe d'équivalence de f pour la relation $\mathcal{R}$.
Les théorèmes 19 et 20 (page 126) permettent d'énoncer la proposition suivante :

Proposition 51. $\| \ \|_1$ est une norme sur $L^1(\mu)$; muni de cette norme $L^1(\mu)$ est un espace de Banach.

En fait toute l'étude qui précède montre qu'il suffit qu'une fonction g soit égale

à une fonction f de $\mathcal{L}^1(\mu)$ μ-presque partout pour que l'on puisse définir de manière cohérente l'intégrale de g par :
$\int g\, d\mu = \int f\, d\mu$.
Remarquons alors que g n'est pas nécessairement mesurable ; par contre, si μ est une mesure complète alors g est nécessairement mesurable. Désormais, nous considérerons toujours que $L^1(\mu)$ est l'ensemble des classes de fonctions égales presque partout à une fonction mesurable intégrable ; cette légère modification de la définition initiale de $L^1(\mu)$ consiste en fait à se placer dans $L^1(\hat{\mu})$ où $\hat{\mu}$ est la complétée de μ ; on voit que cette opération ne change pas l'ensemble des classes $L^1(\mu)$, mais accroît éventuellement chaque classe (cf. exercice 40 page 184)
Dans la suite nous noterons un élément de $L^1(\mu)$ en utilisant un de ses représentants ; ce représentant est une fonction qui peut n'être défini que presque partout ; ainsi nous nous permettrons de dire : "soit f un élément

de $L^1(\mu)$ ", où f est une fonction définie presque partout. Cet abus de notation ne doit pas faire oublier qu'un élément de $L^1(\mu)$ est une classe de fonctions.

Théorème 21. (Théorème de convergence dominée de Lebesgue).
Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions intégrables qui converge simplement μ-presque partout vers une fonction f.
S'il existe une fonction intégrable g telle que :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$ μ-presque partout,
alors f est intégrable, et de plus :

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \, d\mu = 0 ,$$

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu .$$

Démonstration.

$|f_n| \leq g$ μ-p.p., donc $|f_n - f| \leq 2g$ μ-p.p.
Par suite $2g - |f_n - f|$ est égale presque partout à une fonction $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^+}$-mesurable ; on peut donc lui appliquer le lemme de Fatou :

$$2\int g \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int (2g - |f - f_n|) \, d\mu ;$$

d'où : $2\int g \, d\mu \leq 2\int g \, d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int |f - f_n| \, d\mu$

soit encore : $\limsup_{n\to\infty} \int |f - f_n| \, d\mu \leq 0$.
Mais comme $\int |f - f_n| \, d\mu \geq 0$, on en déduit que $\lim_{n\to\infty} \int |f - f_n| \, d\mu = 0$.
De plus : $\left|\int f_n \, d\mu - \int f \, d\mu\right| = \left|\int (f_n - f) \, d\mu\right| \leq \int |f_n - f| \, d\mu$.
Donc :

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu .$$

Ce théorème est d'une importance capitale ; c'est le théorème central de la théorie de Lebesgue. Le lecteur pourra le comparer au théorème de Beppo-Levi page 113 et au lemme de Fatou page 117.

B. Les espaces $\mathcal{L}^2$ et L^2.

Parmi les espaces L^p, les espaces L^2 jouent un rôle important à cause de leur structure d'espace de Hilbert. Leur construction se fait de manière analogue à celle des espaces L^1.

Définition 26. Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Nous noterons $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mu)$ (resp. $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\mu)$) l'ensemble des fonctions f, $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$-mesurables (resp. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mesurables) telles que $\int |f|^2 d\mu < +\infty$.

Théorème 22. $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mu)$ (resp. $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\mu)$) est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ (resp. un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Théorème 23. L'application N_2 de $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mu)$ (resp. $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\mu)$) dans $\mathbb{R}^+$ définie par : $N_2(f) = \left(\int |f|^2 d\mu\right)^{1/2}$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mu)$ (resp. $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\mu)$), et $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mu)$ (resp. $\mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(\mu)$) est complet pour cette semi-norme.

Comme précédemment on est amené à introduire l'espace vectoriel $L^2_{\mathbb{C}}(\mu)$ (resp. $L^2_{\mathbb{R}}(\mu)$) obtenu en prenant les classes de fonctions presque partout égales à une fonction de carré intégrable.

Théorème 24. $L^2(\mu)$ est alors un

espace de Hilbert, le produit scalaire de deux fonctions définies presque partout étant donné par :
$\langle f, g \rangle = \int f \bar{g} \, d\mu$.

C. Les espaces $\mathcal{L}^p$ et L^p pour $1 < p < +\infty$.

Nous poserons $q = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{p}}$ (donc $1 < q < +\infty$).
q est appelé le conjugué de Hölder de p ; on a $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Posons alors $\alpha = \frac{1}{p}$ et $\beta = \frac{1}{q}$.
L'étude pour $x \geq 0$ de la fonction $x^\alpha - \alpha x - \beta$ fait apparaître que pour $x \geq 0$, $x^\alpha \leq \alpha x + \beta$.
On en déduit aisément pour u et $v \geq 0$ l'inégalité : $u^\alpha v^\beta \leq \alpha u + \beta v$.

Proposition 52. (Inégalité de Hölder). Soient $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, f et g deux fonctions $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$-mesurables ; alors :
$$\int |f \cdot g| \, d\mu \leq \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

Démonstration.

Commençons la démonstration dans le cas particulier où $\int |f|^p d\mu = 1$ et où $\int |g|^q d\mu = 1$.

On sait que :

$$(|f|^p)^\alpha (|g|^q)^\beta \leq \alpha |f|^p + \beta |g|^q .$$

On en conclut que :

(1) $\int |fg|\, d\mu \leq 1$.

Dans le cas général : si $\int |f|^p d\mu = 0$ ou si $\int |g|^q d\mu = 0$ la proposition 45 page 117 permet de conclure que $\int |fg|\, d\mu = 0$. Si $\int |f|^p d\mu \neq 0$ et $\int |g|^q d\mu \neq 0$ et si l'un de ces deux nombres est infini, l'inégalité cherchée est bien réalisée. Si les deux nombres $\int |f|^p d\mu$ et $\int |g|^q d\mu$ sont des réels strictement positifs, l'application de (1) aux fonctions $F = \dfrac{f}{(\int |f|^p d\mu)^{1/p}}$ et $G = \dfrac{g}{(\int |g|^q d\mu)^{1/q}}$ donne le résultat.

L'inégalité de Hölder permet de démontrer l'inégalité de Minkowski :

Proposition 53. (Inégalité de Minkowski). f et g étant deux fonctions $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$-mesurables :

$$\left(\int |f+g|^p d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int |g|^p d\mu\right)^{1/p}.$$

Démonstration.

$$|f+g|^p = |f+g|^{p-1} |f+g| \leq |f|\,|f+g|^{p-1} + |g|\,|f+g|^{p-1}.$$

$$\int |f+g|^p d\mu \leq \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int |f+g|^{(p-1)q} d\mu\right)^{1/q}$$
$$+ \left(\int |g|^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int |f+g|^{(p-1)q} d\mu\right)^{1/q}$$

$$\int |f+g|^p d\mu \leq \left(\left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int |g|^p d\mu\right)^{1/p}\right) \left(\int |f+g|^p d\mu\right)^{1/q}$$

Remarquons que si $\int |f+g|^p d\mu = +\infty$, alors l'un des deux nombres $\int |f|^p d\mu$ et $\int |g|^p d\mu$ est infini : en effet si l'on note A l'ensemble des x tels que $|f(x)| \geq |g(x)|$ alors

$$\int |f+g|^p d\mu \leq 2^p \int_A |f|^p d\mu + 2^p \int_{CA} |g|^p d\mu$$

et donc :

$$\int |f+g|^p d\mu \leq 2^p \left(\int |f|^p d\mu + \int |g|^p d\mu\right)$$

ce qui montre le resultat.

Si $\int |f+g|^p d\mu$ est un nombre fini on obtient alors :

$$\left(\int |f+g|^p d\mu\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int |g|^p d\mu\right)^{1/p}$$

ce qui achève la démonstration puisque $1-\frac{1}{q} = \frac{1}{p}$.

On définit alors de la même façon que précédemment les espaces $\mathcal{L}^p$ et L^p.
L'espace $\mathcal{L}^p(\mu)$ est l'ensemble des fonctions mesurables f telles que $\int |f|^p d\mu < +\infty$; l'espace $L^p(\mu)$ est l'ensemble des classes de fonctions presque partout égales à une fonction de puissance $p^{ième}$ intégrable.
Les inégalités énoncées précédemment permettent d'établir les résultats suivants :

Proposition 54. $\mathcal{L}^p(\mu)$ est un sous espace vectoriel de l'espace des fonctions mesurables ; l'application

$$N_p : \mathcal{L}^p(\mu) \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$f \longmapsto \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p}$$

est une semi norme sur $\mathcal{L}^p(\mu)$.

Comme précédemment par passage à l'espace $L^p(\mu)$ on obtient évidemment une norme.

Théorème 25. L'espace $L^p(\mu)$, muni de la norme $\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p}$ est un espace de Banach.

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème 20 page 126.

D. Les espaces $\mathcal{L}^\infty$ et L^∞.

Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. f étant une fonction définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, nous définissons la borne supérieure essentielle $M_\infty(f)$ de f par :
$M_\infty(f) = \inf\{M \in \mathbb{R} ; |f(x)| \leq M \ \mu\text{-p.p}\}$
On définit alors $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ comme l'ensemble des fonctions mesurables f telles que $M_\infty(f) < +\infty$. L'espace $L^\infty(\mu)$ est alors défini suivant la méthode déjà indiquée.
Il est alors facile de voir que $M_\infty(f)$ définit

une semi-norme sur $\mathcal{L}^{\infty}(\mu)$; ce qui permet d'obtenir une norme notée $\| \|_{\infty}$ sur $L^{\infty}(\mu)$. $L^{\infty}(\mu)$ muni de la norme $\| \|_{\infty}$ est alors un espace de Banach.

Nous verrons par la suite quelques propriétés des espaces $L^{p}(\mu)$.

4.5. Intégration par rapport à une mesure induite.

Soit $(E, \mathcal{C}, \mu)$ un espace mesuré ; $(A, \mathcal{C}_{/A}, \mu_{/\mathcal{C}_{/A}})$ étant un sous espace mesuré de $(E, \mathcal{C}, \mu)$, nous allons étudier l'intégration par rapport à la mesure $\mu_{/\mathcal{C}_{/A}}$.

Proposition 55. Soit f une application de E dans $\mathbb{R}$ (ou $\overline{\mathbb{R}}$, ou $\mathbb{C}$). Pour que $f_{/A}$ soit $\mathcal{C}_{/A}\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mesurable il faut et il suffit que $f.\chi_A$ soit $\mathcal{C}\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mesurable.

Démonstration.

Soit I l'injection canonique de A dans E ; on sait que I est $\mathcal{C}_{/A}\mathcal{C}$-mesurable.
Remarquons alors que $f_{/A} = f \circ I = (f.\chi_A) \circ I$;
donc si $f.\chi_A$ est $\mathcal{C}\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mesurable, $f_{/A}$ est $\mathcal{C}_{/A}\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-mesurable.
Réciproquement : soit $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$; alors
si $0 \notin B$, $(f.\chi_A)^{-1}(B) = (f_{/A})^{-1}(B)$
donc $(f.\chi_A)^{-1}(B) \in \mathcal{C}$ (cf. proposition 38 pg. 58)
si $0 \in B$, $(f.\chi_A)^{-1}(B) = \complement A \cup (f_{/A})^{-1}(B)$
donc $(f.\chi_A)^{-1}(B) \in \mathcal{C}$.

Proposition 56. Soit f une application de E dans $\overline{\mathbb{R}}^{+}$ telle que $f\chi_A$ soit $\mathcal{C}\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}^{+}}$-mesurable. On a alors :
$\int f_{/A} \, d\mu_{/A} = \int f \chi_A \, d\mu$.

Démonstration.
Suivant une méthode que nous avons déjà appliquée supposons tout d'abord que $f.\chi_A$ est une fonction caractéristique χ_B où $B \subset A$ et $B \in \mathcal{C}$.
Alors $\int f_{/A} \, d\mu_{/A} = \mu_{/A}(B) = \mu(B) = \int f \chi_A \, d\mu$.
On en déduit par linéarité que l'égalité

à démontrer est vraie pour les $f.\chi_A$ qui sont $\mathcal{C}$-simples, puis par passage à la limite pour toutes les fonctions $f.\chi_A$ qui sont $\mathcal{C}\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}^+}$-mesurables.

Remarquons que l'on peut passer ensuite aisément aux fonctions intégrables.

4.6. Intégration par rapport à une mesure image.

Soient $(E, \mathcal{C}, \mu)$ un espace mesuré, $(E', \mathcal{C}')$ un espace mesurable, f une application $\mathcal{C}\mathcal{C}'$-mesurable de E dans E' et μ' la mesure image de μ par f.
Nous allons étudier l'intégration par rapport à μ'.

Proposition 57. Soit g une fonction $\mathcal{C}'\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}^+}$-mesurable de E' dans $\overline{\mathbb{R}}^+$. On sait que $g \circ f$ est $\mathcal{C}\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}^+}$-mesurable. On a alors l'égalité :
$\int g \circ f \, d\mu = \int g \, d\mu'$.

Démonstration.
Si $g = \chi_A$ où $A \in \mathcal{C}'$ on a : $\int g \, d\mu' = \mu'(A) = \mu(f^{-1}(A))$,
mais $\chi_A \circ f = \chi_{f^{-1}(A)}$, donc :
$\mu(f^{-1}(A)) = \int g \circ f \, d\mu$.
Par linéarité on en déduit que l'égalité est vraie pour les fonctions g qui sont $\mathcal{C}'$-simples.
Si g est $\mathcal{C}'\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}^+}$-mesurable, soit $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ une suite croissante de fonctions $\mathcal{C}'$-simples qui converge vers g ; alors :
$\int g \, d\mu' = \lim_{n \to \infty} \int \varphi_n \, d\mu' = \lim_{n \to \infty} \int \varphi_n \circ f \, d\mu$.
Or la suite $(\varphi_n \circ f)_{n \geq 1}$ converge vers $g \circ f$ en croissant, donc :
$\lim_{n \to \infty} \int \varphi_n \circ f \, d\mu = \int g \circ f \, d\mu$.

Il est clair aussi que si $g \in L^1_{\mathbb{C}}(\mu')$, alors $g \circ f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ et $\int g \, d\mu' = \int g \circ f \, d\mu$.

4.7. Intégration par rapport à une mesure produit

Soient $(E_1, \mathcal{C}_1, \mu_1)$ et $(E_2, \mathcal{C}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés où μ_1 et μ_2 sont des mesures σ-finies. Nous allons étudier l'intégration par rapport à la mesure produit $\mu_1 \times \mu_2$ que nous avons définie au paragraphe 3.4. page 75. Nous reprendrons les notations de ce paragraphe et nous remarquerons que l'étude à faire nous conduit à redémontrer l'existence de la mesure produit (cf. remarque page 80).

Proposition 58. Si $A \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ et $x \in E_1$, alors $A_x = \{y \in E_2 ; (x,y) \in A\}$ est un élément de $\mathcal{C}_2$.
De même $A^y = \{x \in E_1 ; (x,y) \in A\}$ est un élément de $\mathcal{C}_1$.

Démonstration.
Soit $\varphi_x : E_2 \longrightarrow E_1 \times E_2$
$y \longmapsto (x,y)$
Si $A \in \mathcal{C}$ il est clair que $\varphi_x^{-1}(A) \in \mathcal{C}_2$, donc d'après le critère de mesurabilité, φ_x est mesurable.
Donc si $A \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$, $\varphi_x^{-1}(A) \in \mathcal{C}_2$; mais

$\varphi_x^{-1}(A) = A_x$, ce qui achève la démonstration.

Définition 26. Une famille non vide $\mathcal{M}$ de parties de E est dite une classe monotone si les conditions suivantes sont réalisées :
(mo-1) Si $(A_i)_{i \geq 1}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{M}$, $A = \bigcup_{i \geq 1} A_i$ est un élément de $\mathcal{M}$.
(mo-2) Si $(B_i)_{i \geq 1}$ est une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{M}$, $B = \bigcap_{i \geq 1} B_i$ est un élément de $\mathcal{M}$.

Proposition 59. Une intersection non vide de classes monotones est une classe monotone.

Proposition 60. Soit $\mathcal{U}$ une famille de parties de E ; il existe une plus petite classe monotone contenant $\mathcal{U}$; c'est l'intersection de toutes les classes monotones contenant $\mathcal{U}$; nous l'appelerons classe monotone engendrée par $\mathcal{U}$ et la noterons $\mathcal{M}(\mathcal{U})$.

Proposition 61. $\mathcal{C}$ étant le clan des réunions finies de rectangles $A_i \times B_i$ deux à deux disjoints, où $A_i \in \mathcal{C}_1$ et $B_i \in \mathcal{C}_2$ (cf. page 75), on a : $\mathcal{M}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$.

Démonstration.

Il est clair que $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ est une classe monotone, donc $\mathcal{M}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$.

Si $A \subset E_1 \times E_2$, notons $\mathcal{R}(A)$ l'ensemble des parties B de $E_1 \times E_2$ telles que :

$A - B \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$

$B - A \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$

$A \cup B \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$.

Alors B est élément de $\mathcal{R}(A)$ si et seulement si A est élément de $\mathcal{R}(B)$.

Du fait que $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ est une classe monotone on déduit que $\mathcal{R}(A)$ en est aussi une.

Si $A \in \mathcal{C}$, puisque $\mathcal{C}$ est un clan, tout élément B de $\mathcal{C}$ est élément de $\mathcal{R}(A)$; donc $\mathcal{C} \subset \mathcal{R}(A)$, et comme $\mathcal{R}(A)$ est une classe monotone $\mathcal{M}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{R}(A)$.

Si $B \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$, on sait que pour tout $A \in \mathcal{C}$, $B \in \mathcal{R}(A)$; donc $A \in \mathcal{R}(B)$; par suite $\mathcal{C} \subset \mathcal{R}(B)$, et donc $\mathcal{M}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{R}(B)$

On vient donc de montrer que si A et B sont des éléments de $\mathcal{M}(\mathcal{C})$, $A - B$ et $A \cup B$ sont des éléments de $\mathcal{M}(\mathcal{C})$.

Comme $\emptyset$ est élément de $\mathcal{C}$, donc de $\mathcal{M}(\mathcal{C})$, on déduit que si $B \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$ alors $\complement B \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$.

Si $(A_n)_{n \geq 1}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ posons $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$; alors $B_n \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$ et la suite $(B_n)_{n \geq 1}$ est croissante ; donc $\bigcup_{n \geq 1} B_n \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$, c'est à dire $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$.

$\mathcal{M}(\mathcal{C})$ est donc une tribu contenant $\mathcal{C}$; on conclut que $\mathcal{M}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$.

La proposition suivante est la proposition clé pour le théorème de Fubini ; nous verrons qu'au cours de sa démonstration nous serons amenés à reconstruire la mesure produit.

Proposition 62. Soit A un élément

de $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$. Posons $f(x) = \mu_2(A_x)$ et $g(y) = \mu_1(A^y)$.
Alors f est $\mathcal{C}_1 \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}^+}$-mesurable, g est $\mathcal{C}_2 \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}^+}$-mesurable et :
$$\int f \, d\mu_1 = \int g \, d\mu_2 = \mu_1 \times \mu_2 (A).$$

Démonstration.

Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ pour lesquels la conclusion de la proposition est réalisée ; il faut montrer que $\mathcal{R} = \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$.

a) $\mathcal{C} \subset \mathcal{R}$.

En effet soit $A = A_1 \times A_2$ où $A_1 \in \mathcal{C}_1$ et $A_2 \in \mathcal{C}_2$.
Si $x \notin A_1$ alors $A_x = \emptyset$
Si $x \in A_1$ alors $A_x = A_2$.
Donc $f = \mu_2(A_2) \chi_{A_1}$ (f est mesurable).
De même $g = \mu_1(A_1) \chi_{A_2}$.
De plus $\int f \, d\mu_1 = \mu_2(A_2) \cdot \mu_1(A_1) = \int g \, d\mu_2$; donc $A \in \mathcal{R}$.

Si A est réunion finie d'éléments deux à deux disjoints de la forme $A_1 \times A_2$, il est clair que A est aussi un élément de $\mathcal{R}$ en vertu des propriétés d'additivité de l'intégrale.

b) Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite croissante

d'éléments de $\mathcal{R}$ et soit $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n$; alors $A \in \mathcal{R}$.

En effet soit $f_n(x) = \mu_2(A_{n_x})$
$$g_n(y) = \mu_1(A_n^y).$$
Posons aussi :
$f(x) = \mu_2(A_x)$ et $g(y) = \mu_1(A^y)$.
Alors, $A_x = \bigcup_{n \geq 1} A_{n_x}$; donc $\mu_2(A_x) = \sup_{n \geq 1} \mu_2(A_{n_x})$.
Par suite la fonction f est mesurable et la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge vers f en croissant.
On en déduit que $\int f \, d\mu_1 = \lim_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu_1$ et que de même $\int g \, d\mu_2 = \lim_{n \to \infty} \int g_n \, d\mu_2$.

Mais $\int f_n \, d\mu_1 = \int g_n \, d\mu_2 = \mu_1 \times \mu_2 (A_n)$, donc
$$\int f \, d\mu_1 = \int g \, d\mu_2 = \lim_{n \to \infty} \mu_1 \times \mu_2 (A_n).$$
Mais puisque $(A_n)_{n \geq 1}$ est une suite croissante, $\lim_{n \to \infty} (\mu_1 \times \mu_2)(A_n) = \mu_1 \times \mu_2 (A)$.
Par suite $A \in \mathcal{R}$.

c) Si $(B_n)_{n \geq 1}$ est une suite d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{R}$, $\bigcup_{n \geq 1} B_n$ est un élément de $\mathcal{R}$.
Posons $A_n = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$; alors $A_{n_x} = \bigcup_{i=1}^{n} B_{i_x}$
et $\mu_2(A_{n_x}) = \sum_{i=1}^{n} \mu_2(B_{i_x})$.
Donc $\mu_2(A_{n_x})$ est mesurable ; de même

$\mu_1(A_n^y)$ est mesurable.

De plus :

$$\int \mu_2(A_{n_x})\,d\mu_1 = \sum_{i=1}^{n} \int \mu_2(B_{i_x})\,d\mu_1 = \sum_{i=1}^{n} \int \mu_1(B_i^y)\,d\mu_2$$

$$= \int \mu_1(A_n^y)\,d\mu_2 .$$

On a aussi :

$$\int \mu_2(A_{n_x})\,d\mu_1 = \sum_{i=1}^{n} \int \mu_2(B_{i_x})\,d\mu_1 = \sum_{i=1}^{n} \mu_1\times\mu_2(B_i)$$

$$= \mu_1\times\mu_2(A_n).$$

Donc $A_n \in \mathcal{R}$; comme la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est croissante, $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{R}$, c'est-à-dire $\bigcup_{n\geq 1} B_n \in \mathcal{R}$.

d) Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{R}$ telle que $A_0 \subset P\times Q$ où $P \in \mathcal{T}_1$ avec $\mu_1(P) < +\infty$ et où $Q \in \mathcal{T}_2$ avec $\mu_2(P) < +\infty$.

Posons $A = \bigcap_{n\geq 1} A_n$, $f_n(x) = \mu_2(A_{n_x})$, $g_n(y) = \mu_1(A_n^y)$.

On a $A_x = \bigcap_{n\geq 1} A_{n_x}$, et donc :

$\mu_2(A_x) = \inf_{n\geq 1} \mu_2(A_{n_x})$.

De même $\mu_1(A^y) = \inf_{n\geq 1} \mu_1(A_n^y)$.

Donc f et g sont des fonctions mesurables, et

de plus grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue on peut écrire :

$$\int \mu_2(A_x)\,d\mu_1 = \inf_{n\geq 1} \int \mu_2(A_{n_x})\,d\mu_1 = \inf_{n\geq 1} \int \mu_1(A_n^y)\,d\mu_2 .$$

$$= \int \mu_1(A^y)\,d\mu_2 .$$

En outre :

$$\int \mu_2(A_x)\,d\mu_1 = \inf_{n\geq 1} (\mu_1\times\mu_2)(A_n) = \mu_1\times\mu_2(A) .$$

Donc $A \in \mathcal{R}$.

e) Soient $(E_1^n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{T}_1$ vérifiant $\mu_1(E_1^n) < +\infty$ et $\bigcup_{n\geq 1} E_1^n = E_1$, et $(E_2^n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{T}_2$ vérifiant $\mu_2(E_2^n) < +\infty$ et $\bigcup_{n\geq 1} E_2^n = E_2$.

Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des parties $A \in \mathcal{T}_1\times\mathcal{T}_2$ telles que $A \cap (E_1^n \times E_2^m) \in \mathcal{R}$ pour tout couple d'entiers strictement positifs (n,m).

D'après a) b) d), $\mathcal{M}$ est une classe monotone qui contient $\mathcal{C}$; donc $\mathcal{M} = \mathcal{T}_1\times\mathcal{T}_2$.

Pour tout A de $\mathcal{T}_1\times\mathcal{T}_2$, tout $n\geq 1$, tout $m\geq 1$ on a donc $A\cap(E_1^n \times E_2^m) \in \mathcal{R}$; d'autre part si $(n,m) \neq (n',m')$ alors :

$$A\cap(E_1^n\times E_2^m)\cap(E_1^{n'}\times E_2^{m'}) = \emptyset .$$

D'après c) $\bigcup_{\substack{n\geq 1\\ m\geq 1}} [A\cap(E_2^n\times E_1^m)]\in\mathcal{R}$

c'est-à-dire $A\in\mathcal{R}$.

Les deux théorèmes suivants sont les deux volets du théorème de Fubini

Théorème 26. (Théorème de Fubini pour le cas des fonctions positives). Soient $(E_1,\mathcal{T}_1,\mu_1)$ et $(E_2,\mathcal{T}_2,\mu_2)$ deux espaces mesurés où μ_1 et μ_2 sont des mesures positives σ-finies, f une application de $E_1\times E_2$ dans $\overline{\mathbb{R}}^+$, $\mathcal{T}_1\times\mathcal{T}_2$ $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}^+}$-mesurable.

Alors :

$f^y : E_1 \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$, $x \longmapsto f(x,y)$ est mesurable

$g : E_2 \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$, $y \longmapsto \int f^y d\mu_1$ est mesurable

$f_x : E_2 \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$, $y \longmapsto f(x,y)$ est mesurable

$h : E_1 \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$, $x \longmapsto \int f_x d\mu_2$ est mesurable

et :

$$\int\left(\int f^y d\mu_1\right) d\mu_2 = \int\left(\int f_x d\mu_2\right) d\mu_1 = \int f \, d\mu_1\times\mu_2$$

Démonstration.

Si $f=\chi_A$ où $A\in\mathcal{T}_1\times\mathcal{T}_2$, alors $f^y=\chi_{A^y}$ et $f_x=\chi_{A_x}$; les conclusions découlent des propositions 58 page 143 et 62 page 146. En vertu de la linéarité de l'intégrale le théorème est vrai pour les fonctions $\mathcal{T}_1\times\mathcal{T}_2$-simples. Par passage à la limite sur les suites croissantes de fonctions simples, on démontre le résultat pour toute fonction f mesurable de $E_1\times E_2$ dans $\overline{\mathbb{R}}^+$.

Remarquons que $\int f d\mu_1\times\mu_2$ peut être éventuellement égal à $+\infty$.

Théorème 27 (Théorème de Fubini pour le cas des fonctions de L^1). Si f est élément de $L^1_{\mathbb{C}}(\mu_1\times\mu_2)$, alors f^y est dans $L^1_{\mathbb{C}}(\mu_1)$ pour μ_2-presque tout y de E_2, f_x est dans $L^1_{\mathbb{C}}(\mu_2)$ pour μ_1-presque tout x de E_1, g définie presque partout sur E_2 est dans $L^1_{\mathbb{C}}(\mu_2)$, h définie presque partout dans E_1 est dans $L^1_{\mathbb{C}}(\mu_1)$ et :

$$\int f \, d\mu_1\times\mu_2 = \int\left(\int f^y d\mu_1\right) d\mu_2 = \int\left(\int f_x d\mu_2\right) d\mu_1 .$$

Démonstration.

En écrivant $f = f^+ - f^-$ et en observant que f est élément de $L^1(\mu)$ si et seulement si f^+ et f^- sont dans $L^1(\mu)$, on constate qu'il suffit de faire la démonstration pour des fonctions positives.

Soit f positive ; l'application du théorème 26 page 151 permet alors d'écrire :

$\int f \, d\mu_1 \times \mu_2 = \int \left(\int f^y d\mu_1 \right) d\mu_2$;

mais puisque $\int f \, d\mu_1 \times \mu_2 < +\infty$, $\int f^y d\mu_1$ est fini μ_2-presque partout et en tant que fonction définie presque partout dans E_2 elle est dans $L^1(\mu_2)$.

D'autre part puisque $\int f^y d\mu_1 < +\infty$ pour presque tout y, $f^y \in L^1(\mu_1)$ pour presque tout y.

On démontre de manière analogue les autres conclusions du théorème.

Remarque. Supposons que $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$ et que $f \in L^1(\mu_1 \times \mu_2)$. Alors $f_1 \in L^1(\mu_1)$, $f_2 \in L^1(\mu_2)$ et :

$\int f \, d\mu_1 \times \mu_2 = \left(\int f_1 \, d\mu_1 \right) \left(\int f_2 \, d\mu_2 \right)$.

Conformément à un usage établi, nous noterons $\iint f(x,y) \, d\mu_1(x) \, d\mu_2(y)$ l'intégrale de f par rapport à la mesure $\mu_1 \times \mu_2$.

En ce qui concerne l'application du théorème de Fubini on est souvent amené à utiliser la démarche suivante :

une fonction $f(x,y)$ étant donnée pour laquelle on veut permuter l'ordre des intégrations,

a) on applique le théorème 26 à la fonction $|f(x,y)|$.

b) par une majoration d'une des deux intégrales $\int \left(\int |f(x,y)| \, d\mu_1 \right) d\mu_2$ ou $\int \left(\int |f(x,y)| \, d\mu_2 \right) d\mu_1$ on montre que $f(x,y)$ est dans $L^1(\mu_1 \times \mu_2)$.

c) on applique alors le théorème 27 à la fonction $f(x,y)$.

4.8. Intégration de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

Nous avons déjà construit dans la partie B du paragraphe 3.4. (page 80) la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Il est alors facile de définir la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ comme la complétée d'un produit de n mesures de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Nous noterons cette mesure dv_n ou encore $dx_1 dx_2 \dots dx_n$. Grâce à la proposition 19 page 36, on voit que cette mesure est définie sur la complétée de la tribu borélienne de $\mathbb{R}^n$.
On remarque aussi que :

$$dv_n\left(\prod_{j=1}^{n} (a_j, b_j)\right) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j).$$

La proposition suivante est une conséquence immédiate des définitions.

Proposition 63. Si $n = p \times q$ alors $dv_n = \widehat{dv_p \times dv_q}$

Proposition 64. La mesure dv_n vérifie pour tout lebesguien A de $\mathbb{R}^n$ les relations :

$dv_n(A+x) = dv_n(A)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

$dv_n(\lambda A) = \lambda\, dv_n(A)$ pour tout $\lambda \geq 0$.

Démonstration.

Soit l'application $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$;
$y \longmapsto y-x$

alors T est $\widehat{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}}\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$-mesurable.
Soit $T(dv_n)$ la mesure image de dv_n par T.
Alors $T(dv_n)(A) = dv_n(T^{-1}(A)) = dv_n(A+x)$.
Alors $T(dv_n)$ et $dv_n|_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}}$ sont deux mesures sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}^n$, σ-finies qui coïncident sur les parties de la forme $\prod_{j=1}^{n} (a_j, b_j)$; donc elles coïncident sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.
Alors $dv_n = \widehat{T(dv_n)}$, ce qui montre que pour tout borélien, puis pour tout lebesguien A, $dv_n(A+x) = dv_n(A)$.
La deuxième relation se montre de manière analogue.

Dès à présent, grâce à la proposition 63 nous pouvons donner deux exemples de changement de variable dans une intégrale de Lebesgue ; une étude complète de ce problème sera faite au 5.2. page

Proposition 64. Soient f un élément de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$, x un point de $\mathbb{R}^n$

et λ un réel >0 ; alors F et G définis respectivement par $F(t) = f(x+t)$ et $G(t) = f(\lambda t)$ sont des éléments de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ et : $\int F \, dv_n = \int f \, dv_n$

$\int G \, dv_n = \frac{1}{\lambda} \int f \, dv_n$

Démonstration.

Suivant la méthode que nous avons déjà employée à plusieurs reprises, nous démontrons le résultat pour les fonctions caractéristiques des Lebesguiens, puis pour les fonctions simples, puis pour les fonctions intégrables positives et enfin pour les fonctions intégrables (réelles puis complexes).

On laisse au lecteur le soin de s'assurer que de la même manière pour tout Lebesguien A de $\mathbb{R}^n$, $dv_n(-A) = dv_n(A)$ et que si f est dans $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ alors h défini par $h(t) = f(-t)$ est aussi dans $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ et que $\int h \, dv_n = \int f dv_n$.

Théorème 28. Soit $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Si la fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann, elle est intégrable au sens de Lebesgue par rapport à dx sur $[a,b]$ et les deux intégrales sont égales.

Démonstration.

Remarquons qu'en vertu de l'exercice 10 page 20 et de l'exercice 21 page 92 la fonction f est $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathbb{R}}\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ - mesurable.

Puisque f est intégrable au sens de Riemann, on peut trouver une suite croissante $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ de fonctions en escalier majorées par f et une suite décroissante $(\psi_n)_{n\geq 1}$ de fonctions en escalier minorées par f, telles que :

$$\lim_{n\to\infty} I(\varphi_n) = \lim_{n\to\infty} I(\psi_n) = (\mathcal{R}) \int_a^b f(x)dx.$$

Remarquons qu'une fonction en escalier positive est aussi une fonction simple et que son intégrale de Riemann est aussi son intégrale de Lebesgue.

En ce qui concerne une fonction en escalier de signe quelconque, on voit que c'est la différence de deux fonctions en escalier positives et donc là encore intégrale de Riemann et intégrale de Lebesgue coïncident.

Des inégalités $0 \le f-\varphi_n \le \psi_n - \varphi_n \le \psi_1 - \varphi_1$ et du fait que $\psi_n - \varphi_n \in L^1$ on en déduit que $f-\varphi_n \in L^1$, et comme $\varphi_n \in L^1$, $f \in L^1$.

De plus :

$$\lim_{n\to\infty} (\mathcal{L}) \int_a^b (f(x)-\varphi_n(x))\,dx \le \lim_{n\to\infty} \int_a^b (\psi_n(x)-\varphi_n(x))\,dx = 0$$

donc $\lim_{n\to\infty} (\mathcal{L}) \int_a^b (f(x)-\varphi_n(x))\,dx = 0$

et par suite $\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\,dx = (\mathcal{L}) \int_a^b f(x)\,dx$,

c'est à dire :

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\,dx = (\mathcal{L}) \int_a^b f(x)\,dx.$$

Bien entendu il existe des fonctions qui sont intégrables au sens de Lebesgue qui ne le sont pas au sens de Riemann ; par exemple la fonction caractéristique des nombres rationnels de l'intervalle $[a,b]$.
Il ne faut pas croire pour autant que

puisque l'intégrale de Lebesgue est plus générale que celle de Riemann celle ci ainsi que l'intégrale de Cauchy ne présentent plus aucun intérêt.

Du point de vue des théorèmes généraux il est vrai que outre les améliorations dont nous avons déjà parlé, la théorie de Lebesgue apporte, même dans le cadre de l'intégrale des fonctions continues, des éclaircissements et des simplifications. Par exemple le théorème suivant :

Soit $(f_n)_{n\ge 1}$ une suite de fonctions continues sur $[0,1]$ telles que $0 \le f_n \le 1$ pour tout $n \ge 1$, qui converge simplement vers 0 sur $[0,1]$; alors $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 0$.

qui s'exprime uniquement dans le cadre des fonctions continues et donc de l'intégrale de Cauchy, est très difficile à démontrer en restant dans ce cadre ; par contre la théorie de Lebesgue en donne une démonstration immédiate.

Toutefois dans de nombreux cas pratiques les sommes de Riemann ou les fonctions en escalier jouent un rôle important.

En ce qui concerne l'intégration sur un intervalle non borné de $\mathbb{R}$ on ne dispose pas d'une intégration au sens de Riemann, mais d'une notion un peu différente : l'intégrale de Riemann généralisée. Nous allons voir les liens de celle-ci avec l'intégrale de Lebesgue.

Théorème 29. Soit f une fonction de $[a,+\infty[$ dans $\mathbb{C}$, intégrable au sens de Riemann sur tout compact de $[a,+\infty[$. Si f admet sur $[a,+\infty[$ une intégrale généralisée au sens de Riemann absolument convergente, alors f est dans $L^1[a,+\infty[$ et $(\mathcal{R})\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = (\mathcal{L})\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$; sinon, f n'appartient pas à $L^1[a,+\infty[$.

Démonstration.

D'après le théorème 28 on sait que pour tout $x \geq a$ on a :

$(\mathcal{R})\int_a^x f(x)\,dx = (\mathcal{L})\int_a^x f(x)\,dx$,

et aussi $(\mathcal{R})\int_a^x |f(x)|\,dx = (\mathcal{L})\int_a^x |f(x)|\,dx$.

Mais $(\mathcal{L})\int_a^x |f(x)|\,dx = (\mathcal{L})\int_a^{+\infty} |f(x)|\,\chi_{[a,x]}\,dx$

En vertu du théorème de Beppo-Levi, pour toute suite croissante (x_n) tendant vers $+\infty$ on a :

$$\begin{aligned}(\mathcal{L})\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx &= \lim_{n\to\infty} (\mathcal{L})\int_a^{+\infty} |f(x)|\,\chi_{[a,x_n]}\,dx \\ &= \lim_{n\to\infty} (\mathcal{L})\int_a^{x_n} |f(x)|\,dx \\ &= \lim_{n\to\infty} (\mathcal{R})\int_a^{x_n} |f(x)|\,dx \\ &= (\mathcal{R})\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx\end{aligned}$$

donc si $(\mathcal{R})\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx < +\infty$ f est dans $L^1[a,+\infty[$ et si $(\mathcal{R})\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx = +\infty$ f n'est pas dans $L^1[a,+\infty[$

Dans le cas où f est dans $L^1[a,+\infty[$, en appliquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue à la suite $f_n = f.\chi_{[a,x_n]}$ (suite dominée par $|f|$), on obtient l'égalité cherchée.

On remarque que dans le cas où f admet une intégrale généralisée semi-convergente,

f n'est pas intégrable au sens de Lebesgue. Au sens de Lebesgue on sait qu'en ce qui concerne les fonctions mesurables, il y a équivalence entre intégrabilité et absolue intégrabilité ; ceci n'a évidemment pas lieu pour les intégrales de Riemann généralisée. Le lecteur est invité à faire un rapprochement avec le comportement des séries et des familles sommables (Une série semi-convergente n'est pas une famille sommable).

On peut établir des résultats analogues pour des intervalles $]-\infty, b]$, ou pour des fonctions qui ne restent pas bornées au voisinage d'un point.

4.9. Etudes de fonctions définies par des intégrales.

Dans ce paragraphe nous étudions du point de vue de la continuité et de la dérivabilité, des fontions $F(\lambda) = \int_A f(x,\lambda)\, d\mu(x)$, où A est une

partie d'un espace mesuré $(X, \mathcal{C}, \mu)$ et où $f(x,\lambda)$ est pour tout λ d'une partie à préciser de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$ (partie qui sera l'ensemble de définition de F) une fonction intégrable par rapport à μ.

Nous ne ferons pas une étude exhaustive de ces questions ; nous examinerons sur des exemples comment grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue on peut aborder ces problèmes.

Exemples d'études de continuité.

En posant $F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+x^2}\, dx$ on définit une fonction F sur $[0, +\infty[$.

Montrons que F est continue en tout point a de $[0, +\infty[$.

Pour toute suite $(t_n)_n$ de $[0, +\infty[$ qui converge vers a on pose $f_n(x) = \frac{e^{-t_n x}}{1+x^2}$, et donc $F(t_n) = \int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx$.

En se servant de la continuité par rapport à t de la fonction $\frac{e^{-tx}}{1+x^2}$ on voit que $(f_n(x))_{n \geq 1}$ converge simplement vers $\frac{e^{-ax}}{1+x^2}$;

d'autre part pour tout $n \geq 1$, $|f_n(x)| \leq \frac{1}{1+x^2}$.
La fonction $\frac{1}{1+x^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$;
on peut donc appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue :

$$\int_0^{+\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx\,;$$

c'est à dire :

$$\lim_{n\to\infty} F(t_n) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{1+x^2}\,dx.$$

En posant $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+xt^2}\,dt$ pour $x \geq 0$ on définit une fonction sur $[0,+\infty[$.
Soit $M \geq 0$; pour tout x de $[0,M]$ on a alors $\frac{x}{1+xt^2} \leq \frac{M}{1+Mt^2}$ (En effet $\frac{x}{1+xt^2}$ es une fonction croissante de x sur $[0,M]$).
Soit $a \in [0,M]$ et $(x_n)_n$ une suite de points de $[0,M]$ qui converge vers a. Posons $f_n(t) = \frac{x_n}{1+x_n t^2}$; alors $F(x_n) = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$.
Là encore le théorème de convergence dominée permet de conclure que $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(a)$.
On en déduit que F est continue sur $[0,+\infty[$.

Posons maintenant pour $x \geq 0$ $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2t^2}\,dt$;
il est clair que pour $x > 0$ $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}$ et que $F(0) = 0$. F n'est pas continue en 0.

Posons $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t}\,dt$

Pour $x > 0$ $e^{-xt}\frac{\sin t}{t}$ est intégrable au sens de Lebesgue sur $[0,+\infty[$; pour $x = 0$, on sait que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ existe au sens des intégrales généralisées, mais que cette intégrale est semi-convergente.
Soit alors $\alpha > 0$; pour $x \geq \alpha$ $\left|e^{-xt}\frac{\sin t}{t}\right| \leq e^{-\alpha t}$;
en utilisant la méthode déjà exposé on montre que F est continue pour tout $x \geq \alpha$, et donc pour tout $x > 0$.
Pour $x = 0$ il s'agit d'une toute autre étude, qui ne relève pas de la théorie de Lebesgue puisque $\frac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable au sens de Lebesgue. Ici l'utilisation de l'intégration par partie va nous permettre de conclure :

$$F(x) = \int_0^{A} e^{-xt}\frac{\sin t}{t}\,dt + \int_A^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin t}{t}\,dt\,;$$

mais :

$$\int_A^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{1}{A}e^{-Ax}\left(\frac{x\sin A}{1+x^2} + \frac{\cos A}{1+x^2}\right)$$
$$- \int_A^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t^2}\left(\frac{x\sin t}{1+x^2} + \frac{\cos t}{1+x^2}\right)dt\,;$$

Pour $x \in [0,1]$, $\left|\int_A^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t^2}\left(\frac{x \sin t}{1+x^2} + \frac{\cos t}{1+x^2}\right) dt\right| \leq 2\int_A^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$

et $\left|\frac{1}{A} e^{-Ax}\left(\frac{x \sin A}{1+x^2} + \frac{\cos A}{1+x^2}\right)\right| \leq \frac{2}{A}$

On voit donc que si $\varepsilon > 0$ est donné, il existe A tel que $\left|\int_A^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt\right| \leq \varepsilon/2$ et ceci $\forall x \in [0,1]$.

Sur le compact $[0,A]$ il est facile de voir que $\lim_{x \to 0} \int_0^A e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^A \frac{\sin t}{t} dt$.

Comme :

$$\left|F(x) - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt\right| \leq \left|\int_0^A e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt - \int_0^A \frac{\sin t}{t} dt\right|$$

$$+ \left|\int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt\right| + \left|\int_A^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt\right|$$

ou encore :

$$\left|F(x) - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt\right| \leq \left|\int_0^A e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt - \int_0^A \frac{\sin t}{t} dt\right| + \varepsilon,$$

on voit que $\lim_{x \to 0} F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$

Exemples d'études de dérivabilité :

Le théorème de convergence dominée nous permet d'énoncer la proposition suivante :

Proposition 65. Soit $f(x,\lambda)$ une fonction intégrable sur X pour tout λ d'un voisinage de λ_0. Posons :

$F(\lambda) = \int_X f(x,\lambda) \, d\mu(x)$.

Supposons que $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda_0)$ existe pour μ-presque tout x.

Soit g une fonction intégrable telle que pour tout λ dans un voisinage de λ_0

$\frac{|f(x,\lambda) - f(x,\lambda_0)|}{|\lambda - \lambda_0|} \leq g(x)$ sauf sur un ensemble de mesure nulle (qui dépend de λ).

Alors : $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda_0)$ est intégrable sur X et

$$\frac{dF}{d\lambda}(\lambda_0) = \int_X \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda_0) \, d\mu(x).$$

Remarquons que l'on dispose d'un énoncé plus maniable grâce à l'inégalité des accroissements finis :

Proposition 66. Soit $f(x,\lambda)$ une fonction intégrable sur X pour tout λ d'un intervalle (a,b) de $\mathbb{R}$.

Posons $F(\lambda) = \int_X f(x,\lambda) \, d\mu(x)$.

Supposons que $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda)$ existe pour tout λ de (a,b) et qu'il existe une fonction intégrable g telle que $\left|\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda)\right| \leq g(x)$; alors $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda)$ est intégrable sur X et $\frac{dF}{d\lambda}(\lambda) = \int_X \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda)\, d\mu(x)$.

En posant par exemple $F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+x^2}\,dx$

on définit une fonction F sur $[0,+\infty[$.

Soit $f(x,t) = \frac{e^{-tx}}{1+x^2}$; on a : $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = -\frac{x e^{-tx}}{1+x^2}$; $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ est donc intégrable pour tout $t>0$.

Soit $\alpha > 0$. Pour $t \in [\alpha,+\infty[$ on a :

$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq \frac{x}{1+x^2}\, e^{-\alpha x}$

La proposition 66 (page 168) nous permet donc de conclure que pour $t \geq \alpha$ F est dérivable et $\frac{dF}{dt}(t) = -\int_0^{+\infty} \frac{x e^{-tx}}{1+x^2}\,dx$

Donc F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et sur cet intervalle $\frac{dF}{dt}(t) = -\int_0^{+\infty} \frac{x e^{-tx}}{1+x^2}\,dx$.

L'étude de la dérivabilité de F en 0 relève d'autres techniques :

Soit $\alpha > 0$; il existe A tel que $\int_0^A \frac{x}{1+x^2}\,dx \geq 2\alpha$.

$\int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-tx}-1}{t}\right) \frac{1}{1+x^2}\,dx \leq \int_0^A \left(\frac{e^{-tx}-1}{t}\right) \frac{1}{1+x^2}\,dx$

Mais $\frac{e^{-tx}-1}{t} \leq -x + \frac{tx^2}{2}$

Donc :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}-1}{t} \frac{1}{1+x^2}\,dx \leq -2\alpha + t\int_0^A \frac{x^2}{2(1+x^2)}\,dx$$

Pour $0 < t < \eta$, $t\int_0^A \frac{x^2}{2(1+x^2)}\,dx \leq \alpha$.

donc $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}-1}{t} \frac{1}{1+x^2}\,dx \leq -\alpha$

Par suite $\lim_{t\to 0^+} \frac{F(t)-F(0)}{t} = -\infty$.

4.10. Introduction au langage des probabilités.

Le but n'est pas ici de développer la théorie des probabilités, mais de profiter du cadre qui est offert pour introduire quelques notions de base sur ce sujet. S'il est vrai que les notions concernant les probabilités se définissent dans le cadre de la théorie de la mesure et de l'intégration, il ne faut pas oublier que les problématiques

originales apportées par des questions probabilistes font que l'étude de la théorie des probabilités ne peut se confondre avec celle de la théorie de la mesure.
Dans la suite du cours nous donnerons, quand cela est possible, des interprétations probabilistes ; en outre certains résultats importants concerant les probabilités seront donnés en exercices.

Un espace probabilisé est un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ où P est une mesure positive de masse 1 : $P(\Omega) = 1$.
Ω est l'ensemble des épreuves ; c'est un ensemble qui contient les résultats possibles d'une expérience aléatoire.
$\mathcal{E}$ est la tribu des événements ; un élément $A \in \mathcal{E}$ est un événement qui peut être ou ne pas être réalisé lors de l'expérience aléatoire en question ; il a une probabilité $P(A)$ d'être réalisé.
Donnons pour commencer un exemple très simple d'une telle situation dans un

cas discret : le lancer d'un dé équilibré ;
$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$, $P(A) = \dfrac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$
Remarquons que dans le cas d'un dé déséquilibré la connaissance de $p_i = P(\{i\})$ pour $1 \leq i \leq 6$ nous permet de reconstituer la probabilité de tout événement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.
Un point tombe aléatoirement sur un segment de longueur 1, la probabilité étant uniformément répartie :

alors on prendra
$\Omega = [0,1]$, $\mathcal{E} = \mathcal{B}_{\Omega}$, $P = dx$.

Une variable aléatoire réelle est une fonction mesurable de Ω dans $\mathbb{R}$.
Soit f une variable aléatoire réelle intégrable :

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \omega \longmapsto f(\omega)$$

par définition on appelle espérance mathématique de f : $E(f) = \int_{\Omega} f(\omega)\, dP(\omega)$.
Cette notion correspond à la notion de moyenne pondérée ; prenons l'exemple du lancer d'un dé déséquilibré, et notons

p_i la probabilité d'apparition de la face i ; considérons la variable aléatoire réelle qui à chaque face fait correspondre le nombre marqué sur cette face ; alors $E(f) = \sum_{i=1}^{6} p_i . i$.

Si $E(f) = 0$, la variable aléatoire f est dite centrée ; $f - E(f)$ est une variable aléatoire centrée.

L'utilisation des statistiques pour formaliser certains problèmes aléatoires donnent un grand intérêt à la notion de fonction de répartition : par exemple on connaitra la probabilité pour qu'un individu pris au hasard dans une population ait une taille inférieure à x.

Soit donc une variable aléatoire réelle f ; notons $F(x) = P\{\omega ; f(\omega) < x\}$; remarquons que si ν_f représente la probabilité image de P par f, alors $F(x) = \nu_f(]-\infty, x[)$; si bien que F est une fonction de répartition (celle de ν_f) au sens du C de 3.4 (page 87).

Dans le cas où F est de classe C^1 : $F'(x) = g(x)$ alors :

$$P(\{\omega ; \alpha < f(\omega) < \beta\}) = \int_\alpha^\beta g(x)\,dx.$$

g est la fonction densité de probabilité.

Remarquons que dans ce cas, en vertu du schéma $\begin{array}{ccccc} \Omega & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} & \xrightarrow{x} & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & f(\omega) & \longmapsto & f(\omega) \end{array}$

et de la proposition 57 page 141 sur les mesures images :

$$E(f) = \int_\Omega f(\omega)\,dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} x\,d\nu_f(x)$$

où la mesure ν_f est la mesure image de P par f, dont la fonction de répartition est F. En vertu de la proposition 48 page 120 concernant les mesures ayant une densité par rapport à une autre :

$$E(f) = \int_\Omega f(\omega)\,dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} x\,g(x)\,dx.$$

La variance, dans le cas où f est de carré intégrable est définie par :

$\sigma^2(f) = \int (f - E(f))^2\,dP$; ceci a un sens car si $f \in L^2(\Omega, \mathcal{C}, P)$ alors en vertu de l'inégalité de Schwarz appliquée à f et 1

on déduit que $\left(\int f\,dP\right)^2 \leq \int f^2 dP$, donc que $f \in L^1(\Omega, \mathcal{C}, P)$. Alors $E(f)$ existe et $f - E(f) \in L^2(\Omega, \mathcal{C}, P)$.

Remarquons encore que :

$$\sigma^2(f) = \int (f - E(f))^2 dP = \int f^2 dP - 2E(f)\int f dP + E(f)^2$$

$$\sigma^2(f) = \int f^2 dP - E(f)^2$$

L'écart type est $\sigma(f)$, racine carrée de la variance.

Dans le cas où l'on dispose d'une densité de probabilité g

$$\sigma^2(f) = \int (x - E(f))^2 g(x)\,dx = \int x^2 g(x)\,dx - (E(f))^2$$

Nous allons introduire maintenant une notion extrêmement importante, la notion d'indépendance.

Soit $(\Omega, \mathcal{C}, P)$ un espace probabilisé.

Une famille $\mathcal{S}$ d'événements est dite indépendante si pour tout sous ensemble fini $\mathcal{S}_f$ de $\mathcal{S}$, on a :

$$P\left(\bigcap_{A \in \mathcal{S}_f} A\right) = \prod_{A \in \mathcal{S}_f} P(A)$$

Une famille $\mathcal{E}$ de variables aléatoires réelles est dite indépendante si :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(M_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} P\left(f_i^{-1}(M_i)\right)$$

pour tout sous ensemble fini $(f_i)_{i=1}^{n}$ de $\mathcal{E}$ et pour tout famille finie $(M_i)_{i=1}^{n}$ de boréliens de $\mathbb{R}$. Ceci peut encore s'exprimer en disant que pour toute famille $(M_f)_{f \in \mathcal{E}}$ de boréliens, indexée sur $\mathcal{E}$, la famille $(f^{-1}(M_f))_{f \in \mathcal{E}}$ est indépendante.

f et g étant deux variables aléatoires réelles indépendantes, notons T l'application de Ω dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par :

$T(\omega) = (f(\omega), g(\omega))$.

T est mesurable ; la mesure image P_T sur $\mathbb{R}^2$ de P par T vérifie :

$$P_T((a,b) \times (c,d)) = P(f^{-1}(a,b) \cap g^{-1}(c,d))$$

donc :

$$P_T((a,b) \times (c,d)) = P(f^{-1}(a,b)) \times P(g^{-1}(c,d))$$
$$= P_f(a,b) \times P_g(c,d)$$

où P_f et P_g sont respectivement les mesures images de P par f et par g.

En vertu des propriétés des mesures produit on déduit que $P_T = P_f \times P_g$.

Il est clair que la réciproque est vraie : si $P_T = P_f \times P_g$ alors f et g sont indépendantes.

Proposition 67. Soient f et g deux variables aléatoires réelles indépendantes qui ne s'annulent pas presque partout. Pour que f et g soient intégrable il faut et il suffit que $f.g$ le soit. Dans ces conditions $\int fg\, dP = \int f dP \cdot \int g dP$

Démonstration.

Définissons $p_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(y_1, y_2) \mapsto y_1$ et $p_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(y_1, y_2) \to y_2$

alors $f = p_1 \circ T$ et $g = p_2 \circ T$ (où T est l'application définie à la page 176.)

D'après la proposition 57 page 141 l'intégrabilité de f par rapport à P est équivalente à l'intégrabilité de p_1 par rapport à P_T ; de même l'intégrabilité de g est équivalente à l'intégrabilité de p_2.

Supposons que $|p_1|$ et $|p_2|$ soient intégrables :

$$\int |p_1|\cdot|p_2|\, dP_T = \int |p_1|\cdot|p_2|\, dP_f \times dP_g$$

Par application du théorème de Fubini pour les fonctions positives :

$$\int |p_1|\cdot|p_2|\, dP_T = \left(\int |y_1| dP_f\right)\left(\int |y_2| dP_g\right)$$
$$= \left(\int |p_1| dP_T\right)\left(\int |p_2| dP_T\right)$$

donc $p_1 p_2$ est intégrable par rapport à P_T ; mais $f.g = (p_1 . p_2) \circ T$ donc l'intégrabilité de $p_1 p_2$ par rapport à P_T est équivalente à celle de fg par rapport à P.

Réciproquement si fg est P-intégrable alors il est clair que $p_1 p_2$ est P_T-intégrable ; par application du théorème de Fubini sur les fonctions positives on a :

$$\int |p_1 p_2|\, dP_T = \int |p_1 p_2|\, dP_f \times dP_g = \left(\int |y_1| dP_f\right)\left(\int |y_2| dP_g\right)$$
$$= \left(\int |p_1| dP_T\right)\left(\int |p_2| dP_T\right)$$
$$= \left(\int |f| dP\right)\left(\int |g| dP\right)$$

Comme ni f ni g ne sont nulles presque partout, $\int |f| dP > 0$ et $\int |g| dP > 0$ et par suite $\int |f| dP < +\infty$ et $\int |g| dP < +\infty$.

Dans ces conditions l'application du théorème de Fubini donne :

$$\left(\int f dP\right)\left(\int g dP\right) = \int fg\, dP.$$

Les résultats ci-dessus s'étendent sans difficulté à une famille finie de fonctions.

Proposition 68. Soient $(f_{ij})_{\substack{1 \le i \le k \\ 1 \le j \le n_i}}$ une famille finie de variables aléatoires indépendantes (fonctions boréliennes)

et pour tout i, ϕ_i une fonction borélienne réelle à n_i variables.
Posons $f_i(x) = \phi_i(f_{i,1}(x), f_{i,2}(x), \dots, f_{i,n_i}(x))$: les fonctions $f_1, f_2, \dots, f_k$ sont alors indépendantes.

Démonstration.
Soient $T : \Omega \longrightarrow \prod_{i,j} \mathbb{R}$

$$x \longmapsto (f_{1,1}(x), \dots, f_{1,n_1}(x), \dots, f_{k,1}(x), \dots f_{k,n_k}(x))$$

$$g_{ij}(y_{1,1}, \dots, y_{1,n_1}, \dots, y_{k,1}, \dots, y_{k,n_k}) = y_{ij}$$

$$g_i = \phi_i(g_{i,1}, \dots, g_{i,n_i})$$

alors $f_i = g_i \circ T$, et $f_{ij} = g_{ij} \circ T$
Soit A_i un borélien de $\mathbb{R}$; alors
$(y_{1,1}, \dots y_{1,n_1}, \dots, y_{k,1}, \dots, y_{k,m_k}) \in g_i^{-1}(A_i)$
si et seulement si $(y_{i,1}, \dots, y_{i,n_i}) \in \phi_i^{-1}(A_i)$.
Comme P_T est la mesure produit
$P_{f_{1,1}} \times \dots \times P_{f_{1,n_1}} \times \dots \times P_{f_{k,1}} \times \dots \times P_{f_{k,m_k}}$ on en déduit que :

$$P_T\left(\bigcap_i g_i^{-1}(A_i)\right) = \prod_{i=1}^{k} P_T(g_i^{-1}(A_i)) = \prod_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{n_i} P_{f_{i,j}}(\phi_i^{-1}(A_i))$$

Donc les fonctions g_i sont indépendantes.
Comme $\bigcap_i f_i^{-1}(A_i) = \bigcap_i T^{-1}(g_i^{-1}(A_i))$

$$= T^{-1}\left(\bigcap_i g_i^{-1}(A_i)\right),$$

on déduit que :

$$P\left(\bigcap_i f_i^{-1}(A_i)\right) = P_T\left(\bigcap_i g_i^{-1}(A_i)\right) = \prod_i P_T(g_i^{-1}(A_i))$$
$$= \prod_i P(f_i^{-1}(A_i))$$

ce qui achève la démonstration.
Cette proposition est très intéressante ; on peut grâce à elle démontrer des résultats du type :
f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 étant des variables aléatoires réelles indépendantes, $f_1 f_2$ et $f_3 + f_4 + f_5$ sont indépendantes.

f et g étant deux variables aléatoires réelles de carré intégrable telles que $\sigma(f).\sigma(g) \neq 0$ on définit leur coefficient de corrélation par :

$$r(f,g) = \frac{\int fg\,dP - \int f\,dP \int g\,dP}{\sigma(f)\,\sigma(g)}$$

Remarquons que :

$$\int fg\,dP - \int f\,dP \int g\,dP = \int (f - E(f))(g - E(g))\,dP.$$

donc dans $L^2(\Omega, \mathcal{C}, P)$, $r(f,g) = \dfrac{\langle f - E(f), g - E(g) \rangle}{\| f - E(f) \|_2 \, \| g - E(g) \|_2}$.

Exercices

Exercice 32.

On considère l'application $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \overline{\mathbb{R}}^+$ définie par $\mu(A) = +\infty$ si A n'est pas un ensemble fini, et $\mu(A) = \operatorname{card}(A)$ si A est un ensemble fini. Montrer que $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ est un espace mesuré.
Déterminer $L^1_{\mathbb{C}}(\mu)$, ainsi que l'intégrale de la fonction $u : \begin{array}{l}\mathbb{N} \to \mathbb{C} \\ n \mapsto u_n\end{array}$ où $u \in L^1_{\mathbb{C}}(\mu)$.

Exercice 33.

Considérons l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \delta_{x_0})$ où δ_{x_0} est la mesure de Dirac au point x_0.
Soit f une fonction mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Montrer que f est intégrable par rapport à δ_{x_0} et chercher $\int f \, d\delta_{x_0}$.

Exercice 34.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$

intégrable sur $\mathbb{R}$.
Montrer que $e^{-nx^2} f(x)$ est pour tout $n \in \mathbb{N}$ intégrable sur $\mathbb{R}$ et étudier la convergence de la suite $(a_n)_n$ où :
$$a_n = \int_{\mathbb{R}} e^{-nx^2} f(x)\, dx .$$

Exercice 35.

Soit f une fonction de $[0,1]$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ intégrable sur $[0,1]$. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ où :
$$u_n = \int_0^1 x^n f(x)\, dx .$$

Exercice 36.

a et b étant deux nombres réels, étudier la convergence de la suite $(I_n)_n$ où :
$$I_n = \int_a^b (\cos x)^n \, dx .$$

Exercice 37.

Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$.
On pose $u_n(x) = \frac{1}{n^\alpha} f(nx)$ (où $\alpha > 0$).
Étudier l'intégrabilité de la fonction

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} |u_n(x)| .$$

Montrer que $\lim_{n\to\infty} u_n(x) = 0$ pour presque tout x.

Exercice 38.

Etudier l'intégrabilité sur $[0,2\pi]$ de la fonction

$$[0,2\pi] \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} \operatorname{Log}|\cos x| & \text{si } x \neq \frac{\pi}{2} \text{ et } \frac{3\pi}{2} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 39.

Etudier l'intégrabilité sur $]0,+\infty[$ de la fonction $x \longmapsto \frac{\sin x}{x^\alpha}$ où $\alpha > 0$.

Lorsque nous avons défini l'espace $L^1(\mu)$, nous avons fait remarquer (pages 129 et 130) que nous pouvions en fait définir l'intégrale d'une fonction g qui est égale presque partout à une fonction de $\mathcal{L}^1(\mu)$; mais alors g n'est pas nécessairement mesurable.

Le but de l'exercice 40 est de préciser ces questions.

Exercice 40.

Soit $(E,\mathcal{E},\mu)$ un espace mesuré.
On suppose que μ est une mesure complète.
Soit $g : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable.
Montrer que si $f = g$ μ-presque partout alors f est mesurable.
Donner un contre exemple dans le cas où μ n'est pas complète.

Exercice 41.

$(E,\mathcal{E},\mu)$ étant un espace mesuré, existe-t-il des relations d'inclusion entre les $L^p(\mu)$ pour $p \geq 1$?
Donner des exemples et des contre exemples.

Exercice 42.

Supposons $1 \leq s < p < r \leq \infty$.

Montrer que $L^s(\mu) \cap L^r(\mu) \subset L^p(\mu)$.

Exercice 43

Soient $(E, \mathcal{C}, \mu)$ un espace mesuré et f et g deux fonctions mesurables positives définies sur E.

r, p, q étant des réels ≥ 1 tels que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ montrer que :

$$\left(\int f^r g^r d\mu\right)^{1/r} \leq \left(\int f^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int g^q d\mu\right)^{1/q}.$$

Exercice 44.

f et g étant deux fonctions mesurables positives définies sur $[0,1]$ telles que $f(x)\, g(x) \geq 1$ presque partout, montrer que :

$$\left(\int_0^1 f(x)\, dx\right)\left(\int_0^1 g(x) dx\right) \geq 1 .$$

Exercice 45.

Soient $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$. On pose :

$$F(b) = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos 2bx \, dx.$$

Montrer que F est dérivable et que :

$$\frac{dF}{db} = -\frac{2}{a}\, b\, F(b).$$

Montrer que $F(b) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2} e^{-\frac{b^2}{a}}$.

On pose :

$$G(b) = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \sin 2bx \, dx.$$

Montrer que $G(b) = \frac{1}{a} e^{-\frac{b^2}{a}} \int_0^b e^{\frac{t^2}{a}} dt$.

Étudier $\lim\limits_{b \to \infty} G(b)$ et $\lim\limits_{b \to \infty} b\, G(b)$.

Exercice 46.

Pour tout x réel et tout entier $n \geq 1$ on pose :

$$f_n(x) = e^{-nx} - 2 e^{-2nx}.$$

Comparer :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\right) dt.$$

Expliquer ce résultat.

Exercice 47.

Calculer en dérivant sous le signe $\int$

$$F(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+it)^2}\,dx \text{ , pour tout } t \text{ réel.}$$

En déduire la valeur des intégrales :
$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-2ixt}\,dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\cos(xt)\,dx$.

Exercice 48

Calculer $I_n(a)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a)^n}$ pour $a>0$.

Exercice 49.

Montrer que l'on définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ en posant :
$f(x)=\int_0^{\pi/2}\operatorname{Log}(\cos^2 t + x^2\sin^2 t)\,dt$.
Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et est dérivable sur $]0,+\infty[$.
Calculer $f'(x)$ pour $x>0$. En déduire la valeur de $f(x)$ pour tout x réel.
f est elle dérivable en 0.

Exercice 50.

Soit la fonction f définie par $f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,dt$ pour $x\geq 0$.
Etudier la dérivabilité de f.
Prouver que f est solution d'une équation différentielle du 1er ordre et en déduire la valeur $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$.

Exercice 51.

Montrer que l'on définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$ en posant :
$G(t)=\int_0^{+\infty}e^{-\left(x^2+\frac{t^2}{x^2}\right)}dx$
Montrer que G est dérivable sur $]0,+\infty[$.
et que G est solution de l'équation différentielle $y'+2y=0$ sur $]0,+\infty[$.
En déduire la valeur de $G(t)$ pour tout t réel. G est elle dérivable en 0 !

Exercice 52.

Montrer que l'on définit une fonction continue sur $\mathbb{R}-\{1\}$ en posant :
$\varphi(t)=\int_0^{\pi}\frac{tx\sin x}{1-2t\cos x+t^2}\,dx$.

Montrer que pour tout x et tout t réels on a :
$$\frac{t\sin x}{1-2t\cos x+t^2} = \operatorname{Im}\left(\frac{te^{ix}}{1-te^{ix}}\right).$$
En déduire par une intégration terme à terme d'une certaine série, la valeur de $\varphi(t)$ pour $|t|<1$.
Déterminer finalement la valeur de $\varphi(t)$ pour $t\neq -1$.

Exercice 53.

Montrer que l'on définit une fonction sur $\mathbb{R}$ en posant :
$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2/t}}{\sqrt{t}\,(1+t^2)}\,dt.$$
Etudier la continuité et la dérivabilité de cette fonction.

Exercice 54

Soit D l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ défini par les inégalités $x>0$ et $y>0$.
Etudier :
$$\iint_D \frac{dx\,dy}{(1+y)(1+x^2y)}$$

En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Log} x}{x^2-1}\,dx$.

Exercice 55.

Pour tout $(x,y)\neq(0,0)$ on pose
$$f(x,y) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+x^2t^2)(1+y^2t^2)}.$$
Montrer que $f(x,y) = \dfrac{\pi}{2(|x|+|y|)}$.
Calculer $I = \displaystyle\iint_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)\,dx\,dy$.
En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{Arctg} t}{t}\right)^2 dt$.

Exercice 56.

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right)dx$, $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx\right)dy$ pour :
$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$
Expliquer le résultat.

Exercice 57.

A toute fonction positive f définie sur $\mathbb{R}^n$ on associe la partie D_f de $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$

formée des points (x,t) tels que $0 \leq t \leq f(x)$.
Montrer que f est mesurable si et seulement si D_f l'est.
Montrer que si f est mesurable et $p>0$,
$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^p \, dx = p \int_0^{+\infty} t^{p-1} \operatorname{mes}\{x ; f(x)>t\} \, dt$$
Montrer que si f est mesurable, son graphe est une partie négligeable de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

L'exercice 58 qui suit constitue une approche du calcul symbolique de Mikusinski. La première partie de l'exercice est le théorème de Titschmarch qui est à la base de la théorie.

Exercice 58.

Partie I : Théorème de Titschmarch.
Soient f et g deux fonctions réelles ou complexes définies sur $\mathbb{R}^+$, continues.
On suppose que pour tout réel positif t
$$f * g(t) = \int_0^t f(t-u)\, g(u) \, du = 0.$$

Le but de cette partie est de prouver alors que f ou g est nulle.

1) (Phragmén) Soit g une fonction continue sur $[0,T]$, et supposons $0 \leq t \leq T$.
Montrer que :
$$\lim_{x \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^T e^{kx(t-u)} g(u) \, du = \int_0^t g(u) \, du.$$

2) Soit f une fonction continue sur $[0,T]$; on suppose qu'il existe une constante M telle que pour tout $n \geq 1$, $\left| \int_0^T e^{nt} f(t) \, dt \right| \leq M$.
Prouver que f est nulle.

3) Soit g une fonction continue sur $[1,X]$ telle qu'il existe une constante C vérifiant pour tout entier $n \geq 1$ $\left| \int_1^X x^n g(x) \, dx \right| \leq C$.
Déduire de 2) que g est nulle.

4) (Lerch) Soit f une fonction continue sur $[0,T]$ telle que pour tout entier $n \geq 1$
$\int_0^T t^n f(t) \, dt = 0$.
Montrer que $f(t) = 0$ sur $[0,T]$
(Se ramener au 3) en posant $t = Lx$, $T = LX$ et $g(x) = f(t)$)

5) Démonstration du théorème dans le cas particulier où $f = g$.

On suppose donc que $\int_0^t f(t-u) f(u)\, du = 0$ pour tout réel positif t.

Considérer l'intégrale :

$\int_0^{2T} e^{n(2T-t)} \left(\int_0^t f(t-u) f(u)\, du \right) dt$ dans laquelle on effectuera le changement de variables : $u = T - v$ et $t = 2T - v - w$.

Se ramener à une intégrale double en v et w sur un triangle Δ que l'on explicitera.

Soit C le carré $[-T,T] \times [-T,T]$ et Δ' le complémentaire de Δ dans C.

Montrer que :

$$\left| \iint_C e^{n(v+w)} f(T-w) f(T-v)\, dv\, dw \right| = \left(\int_{-T}^{T} e^{nv} f(T-v)\, dv \right)^2.$$

Puis en majorant convenablement l'intégrale double sur Δ', montrer que l'on peut trouver M telle que :

$\left| \int_{-T}^{T} e^{nt} f(T-t)\, dt \right| \leq M$.

Majorer ensuite $\left| \int_0^T e^{nt} f(T-t)\, dt \right|$; conclure en utilisant 2).

6) Démonstration du théorème dans le cas général.

On suppose donc $\int_0^t f(t-u) . g(u)\, du = 0$ pour tout t réel positif.

Posons : $f_1(t) = t f(t)$ et $g_1(t) = t g(t)$.

Montrer que :

$f_1 * g(t) + f * g_1(t) = 0$, puis que $f * \{ g_1 * (f_1 * g + f * g_1) \} = 0$, et enfin que $(f*g)*(f_1*g_1) + (f*g_1)*(f*g_1) = 0$.

En conclure que :

$(f * g_1) * (f * g_1) = 0$, puis que $f * g_1 = 0$.

Montrer que si on pose $g_n(t) = t^n g(t)$ $f * g_n = 0$. Conclure.

Partie II : Calcul de Mikusinski.

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions continues complexes définies sur $\mathbb{R}^+$.

Une fonction de $\mathcal{C}$ sera notée $\{f(t)\}$ ou f, tandis que $f(t)$ représente la valeur au point t de la fonction $\{f(t)\}$.

Nous noterons $\{f(t)\} \cdot \{g(t)\} = \{f * g(t)\}$.

La loi $+$ et la loi de convolution (notée ici $\cdot$) font de $\mathcal{C}$ un anneau commutatif.

Le théorème de Titschmarch dit que cet anneau est intègre. On peut donc passer au corps des fractions Q.

Nous noterons 1 l'unité de Q.

Montrer que 1 ne s'identifie pas avec un élément de C.

Soit h l'élément de Q défini par la fonction $\{1\}$. Que représente $h.\{f(t)\}$?

Soit α un nombre complexe ; notons $[\alpha] = \frac{\{\alpha\}}{h}$. Montrer que :

$[\alpha] + [\beta] = [\alpha+\beta]$; $[\alpha]\cdot[\beta] = [\alpha\beta]$; $[\alpha]\cdot\{f(t)\} = \{\alpha f(t)\}$.

Calculer $[\lambda]\cdot\frac{\{a(t)\}}{\{b(t)\}}$.

Soit $s = 1/h$; montrer que si f est de classe C^1, $sf = f' + [f(0)]$.

Montrer que si f est de classe C^n,

$f^{(n)} = s^n f - s^{n-1}\cdot[f(0)] - s^{n-2}\cdot[f'(0)] \dots - [f^{(n-1)}(0)]$.

Montrer que :

$1/s-[\alpha] = \{e^{\alpha t}\}$, $1/(s-[\alpha])^n = \left\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\alpha t}\right\}$

(En particulier on voit que

$1/s = \{1\}$)

Résoudre l'équation $x''(t) - x'(t) - 6x(t) = 2$

$x(0) = 1$, $x'(0) = 0$ en se ramenant dans Q sous la forme $x'' - x' - 6x = 2/s$, $[x(0)] = 1$, $[x'(0)] = 0$.

L'exercice 59 qui suit étudie la convolution des fonctions.

Exercice 59.

Soient f et g deux fonctions de $L^1(\mathbb{R})$.

Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)\cdot g(y)|\, dy < +\infty$.

pour presque tout x. Pour ces x, on définit $h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\cdot g(y)\, dy$; montrer que $h \in L^1(\mathbb{R})$ et que :

$\|h\|_1 \leq \|f\|_1 \; \|g\|_1$.

On notera $h = f * g$.

Montrer que $f*g = g*f$.

Supposons en outre que g est nulle en dehors d'un compact K de $\mathbb{R}$ et qu'elle est p fois continûment dérivable.

Montrer que $f*g$ admet des dérivées au moins jusqu'à l'ordre p.

L'exercice 60 montre comment on peut utiliser la convolution pour approcher des éléments de $L^1(\mathbb{R})$ par des fonctions régulières.

Exercice 60.

Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\lambda > 0$. On définit :

$$f_\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad x \longmapsto \lambda f(\lambda x)$$

Montrer que $f_\lambda \in L^1(\mathbb{R})$ et que :

$$\int_{\mathbb{R}} f_\lambda(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx.$$

Si $y \in \mathbb{R}$ on définit aussi :

$$T_y(f) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad x \longmapsto f(x-y)$$

Montrer que $T_y(f) \in L^1(\mathbb{R})$ et que :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} T_y(f)(x)\,dx.$$

On suppose, en outre f continue ; montrer que $\lim\limits_{y \to 0} \int_{\mathbb{R}} | T_y f(x) - f(x) |\,dx = 0$.

Posons $K(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \text{ ou } x \leq -1 \end{cases}$

où $\lambda = \left(\int_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{1-x^2}} dx \right)^{-1}$.

Montrer que K est indéfiniment dérivable et que $\int_{\mathbb{R}} K(x)\,dx = 1$.

Soit $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = +\infty$.

Montrer que :

$$\| f * K_{\lambda_n} - f \|_1 \leq \int_{\mathbb{R}} \| T_{u/\lambda_n}(f) - f \|_1 \, |K(u)|\,du.$$

En conclure que f est limite au sens de $L^1(\mathbb{R})$ d'une suite de fonctions de classe C^∞.
Démontrer ce dernier résultat en supprimant l'hypothèse f continue. (cf. théorème 31)

L'exercice 61 étudie dans des cas simples certaines équations intégrales.

Exercice 61.

Soient $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré et $K : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable.
On suppose que μ est σ-finie.
Soient p et q tels que $1 < p < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Posons :

$$|||K|||_p = \left(\int \left(\int | K(x,y) |^q \, d\mu(y) \right)^{p/q} d\mu(x) \right)^{1/p}.$$

Supposons que $|||K|||_p < +\infty$.
Montrer que si $f \in L^p$, Tf défini presque

partout par :

$Tf(x) = \int K(x,y)\, f(y)\, d\mu(y)$, est dans $L^p(\mu)$,

et $\|Tf\|_p \leq |||K|||_p \|f\|_p$.

Supposons que T et T' soient deux opérateurs intégraux dont les noyaux sont K et K' où K et K' vérifient les conditions précédentes.

Montrer que TT' est un opérateur intégral dont le noyau est :

$K''(x,y) = \int K(x,z)\, K'(z,y)\, d\mu(z)$.

Quel est le noyau de T^2 ? Quel est celui de T^n ?

On notera désormais K_n le noyau de T^n.

Soient g un élément de L^p et λ un réel tel que $|\lambda| > \|T\|$ où T est l'opérateur intégral $Tf(x) = \int K(x,y)\, f(y)\, d\mu(y)$.

Montrer que l'équation :

$\int K(x,y)\, f(y)\, d\mu(y) = \lambda f(x) + g(x)$, a pour solution :

$f(x) = -\frac{1}{\lambda} g(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} \int K_n(x,y)\, g(y)\, d\mu(y)$.

Plaçons nous maintenant dans le cas où $E = [a,b]$.

Soit $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ mesurable, bornée par M.

On étudie l'équation :

$$\int_a^x K(x,y)\, f(y)\, dy = \lambda f(x) + g(x).$$

On posera $\tilde{K}(x,y) = K(x,y)\, \chi_{[a,x]}$; alors $\int_a^x K(x,y)\, f(y)\, dy = \int_a^b \tilde{K}(x,y)\, f(y)\, dy$, ce qui montre que l'on retombe bien sur un opérateur intégral.

Posons $Tf(x) = \int_a^x K(x,y) f(y)\, dy$.

(Il est clair que $|||\tilde{K}|||_p < +\infty$, donc si $f \in L^p$, $Tf \in L^p$.)

Montrer que $|\tilde{K}_n(x,y)| \leq \frac{M^n (x-y)^{n-1}}{(n-1)!}$.

En conclure que :

$\|T^n\| \leq \frac{M^n \cdot (b-a)^n}{(n-1)!}$.

Montrer que si $\lambda \neq 0$, λ est dans l'ensemble résolvant de T. Trouver la solution de l'équation pour $\lambda \neq 0$.

Les exercices qui suivent sont des exercices élémentaires sur les probabilités.

Exercice 62.

Soit $(E,\mathcal{C},P)$ un espace probabilisé.
B étant un événement tel que $P(B)\neq 0$, on définit pour tout événement A.

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

a) Montrer que $P(\cdot/B) : \begin{array}{l}\mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ A \longmapsto P(A/B)\end{array}$ est une probabilité sur $(E,\mathcal{C})$ (Probabilité de A sachant que B est réalisé).

b) Soient $H_1, H_2, \dots, H_n$ des événements de probabilité non nulle formant une partition de E, et A un événement de probabilité non nulle.
Montrer que :

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)\,P(A/H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(H_j)\,P(A/H_j)} \quad \text{(formule de Bayes)}$$

c) Un appareil peut être monté avec des pièces de haute qualité et avec des pièces ordinaires. Dans le premier cas sa probabilité de fonctionnement sans défaillance durant le temps t est égale à 0,95, dans le second à 0,7. 40% des appareils sont fabriqués avec des pièces de haute qualité. L'appareil a été soumis à l'essai pendant le temps t et s'est avéré bon. Trouver la probabilité qu'il soit monté avec des pièces de haute qualité.

d) Deux stations d'observation fournissent des données sur un certain système qui peut se trouver dans deux états S_1 et S_2 en passant aléatoirement de l'un à l'autre. De longues observations ont permis d'établir que durant 30% du temps le système se trouve dans l'état S_1. La station n°1 se trompe dans 2% des cas et la n°2 dans 8% des cas.
A un certain moment la station n°1 communique que le système est dans l'état S_1 et la station n°2 qu'il est dans l'état S_2. Qui doit-on croire ?

Exercice 63.

a) Soit f une variable aléatoire réelle qui ne peut prendre que les valeurs $0, 1, 2, \dots, n, \dots$; on suppose que

$$P_m = P\{\omega ;\ f(\omega) = m\} = \frac{a^m}{m!}e^{-a} \quad (a>0)$$

(répartition de Poisson).

Montrer tout d'abord que cette hypothèse est possible ; calculer ensuite $E(f)$ et $\sigma(f)$.

b) Une variable aléatoire réelle f a pour densité de probabilité :

$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{(loi normale)}$$

Vérifier que g est bien une densité de probabilité ; quelle est la fonction de répartition de f ? Calculer $E(f)$ et $\sigma(f)$.

Les exercices que nous développons maintenant sont liés aux produits infinis d'espaces probabilisés, et aux suites de variables aléatoires indépendantes.

Exercice 64.

Soit $(E_n, \mathcal{F}_n, \mu_n)_{n \geq 1}$ une suite d'espaces probabilisés.

On définit $Y = \prod_{i=1}^{\infty} E_i$.

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des cylindres de la forme $\prod_{i=1}^{n} A_i \times \prod_{i=n+1}^{\infty} E_i$ où $A_i \in \mathcal{F}_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$.

Notons $\mathcal{C}$ le clan engendré par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{T}$ la tribu engendrée par $\mathcal{A}$.

Notons $\mathcal{P}f(\mathbb{N}^*)$ l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}^*$.

Si $P \in \mathcal{P}f(\mathbb{N}^*)$, soit $\mathcal{C}_P$ le clan sur $\prod_{i \in P} E_i$ engendré par les ensembles de la forme $\prod_{i \in P} A_i$ où $A_i \in \mathcal{F}_i$.

Notons σ_P l'ensemble des parties de Y de la forme $U_P \times \prod_{i \notin P} E_i$ où $U_P \in \mathcal{C}_P$.

a). Montrer que pour tout $P \in \mathcal{P}f(\mathbb{N}^*)$, σ_P est un clan unitaire, et que :

$$\mathcal{C} = \bigcup_{P \in \mathcal{P}f(\mathbb{N}^*)} \sigma_P .$$

b) Montrer qu'il existe une fonction additive d'ensembles μ sur $\mathcal{C}$ et une seule telle que :

$$\mu\left(\prod_{i=1}^{n} A_i \times \prod_{i=n+1}^{\infty} E_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mu_i(A_i)$$ pour tout cylindre élémentaire.

c) Il s'agit de montrer maintenant que la mesure μ introduite au b) est dénombrablement additive sur $\mathcal{C}$.

Pour cela, soit $(B_i)_{i \geq 1}$ une famille

dénombrable d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{C}$, telle que $\bigcup_{i\geq 1} B_i \in \mathcal{C}$.
Posons $F_n = \bigcup_{i\geq n+1} B_i$.

Dans un premier temps nous allons montrer que $\lim_{n\to\infty} \mu(F_n) = 0$. Pour cela :

c_1) Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n\geq 1}$ de parties finies de $\mathbb{N}^*$ telle que $P_n \subset P_{n+1}$ et $F_n = U_n \times \prod_{i\notin P_n} E_i$ où $U_n \in \mathcal{C}_{P_n}$.
On supposera que $P_n = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k_n}\}$.
Montrer que :

$$\mu(F_n) = \int_{E_{\alpha_1}} \{\dots\{\int_{E_{\alpha_{k_n}}} \chi_{U_n}(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \dots, s_{\alpha_{k_n}})\, d\mu_{\alpha_{k_n}}\}\dots\}\, d\mu_{\alpha_1}.$$

c_2) Supposons que $\mu(F_n)$ ne tende pas vers 0, et posons :

$$f_n(s_{\alpha_1}) = \int_{E_{\alpha_2}} \{\dots\{\int_{E_{\alpha_{k_n}}} \chi_{U_n}(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \dots, s_{\alpha_{k_n}})\, d\mu_{\alpha_{k_n}}\}\dots\}\, d\mu_{\alpha_2}.$$

Montrer qu'il existe un point $\mathring{s}_{\alpha_1} \in E_{\alpha_1}$ tel que $\forall n \geq 1$ $f_n(\mathring{s}_{\alpha_1})$ existe et tel que $f_n(\mathring{s}_{\alpha_1})_n$ ne converge pas vers 0.
Montrer que l'on peut construire une suite $(\mathring{s}_{\alpha_i})_i$, où $\mathring{s}_{\alpha_i} \in E_i$ telle que

pour tout m fixé,

$$\int_{E_{\alpha_m}} \{\dots\{\int_{E_{\alpha_{k_n}}} \chi_{U_n}(\mathring{s}_{\alpha_1}, \mathring{s}_{\alpha_2}, \dots, \mathring{s}_{\alpha_{m-1}}, s_{\alpha_m}, \dots, s_{\alpha_{k_n}})\, d\mu_{\alpha_{k_n}}\}\dots\}\, d\mu_{\alpha_m}$$

existe dès que n est tel que $k_n > m$, et ne converge pas vers 0 lorsque $n \to +\infty$.
Montrer que pour tout j et tout t élément de $\prod_{i\notin P_j} E_i$ on a : $(\mathring{s}_{\alpha_1}, \mathring{s}_{\alpha_2}, \dots, \mathring{s}_{\alpha_{k_j}}, t) \in F_j$.

Posons maintenant : $P_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$.
Si $i \notin P_\infty$ prenons $\mathring{s}_i$ un élément quelconque de E_i, et si $i \in P_\infty$ définissons $\mathring{s}_i$ comme il a été dit dans la construction.
Montrer que $\prod_{i=1}^{\infty} \mathring{s}_i$ est dans tous les F_j.
En conclure que $\lim_{n\to\infty} \mu(F_n) = 0$, puis que μ est dénombrablement additive.

d) Montrer qu'il existe une probabilité μ et une seule sur $(Y, \mathcal{C})$ telle que pour tout cylindre élémentaire élément de $\mathcal{A}$ on ait :

$$\mu(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \times \prod_{i\geq n+1} E_i) = \prod_{i=1}^{n} \mu_i(A_i).$$

Exercice 65.

On reprend les notations de l'exercice 64

Montrer que si $A \subset \mathcal{C}$ et si $\varepsilon > 0$ il existe un élément B de $\mathcal{C}$ tel que $\mu(A \Delta B) \leq \varepsilon$.
(cf. exercice 27 page 99)

On pose $Y_n = \prod_{i=n}^{\infty} E_i$. Sur Y_n on définit de même le clan $\mathcal{C}_n$ engendré par les cylindres $\mathcal{A}_n$, et la tribu $\mathcal{C}_n$, puis la probabilité μ_n.

Montrer que si $A^{(n+1)} \in \mathcal{C}_{n+1}$, pour tout $A_1 \in \mathcal{T}_1, A_2 \in \mathcal{T}_2, \ldots, A_n \in \mathcal{T}_n$,
$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times A^{(n+1)} \in \mathcal{C}$ et :

$$\mu(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times A^{(n+1)}) = \mu_1(A_1) \times \cdots \times \mu_n(A_n) \times \mu_{n+1}(A^{(n+1)}).$$

Réciproquement soit A un élément de $\mathcal{C}$ tel que $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times B$ où $B \subset Y_{n+1}$.
Montrer que $B \in \mathcal{C}_{n+1}$ et que

$$\mu(A) = \mu_1(A_1) \times \mu_2(A_2) \times \cdots \times \mu_n(A_n) \times \mu_{n+1}(B).$$

Un événement A sur Y sera dit asymptotique si pour tout $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in A$ et pour tout $n \geq 1$, $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \times \{x_{n+1}\} \times \{x_{n+2}\} \times \cdots \in A$
(Si on modifie un nombre fini de composantes d'un élément de A on obtient encore un élément de A)

Montrer que si A est un événement

asymptotique, pour tout $n \geq 1$ on peut écrire :
$A = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \times B_{n+1}$ où $B_{n+1} \in \mathcal{C}_{n+1}$.
En conclure que $\mu(A) = \mu_{n+1}(B_{n+1})$.

Montrer que si A est un événement asymptotique et si $B \in \mathcal{A}$ alors A et B sont indépendants.
En conclure que si $B \in \mathcal{C}$ alors A et B sont indépendants.

Montrer que si A est un événement asymptotique A est indépendant de lui même.
En conclure que $\mu(A) = 1$ ou $\mu(A) = 0$.

Exercice 66

Soit $(f_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes sur l'espace probabilisé $(X, \mathcal{T}, \mu)$, telle que $\int f_i \, d\mu = 0$ et $\int f_i^2 \, d\mu < +\infty$.

a) Posons $f(x) = \max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{i=1}^{k} f_i(x) \right|$.
Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\mu(\{x ; |f(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{n} \int f_k^2 \, d\mu$$

(On pourra introduire $s_k = \sum_{i=1}^{k} f_i$ et

$E_k = \{x ; |s_k(x)| \geq \varepsilon\} \cap \{x ; |s_i(x)| < \varepsilon , i = 1, 2, \dots, k-1\}$)
On utilisera cette inégalité (Kolmogorov) pour montrer que si g est une variable aléatoire : $\mu(\{x ; |g(x) - E(g)| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\sigma^2(g)$
(Inégalité de Tchebichev)

b) Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge μ.p.p. (On pourra en pensant à la condition de Cauchy introduire $s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$
$a_m(x) = \sup_k \{|s_{m+k}(x) - s_m(x)\}$,
$a(x) = \inf_m \{a_m(x)\}$, et appliquer a))

c) Nous étudions maintenant une réciproque du résultat précédent :
Soit $(f_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires centrées ($\int f_i \, d\mu = 0$).
On suppose qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout i, $|f_i(x)| \leq c$ μ.p.p., et que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge sur un ensemble de mesure > 0.
Montrer qu'il existe un nombre $d > 0$ tel que $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x ; |s_n(x)| \leq d\}$ est une mesure > 0. Posons alors $E_n = \bigcap_{i=1}^{n} \{x ; |s_i(x)| \leq d\}$
Montrer que la suite $(E_n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante et que $\bigcap_{n\geq 1} E_n = E$.
Posons $F_n = E_{n-1} - E_n$ et $\alpha_n = \int_{E_n} s_n^2 \, d\mu$.
Montrer que :
$\alpha_n - \alpha_{n-1} \geq \mu(E) \int f_n^2 \, d\mu - (c+d)^2 \mu(F_n)$
En conclure que :
$d^2 \geq \alpha_k \geq \mu(E) \sum_{n=1}^{k} \int f_n^2 \, d\mu - (c+d)^2$.
En conclure que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \int f_n^2 \, d\mu$ converge.
(On pourra commencer par montrer que f_n^2 et $|s_{n-1}|$ sont indépendantes ; on en conclura que f_n^2 et $\chi_{E_{n-1}}$ sont indépendantes, et donc que $\int_{E_{n-1}} f_n^2 \, d\mu = \mu(E_{n-1}) \int f_n^2 \, d\mu$.)

Exercice 67.
Soit $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$.
$\{0, 1\}$ est muni de la probabilité discrète équirépartie. Ω est muni de la probabilité produit sur la tribu $\mathcal{C}$ produit.
D'autre part si on munit $\{0, 1\}$ de la topologie discrète et Ω de la topologie produit, montrer que $\mathcal{C}$ est la tribu borélienne sur Ω.
Soit $\varepsilon_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$
$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega_n = 1 \\ -1 & \text{si } \omega_n = 0 \end{cases}$$

Montrer que $A = \{\omega ; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n(\omega)}{n} \text{ converge}\}$ est une partie mesurable de Ω.

Montrer que A est un événement asymptotique.

Soit $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $\omega \mapsto \frac{\varepsilon_n(\omega)}{n}$

Appliquer les résultats de l'exercice 66 à la suite $(f_n)_n$ pour montrer que $\mu(A) = 1$.

Chapitre V.

Le point de vue des formes linéaires positives.

5.1. Formes linéaires positives et mesures régulières positives.

5.2. Application au problème du changement de variable dans une intégrale de Lebesgue.

Dans tout ce chapitre nous nous placerons dans le cadre des espaces topologiques localement compacts dénombrables à l'infini (c'est à dire qui sont réunions dénombrables de compacts).
Le principal théorème : théorème de Riesz, identifie les formes linéaires positives sur

l'espace des fonctions continues à supports compacts avec certaines mesures positives.

5.1. Formes linéaires positives et mesures régulières positives.

Proposition 69. Soit E un espace topologique localement compact dénombrable à l'infini.
La tribu borélienne de E est aussi le σ-clan engendré par les compacts.

Démonstration.
Comme tout compact est fermé, le σ-clan engendré par les compacts est contenu dans la tribu borélienne de E.
Réciproquement, E étant localement compact dénombrable à l'infini, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$; donc tout fermé F s'écrit $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \cap F$; donc F est réunion dénombrable de compacts. On en conclut que la tribu borélienne est contenue dans le σ-clan engendré par les compacts.

Proposition 70. Soient E un espace localement compact dénombrable à l'infini et μ une mesure positive sur la tribu borelienne $\mathcal{B}_E$ de E telle que pour tout compact K de E, $\mu(K) < +\infty$.

Les deux propriétés suivantes sont alors équivalentes :

(1) $\mu(A) = \inf\limits_{\substack{A \subset U \\ U \text{ ouvert}}} \mu(U)$ pour tout $A \in \mathcal{B}_E$

(2) $\mu(A) = \sup\limits_{\substack{K \subset A \\ K \text{ compact}}} \mu(K)$ pour tout $A \in \mathcal{B}_E$

La mesure μ est alors dite régulière.

Démonstration.

Supposons (1) et posons :

$\mathcal{M} = \{ A \in \mathcal{B}_E \ ; \ \mu(A) = \sup\limits_{\substack{K \subset A \\ K \text{ compact}}} \mu(K) \}$

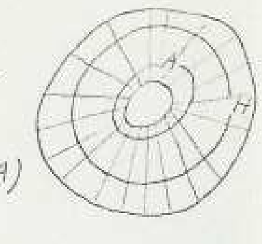
$\mathcal{M}$ est clairement une famille monotone croissante.

D'autre part soit A un borelien relativement compact ; soit H un compact tel que $A \subset H$; $\varepsilon > 0$ étant donné, en vertu de (1), il existe un ouvert U tel que $H - A \subset U$ et $\mu(U) \leq \mu(H-A) + \varepsilon$.

Mais $A = (A \cap U) \cup (H - U)$

donc :

$\mu(A) - \mu(H-U) = \mu(A \cap U)$.



De plus :

$U - (H-A) = (U \cap \complement H) \cup (U \cap A)$

donc :

$\mu(A \cap U) \leq \mu\big(U - (H-A)\big) = \mu(U) - \mu(H-A) \leq \varepsilon$.

Par suite $\mu(A) - \mu(H-U) \leq \varepsilon$.

Mais $H - U$ est un compact inclus dans A, donc $A \in \mathcal{M}$.

$\mathcal{M}$ est donc une classe monotone qui contient les boreliens relativement compacts. Comme E est réunion croissante de compacts, on conclut que $\mathcal{M}$ contient tous les boréliens.

Supposons (2).

A étant relativement compact, soit U un ouvert relativement compact tel

que $A \subset U$ (On peut trouver un tel U puisque E est localement compact).
Soit $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset U - A$ tel que $\mu(U-A) \leq \mu(K) + \varepsilon$.
Alors :

$\mu(U-K) - \mu(A) = \mu((U-K)-A)$.
Mais :
$$\mu((U-K)-A) = \mu((U-A)-K)$$
$$= \mu(U-A) - \mu(K) \leq \varepsilon .$$
Donc :
$\mu(U-K) \leq \mu(A) + \varepsilon$.
Or $U-K$ est ouvert ; par suite on a le résultat désiré pour tout A relativement compact borelien.
Soit maintenant $A \in \mathcal{B}_E$ tel que $\mu(A) < +\infty$.
Soit $(K_n)_n$ une suite de compacts telle que $\bigcup_{n \geq 1} K_n = E$; posons $A_n = K_n \cap A$.
Alors $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n$.
Pour chaque n on peut trouver un ouvert U_n contenant A_n tel que
$\mu(U_n) \leq \mu(A_n) + \varepsilon/2^n$.
En posant $U = \bigcup_{n \geq 1} U_n$ on a :
$A \subset U$ et $\mu(U) \leq \mu(A) + \varepsilon$.

Enfin si $\mu(A) = +\infty$ pour tout U ouvert contenant A, $\mu(U) = +\infty$; l'égalité cherchée est donc prouvée.

Nous verrons plus loin que dans certains cas il peut se faire que toutes les mesures positives qui sont finies sur les compacts soient régulières.

Soient E un espace topologique localement compact dénombrable à l'infini et T une forme linéaire positive sur l'espace $C_K(E)$ des fonctions continues à supports compacts à valeurs réelles.
Pour tout compact K de E on pose :
$$\lambda(K) = \inf\{Tf ; f \in C_K(E), f \geq 0, f(x) \geq 1 \text{ sur } K\}$$
Pour tout ouvert U de E on pose :
$$\lambda_*(U) = \sup\{\lambda(K) ; K \text{ compact}, K \subset U\}$$

Proposition 71. λ vérifie pour tout compact K_1 et tout compact K_2 :

a) $0 \leq \lambda(K_1) < +\infty$

b) $K_1 \subset K_2 \Longrightarrow \lambda(K_1) \leq \lambda(K_2)$

c) $\lambda(K_1 \cup K_2) \leq \lambda(K_1) + \lambda(K_2)$

d) $K_1 \cap K_2 = \emptyset \Longrightarrow \lambda(K_1 \cup K_2) = \lambda(K_1) + \lambda(K_2)$

λ_* vérifie :

a') $U \subset V \quad \lambda_*(U) \leq \lambda_*(V) \quad$ et $\lambda_*(\emptyset) \geq 0$

b') $\lambda_*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_*(U_n)$

c') Si les U_n sont deux à deux disjoints alors : $\lambda_*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_*(U_n)$

Démonstration.

a) provient de la définition même de $\lambda(K)$ puisque $T(f) \geq 0$ pour toute fonction f telle que $f \geq 0$.

b) provient aussi clairement de la définition de $\lambda(K)$.

c) Soit $\varepsilon > 0$, et soit $f_1 \in C_K(E)$ vérifiant :
$f_1 \geq 0$, $f_1 \geq 1$ sur K_1 et $T(f_1) \leq \lambda(K_1) + \varepsilon/2$;
de même soit $f_2 \geq 0$, $f_2 \geq 1$ sur K_2, telle que $T(f_2) \leq \lambda(K_2) + \varepsilon/2$.

Alors : $T(f_1 + f_2) \leq \lambda(K_1) + \lambda(K_2) + \varepsilon$.

Il est clair que $f_1 + f_2 \geq 0$ et que $f_1 + f_2 \geq 1$ sur $K_1 \cup K_2$. Donc $T(f_1 + f_2) \geq \lambda(K_1 \cup K_2)$;
par suite $\lambda(K_1 \cup K_2) \leq \lambda(K_1) + \lambda(K_2)$.

d) Si maintenant K_1 et K_2 sont disjoints, soient U_1 et U_2 des ouverts relativement compacts disjoints tels que $K_1 \subset U_1$ et $K_2 \subset U_2$.
Soit alors f continue telle que $\operatorname{supp} f \subset U_1$ valant 1 sur K_1 et telle que $1 \geq f \geq 0$.
De même soit g continue telle que $\operatorname{supp} g \subset U_2$ valant 1 sur K_2 et telle que $1 \geq g \geq 0$.
Soit $h \geq 0$ telle que $h(x) \geq 1$ sur $K_1 \cup K_2$; alors :
$\lambda(K_1) \leq T(hf)$, $\lambda(K_2) \leq T(hg)$ et par suite
$\lambda(K_1) + \lambda(K_2) \leq T(h(f+g)) \leq T(h)$.
Donc $\lambda(K_1) + \lambda(K_2) \leq \lambda(K_1 \cup K_2)$.

a') découle directement des définitions.

b') U et V étant des ouverts et K un compact inclus dans $U \cup V$ on peut écrire :
$K = K_1 \cup K_2$ avec $K_1 \subset U$ et $K_2 \subset V$.

Donc $\lambda(K) \leq \lambda(K_1) + \lambda(K_2)$

$$\lambda(K) \leq \lambda_*(U) + \lambda_*(V)$$

$$\lambda_*(U \cup V) \leq \lambda_*(U) + \lambda_*(V).$$

Remarquons que si U et V sont disjoints K_1 et K_2 sont disjoints ; alors :
$\lambda(K_1) + \lambda(K_2) = \lambda(K) \leq \lambda_*(U \cup V)$
donc $\lambda_*(U) + \lambda_*(V) \leq \lambda_*(U \cup V)$
si bien que $\lambda_*(U \cup V) = \lambda_*(U) + \lambda_*(V)$.

Soit maintenant $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite d'ouverts.
Soit K un compact inclus dans $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, alors il existe N tel que :
$K \subset \bigcup_{n=1}^{N} U_n$.

Alors : $\lambda(K) \leq \lambda_*(\bigcup_{n=1}^{N} U_n) \leq \sum_{n=1}^{N} \lambda_*(U_n)$

donc $\lambda(K) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_*(U_n)$, et par suite
$\lambda_*(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_*(U_n)$.

Supposons en outre les U_n deux à deux disjoints :
$\lambda_*(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n) \geq \lambda_*(\bigcup_{n=1}^{p} U_n) = \sum_{n=1}^{p} \lambda_*(U_n)$
et ceci pour tout $p \geq 1$; donc :
$\lambda_*(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_*(U_n)$.

Posons maintenant pour toute partie A de E :
$\mu^*(A) = \inf\{\lambda_*(U) ; A \subset U, U \text{ ouvert de } E\}$.
Il est clair que si A est ouvert $\mu^*(A) = \lambda_*(A)$.

Proposition 72. μ^* est une mesure extérieure sur E.

Démonstration.
Il est clair que $\mu^*(\emptyset) = 0$ et aussi que si $A \subset B$ $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.
Soient $(E_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{P}(E)$, et $\varepsilon > 0$. Pour chaque n il existe un ouvert U_n tel que $E_n \subset U_n$ et
$\lambda_*(U_n) \leq \mu^*(E_n) + \varepsilon/2^n$.
Alors :
$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \lambda_*(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_*(U_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \varepsilon$
ce qui démontre que :
$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$.

Proposition 73. La tribu $\mathcal{C}_{\mu^*}$ associée à la mesure extérieure μ^* contient la tribu borélienne.

Démonstration.
Remarquons tout d'abord que pour montrer qu'une partie P appartient

à $\mathcal{T}_{\mu^*}$ il suffit de montrer que pour tout ouvert U, $\mu^*(U) \geq \mu^*(P \cap U) + \mu^*(U \cap \complement P)$.
En effet si A est une partie quelconque de E et si U est un ouvert contenant A :
$\lambda_*(U) = \mu^*(U) \geq \mu^*(U \cap P) + \mu^*(U \cap \complement P)$
$\lambda_*(U) \geq \mu^*(A \cap P) + \mu^*(A \cap \complement P)$.
Or $\mu^*(A) = \inf \lambda_*(U)$, donc :
$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap P) + \mu^*(A \cap \complement P)$ ce qui suffit d'après une remarque faite page 61 pour montrer que $P \in \mathcal{T}_{\mu^*}$.
Montrons maintenant que tout compact K est dans $\mathcal{T}_{\mu^*}$.
Soient U un ouvert de E, D un compact inclus dans $U \cap \complement K$ et F un compact inclus dans $U \cap \complement D$.

$D \cap F = \emptyset$
$U \cap \complement K$ est ouvert.
$U \cap \complement D$ est ouvert
$D \cup F \subset U$.

On a :
$\mu^*(U) = \lambda_*(U) \geq \lambda(D \cup F) = \lambda(D) + \lambda(F)$.
$\mu^*(U) \geq \lambda(D) + \sup \lambda(F) = \lambda(D) + \lambda_*(U \cap \complement D)$
$\mu^*(U) \geq \lambda(D) + \mu^*(U \cap \complement D) \geq \lambda(D) + \mu^*(U \cap K)$

$\mu^*(U) \geq \mu^*(U \cap K) + \sup(\lambda(D))$
$\mu^*(U) \geq \mu^*(U \cap K) + \lambda_*(U \cap \complement K)$
$\mu^*(U) \geq \mu^*(U \cap K) + \mu^*(U \cap \complement K)$.
Comme la tribu borélienne est ici engendrée par les compacts, $\mathcal{T}_{\mu^*}$ contient $\mathcal{B}_E$.
Remarquons en outre que si K est compact il existe un compact K_1 tel que $K \subset \mathring{K}_1 \subset K_1$.
Alors $\mu^*(K) \leq \lambda_*(\mathring{K}_1) \leq \lambda(K_1) < +\infty$, ce qui montre que la restriction de μ^* à $\mathcal{T}_{\mu^*}$ est finie sur les compacts (et donc σ-finie).
Par construction de μ^* on voit que la mesure $\mu^*/\mathcal{T}_{\mu^*}$ (ou $\mu^*/\mathcal{B}_E$) est régulière.

Proposition 74. Avec les notations précédentes, pour toute fonction f dans $C_K(E)$ on a :
$T(f) = \int f \, d\mu$
où μ est la mesure $\mu^*/\mathcal{B}_E$.

Démonstration.
Il suffit de prouver que $T(f) \leq \int f \, d\mu$ pour tout f.

En effet $-T(f) = T(-f) \leq \int (-f)\, d\mu = -\int f\, d\mu$
donc $T(f) \geq \int f\, d\mu$, ce qui montre que
$T(f) = \int f\, d\mu$.
Démontrons donc que $T(f) \leq \int f\, d\mu$.
Soit $K = \operatorname{supp} f$; l'image de f est incluse dans un segment $[a, b]$.
Choisissons des y_i tels que :
$y_0 < a < y_1 < \dots < y_n = b$ avec $y_i - y_{i-1} < \varepsilon$.
Soit $E_i = \{x ;\ y_{i-1} < f(x) \leq y_i\} \cap K$.
Les E_i sont des boréliens deux à deux disjoints dont la réunion est K.
Soit V_i un ouvert contenant E_i tel que
$\mu(V_i) < \mu(E_i) + \varepsilon/n$ et tel que $f(x) < y_i + \varepsilon$ pour tout x de V_i (possible du fait de la continuité de f)
Il existe des fonctions h_i telles que $\operatorname{supp} h_i \subset V_i$ et $\sum_{i=1}^{n} h_i = 1$ sur K. Alors $f = \sum h_i f$.
Du fait que $h_i f \leq (y_i + \varepsilon)\, h_i$, et que sur E_i $y_i - \varepsilon < f(x)$, on déduit :

$$T(f) \leq \sum_{i=1}^{n} (y_i + \varepsilon)\, \mu(V_i) \leq \sum_{i=1}^{n} (y_i + \varepsilon)\, \mu(E_i) + \sum_{i=1}^{n} (y_i + \varepsilon) \frac{\varepsilon}{n}$$

$$T(f) \leq \sum_{i=1}^{n} (y_i - \varepsilon)\, \mu(E_i) + 2\varepsilon\, \mu(K) + (b + \varepsilon)\, \varepsilon$$

$$T(f) \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} f\, d\mu + \varepsilon\, (2\mu(K) + b + \varepsilon)$$

$$T(f) \leq \int f\, d\mu + \varepsilon\, (2\mu(K) + b + \varepsilon)$$

ce qui montre que $T(f) \leq \int f\, d\mu$.

Théorème 50. (Théorème de Riesz)
Soient E un espace localement compact dénombrable à l'infini, T une forme linéaire positive sur $C_K(E)$. Il existe alors une mesure positive μ et une seule sur la tribu borélienne de E vérifiant :
a) μ est régulière
b) pour tout $f \in C_K(E)$, $T(f) = \int f\, d\mu$.

Démonstration.
L'existence est donnée par les propositions précédentes.
En ce qui concerne l'unicité, remarquons que puisque μ doit être régulière elle est déterminée par sa valeur sur les compacts.

Soient μ_1 et μ_2 deux mesures répondant à la question et K un compact.
Il existe $V \supset K$ tel que $\mu_2(K) > \mu_2(V) - \varepsilon$.
Soit f telle que $f(x) = 1$ pour $x \in K$ et $\operatorname{supp} f \subset V$;
$$\mu_1(K) = \int \chi_K \, d\mu_1 \le \int f \, d\mu_1 = T(f) = \int f \, d\mu_2$$
$$\le \int \chi_V \, d\mu_2 = \mu_2(V) < \mu_2(K) + \varepsilon$$
donc $\mu_1(K) \le \mu_2(K)$. De même $\mu_2(K) \le \mu_1(K)$, ce qui achève la démonstration.

Proposition 75. Si E est un espace topologique localement compact dans lequel tout ouvert est σ-compact (réunion dénombrable de compacts), toute mesure positive finie sur les compacts, défini sur la tribu borelienne de E, est régulière.

Démonstration.
Posons $T(f) = \int f \, d\mu$ pour $f \in C_K(E)$.
Comme $\mu(K) < +\infty$ pour tout compact K, T est une forme linéaire positive sur $C_K(E)$;

il existe donc une mesure régulière ν telle que $\int f \, d\mu = \int f \, d\nu$ pour tout $f \in C_K(E)$.
Soit V ouvert de E ; alors $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ où les K_n sont des compacts.
Choisissons f_1 telle que $f_1 = 1$ sur K_1, $\operatorname{supp} f_1 \subset V$ et $0 \le f_1 \le 1$.
Les fonctions $f_1, f_2, \dots, f_p$ ayant été choisies de supports $Q_1, Q_2, \dots, Q_p$, on construit f_{p+1} telle que, $0 \le f_{p+1} \le 1$, $f_{p+1} = 1$ sur $K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_p \cup Q_1 \cup \dots \cup Q_p$, $\operatorname{supp} f_{p+1} \subset V$.
La suite $(f_n)_{n \ge 1}$ est croissante et converge simplement vers χ_V.
Donc :
$$\mu(V) = \int \chi_V \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n \, d\nu = \nu(V)$$

Soit A un borelien de E vérifiant $\nu(A) < +\infty$; $\varepsilon > 0$ étant donné il existe un ouvert V et un compact K tels que $K \subset A \subset V$ et $\nu(V - K) < \varepsilon$. Alors, $V - K$ étant ouvert on a $\mu(V-K) = \nu(V-K) < \varepsilon$; si bien que :

$$\mu(V)-\varepsilon \leq \mu(A) \leq \mu(V) \quad \text{, d'où}$$
$$\nu(V)-\varepsilon \leq \mu(A) \leq \nu(V) \quad \text{, et comme}$$
$$\nu(V-\varepsilon) \leq \nu(A) \leq \nu(V)$$

on déduit que $|\mu(A)-\nu(A)| \leq \varepsilon$.
Par suite $\mu(A)=\nu(A)$.
Si A est un borélien quelconque, on peut l'écrire $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ où les A_n sont relativement compacts et forment une suite croissante.
Alors $\mu(A)=\sup_n \mu(A_n)=\sup_n \nu(A_n)=\nu(A)$.
Par suite $\mu=\nu$.

Il est maintenant facile de voir que par exemple sur $\mathbb{R}^n$, la mesure de Lebesgue est régulière, celle de Dirac au point x_0 aussi.

Remarquons aussi pour finir que tous les résultats démontrés sont valable dans le cas important où E est compact; dans ce cas $C_K(E)$ n'est rien d'autre que $C(E)$.

Les résultats qui suivent sont d'une grande

importance; ils montrent que si μ est une mesure régulière sur un espace localement compact dénombrable à l'infini E, alors $C_K(E)$ est dense dans $L^p(\mu)$ $(1\leq p<\infty)$.
Ceci permettra dans de nombreux cas d'obtenir une propriété sur $L^p(\mu)$ en commençant par la démontrer sur $C_K(E)$ et en passant à la limite.

Proposition 76 (Théorème de Lusin). Soit f une fonction réelle mesurable définie sur E, on suppose qu'il existe une partie mesurable A telle que $\mu(A)<+\infty$ (μ est une mesure régulière sur E) et $f(x)=0$ si $x\notin A$.
Dans ces conditions étant donné $\varepsilon>0$ il existe $g\in C_K(E)$ telle que:
$\mu(\{x;\, f(x)\neq g(x)\})<\varepsilon$.
De plus on peut choisir g de telle sorte que $\sup_{x\in E}|g(x)| \leq \sup_{x\in E}|f(x)|$.

Démonstration.
Supposons tout d'abord que $0\leq f\leq 1$ et que

A est compact. Associons à f la suite croissante $(\varphi_n)_n$ de fonctions simples que nous avons construite lors de la démonstration du théorème 12 (page 107). Posons $u_n = \varphi_n - \varphi_{n-1}$; alors $2^n u_n$ est la fonction caractéristique d'un ensemble $T_n \subset A$ et :
$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.
Soit V un ouvert relativement compact contenant A.
Il existe K_n compact et V_n ouvert tel que $K_n \subset T_n \subset V_n \subset V$ et $\mu(V_n - K_n) < \varepsilon/2^n$.
Il existe $h_n \in C_K(E)$ telle que $0 \leq h_n \leq 1$, $h_n = 1$ sur K_n, $\operatorname{supp} h_n \subset V_n$. On définit
$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} h_n(x)$.
La série convergeant uniformément, g est continue. $\operatorname{supp} g \subset \bar{V}$. Comme $\frac{1}{2^n} h_n = u_n$ sauf dans $V_n - K_n$, on a $f(x) = g(x)$ sauf sur $\bigcup_n (V_n - K_n)$; ce dernier ensemble est de mesure $\leq \varepsilon$.
Manifestement le résultat persiste si

f est supposé borné et A compact.
L'hypothèse A compact peut être aisément supprimée car si $\mu(A) < +\infty$ il existe K compact inclus dans A tel que $\mu(A-K)$ soit plus petit qu'un $\eta > 0$ donné.
Si maintenant f est mesurable quelconque notons $B_n = \{x ; |f(x)| > n\}$, alors $\bigcap_n B_n = \emptyset$ donc $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = 0$. Comme f coïncide avec la fonction bornée $(1-\chi_{B_n}) \cdot f$ sauf sur B_n on obtient le cas général.
Soit $R = \sup_{x \in E} |f(x)|$; posons $\varphi(x) = x$ si $|x| \leq R$ et posons $\varphi(x) = \frac{Rx}{|x|}$ si $|x| > R$.
Il est clair que $g_1 = \varphi \circ g$ vérifie alors toutes les conclusions du théorème.

Théorème 31. Soit E un espace topologique localement compact dénombrable à l'infini. Si μ est une mesure régulière sur la tribu $\mathcal{B}_E$, pour tout p vérifiant $1 \leq p < +\infty$, $C_K(E)$ est dense dans $L^p(\mu)$ pour la norme $\| \ \|_p$.

Démonstration.

Soit S la classe des fonctions simples sur E telles que :
$\mu(\{x ; \varphi(x) \neq 0\}) < \infty$.
Il est clair que $S \subset L^p(\mu)$.
Si $f \geq 0$ et $f \in L^p(\mu)$, soit $(\varphi_n)_n$ la suite de fonctions simples construite lors de la démonstration du théorème 12 (page 107). Comme $0 \leq \varphi_n \leq f$, $\varphi_n \in L^p(\mu)$ et donc $\varphi_n \in S$.
On a $|f-\varphi_n|^p \leq f^p$, on peut donc appliquer le théorème de convergence dominée qui donne : $\|f-\varphi_n\|_p \to 0$.
Il est clair alors que la classe $\Sigma = S-S$ est dense dans $L^p(\mu)$.
Si $\sigma \in \Sigma$, $\mu(\{x ; \sigma(x) \neq 0\}) < \infty$, donc on peut employer le théorème de Lusin et obtenir $g \in C_K(E)$ telle que $g(x) = \sigma(x)$ sauf sur un ensemble de mesure $< \varepsilon$ et $|g| \leq \|\sigma\|_\infty$. Donc :
$\|g - s\|_p \leq 2\, \varepsilon^{1/p} \|s\|_\infty$, ce qui achève la démonstration.

$L^p(\mu)$ est donc le complété de $C_K(E)$ pour la norme : $\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p}$

Terminons par une remarque importante : tous les résultats que nous avons démontrés s'énoncent et se démontrent de manière analogue pour des fonctions à valeurs complexes. On introduira alors l'espace des fonctions complexes continues à supports compacts.

5.2. Application au problème du changement de variable dans une intégrale de Lebesgue.

A. Exemple dans $\mathbb{R}$.

Soient I_1 et I_2 deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $\varphi : I_1 \to I_2$ une bijection strictement croissante de classe C^1.
Notons dt la mesure de Lebesgue sur I_1 et dx la mesure de Lebesgue sur I_2.
Soit ν la mesure image de dx par φ^{-1} ; alors $\varphi(\nu)(B) = \nu(\varphi^{-1}(B)) = dx(B)$

ce qui montre que $dx = \varphi(\nu)$.
Supposons f dx-intégrable, alors :
$\int_{I_2} f(x)\,dx = \int_{I_1} f\circ\varphi(t)\,d\nu$.
Soit α la mesure sur I_1 définie par
$\alpha(A) = \int_A \varphi'(t)\,dt$, on sait (cf. Proposition 48 page 120) que α est une mesure ≥ 0
et que $\int_{I_1} g\,d\alpha = \int_{I_1} g\varphi'\,dt$.
De plus pour tout sous intervalle I de I_1 on a $\nu(I) = \alpha(I)$. Donc ν et α sont deux mesures σ-finies sur I_1 qui coïncident sur le clan des réunions finies de sous intervalles de I_1 ; par suite $\alpha = \nu$.
Si bien que :
$\int_{I_2} f(x)\,dx = \int_{I_1} f\circ\varphi(t)\,\varphi'(t)\,dt$, ou encore :
$\int_{\varphi(I_1)} f(x)\,dx = \int_{I_1} f\circ\varphi(t)\,\varphi'(t)\,dt$.
En supposant maintenant φ décroissante on voit que la formule générale s'écrit :
$\int_{\varphi(I_1)} f(x)\,dx = \int_{I_1} f\circ\varphi(t)\,|\varphi'(t)|\,dt$.

B. Le cas des transformations linéaires dans $\mathbb{R}^k$.

On définit les transformations de type :
$\mathcal{T}_\alpha$: $T(x_1,\dots,x_i,\dots,x_k) = (x_1,\dots,\lambda x_i,\dots x_k)$ où $\lambda \neq$
$\mathcal{T}_\beta$: $T(x_1,\dots,x_i,\dots,x_k) = (x_1,\dots,x_i+\lambda x_j,\dots,x_k)$ où $i \neq j$
$\mathcal{T}_\gamma$: $T(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_k) = (x_1,\dots,x_j,\dots,x_i,\dots,x_k)$
On a alors le résultat élémentaire d'algèbre linéaire suivant :

Proposition 77. Toute transformation linéaire non singulière de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^k$ est produit de transformations du type $\mathcal{T}_\alpha, \mathcal{T}_\beta, \mathcal{T}_\gamma$.

Proposition 78. Soient T une transformation linéaire non singulière de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^k$, μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^k$ et f une fonction μ-intégrable.
Alors : $\int_{\mathbb{R}^k} f\,d\mu = \int_{\mathbb{R}^k} (f\circ T)\,J\,d\mu$
où $J = |\det T|$.

Démonstration.

En vertu de la proposition 77, il suffit de démontrer le résultat sur les transformations de type $\mathcal{C}_\alpha$, $\mathcal{C}_\beta$, $\mathcal{C}_\gamma$.

1) type $\mathcal{C}_\alpha$:

$$\int_{\mathbb{R}^k} f\,d\mu = \int\cdots\int\left(\int f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_k)\,dx_i\right) d(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_k)$$

$$\int_{\mathbb{R}^k} f\,d\mu = |\lambda|\int\cdots\int\left(\int f(x_1,\dots,\lambda x_i,\dots,x_k)\,dx_i\right) d(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_k)$$

$$\int_{\mathbb{R}^k} f\,d\mu = \int_{\mathbb{R}^k} f(T(x))\,J\,d\mu.$$

2) Type $\mathcal{C}_\beta$:

$$\int_{\mathbb{R}^k} f\,d\mu = \int\cdots\int\left(\int f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_k)\,dx_i\right) d(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_k)$$

$$\int_{\mathbb{R}^k} f\,d\mu = \int\cdots\int\left(\int f(x_1,\dots,x_i+\lambda x_j,\dots,x_k)\,dx_i\right) d(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_k)$$

$$\int_{\mathbb{R}^k} f\,d\mu = \int_{\mathbb{R}^k} f(Tx)\,J\,d\mu.$$

3) Type $\mathcal{C}_\gamma$:

Il s'agit là d'une application directe du théorème de Fubini.

C. Etude générale.

Soit h un difféomorphisme de classe C^1 d'un ouvert O_1 de $\mathbb{R}^k$ sur un ouvert O_2 de $\mathbb{R}^k$.

Notons $Dh(x)$ la différentielle de h au point x.

Si $y = h(x)$, $Dh^{-1}(y)$, différentielle de h^{-1} au point y vérifie $Dh(x)\circ Dh^{-1}(y) = I$.

On notera $J(x) = |\det Dh(x)|$.

Soit $f : O_2 \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable ; on se propose de démontrer que :

$$\int_{O_2} f(y)\,d\mu = \int_{O_1} f(h(x))\,J(x)\,d\mu.$$

Lemme 1. Soit C un compact inclus dans O_1, $h(C)$ son image dans O_2, alors : $\mu(h(C)) \le \int_C J(x)\,d\mu$.

Démonstration.

1) Supposons tout d'abord que C est un cube fermé :

$C = \{x \,;\, \|x - x_0\|_\infty \le s\}$.

Grâce au théorème des accroissements finis, si $x_1 \in C$:

$$\| h(x_1) - h(x_0) \| \leq s \max_{x \in C} \| Dh(x) \|$$

donc : $h(C)$ est dans le cube

$$\{ z \,;\, \| z - h(x_0) \| \leq s \max_{x \in C} \| Dh(x) \| .$$

d'où : (1) $\quad \mu(h(C)) \leq \left[\max_{x \in C} \| Dh(x) \| \right]^k \mu(C)$

Si A est une transformation linéaire non singulière :

$$\mu(A^{-1} h(C)) \leq \left[\max_{x \in C} \| A^{-1} \circ Dh(x) \| \right]^k \mu(C)$$

mais comme $\mu(A^{-1} h(C)) = |\det A^{-1}| \, \mu(h(C))$,

$$\mu(h(C)) \leq |\det A| \left[\max_{x \in C} \| A^{-1} \circ Dh(x) \| \right]^k \mu(C) .$$

2) Soit C un compact de O_1.

n étant donné, on considère tous les cubes dont les centres x_i ont des coordonnées du type $\frac{k}{2^n}$ et les cotés ont pour longueur $\frac{1}{2^n}$, qui ont un point commun avec C.

Il y en a $m(n)$: $C_1, C_2, \dots, C_{m(n)}$; ils forment un recouvrement de C.

$$\mu(h(C)) \leq \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{m(n)} h(C_i) \Big)$$

$$\mu(h(C)) \leq \sum_{i=1}^{m(n)} |\det Dh(x_i)| \left[\max \| Dh^{-1}(y_i) \circ Dh(x) \| \right]^k \mu(C_i)$$

Mais sur C il existe M tel que $\| Dh^{-1}(y) \| \leq M$ (Continuité de Dh^{-1})

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $x \in C$, $x' \in C$ et $\| x - x' \| \leq \delta$ impliquent $\| Dh(x) - Dh(x') \| \leq \varepsilon / M$.

Prenons alors n tel que $\frac{1}{2^n} < \delta$.

Si $x \in C_i$:

$$\begin{aligned} \big| \| Dh^{-1}(y_i) \circ Dh(x) \| - 1 \big| &= \big| \| Dh^{-1}(y_i) \circ Dh(x) \| - \| I \| \big| \\ &\leq \| Dh^{-1}(y_i) \circ Dh(x) - I \| \\ &\leq \| Dh^{-1}(y_i) \, (Dh(x) - Dh(x_i)) \| \\ &\leq M \, \| Dh(x) - Dh(x_i) \| \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

Si bien que :

$$\left[\max_{x \in C_i} \| Dh^{-1}(y_i) \circ Dh(x) \| \right]^k \leq (1+\varepsilon)^k .$$

$$\mu(h(C)) \leq (1+\varepsilon)^k \sum_{i=1}^{m(n)} |\det Dh(x_i)| \, \mu(C_i) ;$$

lorsque $n \to +\infty$ la somme converge vers :

$$\int_C |\det Dh(x)| \, d\mu .$$

Donc $\mu(h(C)) \leq (1+\varepsilon)^k \int_C J(x) \, d\mu \quad \forall \varepsilon > 0$,

d'où $\mu(h(C)) \leq \int_C J(x) \, d\mu$.

Lemme 2. Soit maintenant E une partie mesurable de O_1. Alors $h(E)$

est μ-mesurable et $\mu(h(E)) \leq \int_E J(x)\,d\mu$.

Démonstration.

Comme μ est régulière :

$$\mu(h(E)) = \sup_{\substack{K \subset h(E) \\ K \text{ compact}}} \mu(K)$$

Il est alors facile de voir que :

$$\mu(h(E)) = \sup_{\substack{C \subset E \\ C \text{ compact}}} \mu(h(C))\ ;$$

donc $\displaystyle \mu(h(E)) \leq \sup_{\substack{C \subset E \\ C \text{ compact}}} \int_C J(x)\,d\mu \leq \int_E J(x)\,d\mu$

(En fait on pourra montrer en exercice que $\displaystyle \sup_{\substack{C \subset E \\ C \text{ compact}}} \int_C J(x)\,d\mu = \int_E J(x)\,d\mu$)

Théorème 32. Sous les hypothèses indiquées, f est sommable au sens de Lebesgue sur O_2 si et seulement si $f(h(x))\,J(x)$ est sommable au sens de Lebesgue sur O_1, et alors :

$$\int_{O_2} f\,d\mu = \int_{O_1} f \circ h(x) . J(x)\,d\mu$$

Démonstration.

Remarquons tout d'abord que h engendre une correspondance bijective entre les ensembles mesurables de O_1 et ceux de O_2.

Si $f = \chi_{h(E)}$, $\displaystyle \int_{O_2} f\,d\mu = \mu(h(E))$

$$\int_{O_1} f \circ h\ J(x)\,d\mu = \int \chi_E(x)\,J(x)\,d\mu = \int_E J(x)\,d\mu$$

Donc en vertu du lemme 2 :

$$\int_{O_2} f\,d\mu \leq \int_{O_1} f \circ h(x)\,J(x)\,d\mu.$$

Cette inégalité a lieu aussi pour toute fonction simple, et en utilisant la méthode standard, pour toute fonction mesurable positive.

De même si $J^*(x) = |\det Dh^{-1}(y)|$ on a :

$$\int_{O_1} g\,d\mu \leq \int_{O_2} g(h^{-1}(y))\ J^*(y)\,d\mu.$$

Donc en prenant $g = f \circ h . J$ on a :

$$\int_{O_1} f \circ h(x)\ J(x)\,d\mu \leq \int_{O_2} f(y)\,d\mu.$$

Par suite $\displaystyle \int_{O_2} f\,d\mu = \int_{O_1} f \circ h(x)\ J(x)\,d\mu$ pour toute fonction positive f.

Le théorème en découle aisément.

Exercices.

Exercice 68

En reprenant les notations de la page ,
montrer que pour tout ouvert U

$\lambda_*(U) = \sup\{Tf \,;\, f \in C_K(E),\ 0 \le f \le 1,\ \operatorname{supp} f \subset U\}$

Exercice 69

Soit μ une mesure régulière sur le compact E.
Montrer qu'il existe un compact K tel
que $\mu(K) = \mu(E)$, et $\mu(H) < \mu(K)$ pour tout H,
sous compact propre de K.
Que peut on dire de CK ?

Les exercices qui suivent utilisent
des propriétés de densité.
L'exercice 70 décrit le comportement
des coefficients de Fourier des fonctions
de $L^1(\mathbb{T})$ où $\mathbb{T}$ est le tore $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (Lemme
de Riemann Lebesgue.

Exercice 70.

Pour tout $f \in L^1(\mathbb{T})$ on définit

$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt \quad (n \in \mathbb{Z})$

Montrer que $\lim_{|n|\to\infty} \hat{f}(n) = 0$.

Exercice 71.

Pour tout réel strictement positif a
et pour tout réel t on pose :

$\varphi(t) = \frac{1}{\pi}\, \frac{a}{t^2 + a^2}$

a) Prouver que φ est intégrable ainsi
que toutes ses dérivées.
b) Montrer que si f est continue et
bornée sur $\mathbb{R}$, alors f et φ sont
convolables, que $f * \varphi$ est indéfiniment
dérivable sur $\mathbb{R}$, et que toutes les dérivées
de $f * \varphi$ sont bornées sur $\mathbb{R}$.
c) Énoncer et démontrer des résultats
analogues en supposant seulement
$f \in L^1(\mathbb{R})$.
d) Soit $(a_n)_{n \ge 1}$ une suite de nombres

réels strictement positifs convergeant vers 0.

On pose $\varphi_n(t) = \frac{1}{\pi} \frac{a_n}{t^2 + a_n^2}$.

Prouver que pour tout $\alpha > 0$

$\int_{|t| \geq \alpha} \varphi_n(t)\, dt \to 0$ si $n \to +\infty$.

Prouver que si f est continue bornée, $f * \varphi_n$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$ vers f.

Montrer que si f est intégrable, $f * \varphi_n$ converge vers f en moyenne.

Exercice 72

Soit T l'intérieur du tétraèdre $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ et $x+y+z \leq 1$. Calculer l'intégrale $\iiint_T xyz(1-x-y-z)\, dx\, dy\, dz$ en effectuant le changement de variables $x+y+z = X$, $x+z = X$ $z = XYZ$.

Exercice 73

Etudier le passage en coordonnées sphériques dans une intégrale sur $\mathbb{R}^n$. Calculer le volume de la sphère dans $\mathbb{R}^n$.

Chapitre VI.

Mesures à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Mesures à valeurs dans $\mathbb{C}$.

6.1. Mesures à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Variation d'une mesure.

Définition 27. Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable. Une mesure μ à valeurs complexes est une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{C}$ telle que :

(mv) Pour toute suite $(A_i)_{i\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{C}$ deux à deux disjoints :
$\mu(\bigcup_{i\geq 1} A_i) = \sum_{i\geq 1} \mu(A_i)$.
(Remarquons qu'alors la série $\sum_{i\geq 1} \mu(A_i)$ est commutativement convergente, et donc puisqu'on se trouve dans $\mathbb{C}$, cette série est absolument convergente.)

Remarquons que la définition 27 exclut les mesures positives non finies. En effet si une mesure suivant la définition 27 est de plus positive, alors $\mu(E) \in \mathbb{R}^+$ et μ est finie.

Définissons pour une mesure complexe μ, $|\mu|(A) = \sup \sum_{i\geq 1} |\mu(A_i)|$, où la borne supérieure est prise sur toutes les suites $(A_i)_{i\geq 1}$ d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{C}$ telles que $A = \bigcup_{i\geq 1} A_i$.

Proposition 79. $|\mu|$ est une mesure positive finie sur $(E,\mathcal{C})$.

Démonstration.
Remarquons que $|\mu|(\emptyset) = 0$.
Soit $(E_i)_{i\geq 1}$ une suite d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{C}$; posons $A = \bigcup_{i\geq 1} E_i$.
Soit t_i un nombre réel tel que $t_i < |\mu|(E_i)$. On peut alors décomposer E_i sous la forme $E_i = \bigcup_{j\geq 1} A_{i,j}$ avec

$A_{i,j} \cap A_{i,k} = \emptyset$ si $j \neq k$, de telle sorte

que $t_i \leq \sum_{j\geq 1} |\mu(A_{i,j})|$.

Alors : $\sum_{i\geq 1} t_i \leq \sum_{\substack{i\geq 1\\ j\geq 1}} |\mu(A_{i,j})| \leq |\mu|(A)$.

En passant au sup sur les suites $(t_i)_{i\geq 1}$ on voit que $\sum_{i\geq 1} |\mu|(E_i) \leq |\mu|(A)$.

Soit $(A_j)_{j\geq 1}$ une partition de A ; alors $(A_j \cap E_i)_{i\geq 1}$ est une partition de A_j, et $(A_j \cap E_i)_{j\geq 1}$ est une partition de E_i ; donc :

$$\sum_{j\geq 1} |\mu(A_j)| = \sum_{j\geq 1} \left| \sum_{i\geq 1} \mu(A_j \cap E_i) \right|$$
$$\leq \sum_{j\geq 1} \sum_{i\geq 1} |\mu(A_j \cap E_i)|$$

$\sum_{j\geq 1} |\mu(A_j)| \leq \sum_{i\geq 1} |\mu|(E_i)$.

Donc $|\mu|(A) \leq \sum_{i\geq 1} |\mu|(E_i)$.

Ceci montre que $|\mu|$ est une mesure positive.

Pour démontrer que $|\mu|$ est une mesure finie on utilisera le lemme suivant :

Si $z_1, z_2, \dots, z_n$ sont des complexes, il existe un sous ensemble S de $\{1,2,\dots,n\}$ tel que :

$$\left|\sum_{j\in S} z_j\right| \geq \frac{1}{6} \sum_{j=1}^{n} |z_j|.$$

En effet :

posons $\omega = |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$.

Le plan complexe est réunion de 4 quadrants fermés délimités par les droites $y = \pm x$.

Au moins un de ces quadrants, Q est tel que $\sum_{z_j\in Q} |z_j| \geq \frac{\omega}{4}$.

Supposons que Q est le quadrant $|y| \leq x$.

Si $z \in Q$ on a alors $\operatorname{Re} z \geq \frac{|z|}{\sqrt{2}}$.

Soit S l'ensemble des j tels que $z_j \in Q$; alors :

$$\left|\sum_{j\in S} z_j\right| \geq \sum_{j\in S} \operatorname{Re} z_j \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j\in S} |z_j| \geq \frac{\omega}{4\sqrt{2}} \geq \frac{\omega}{6}.$$

Montrons maintenant que $|\mu|$ est une mesure finie.

Remarquons que si $|\mu|(E) = +\infty$, alors $E = A \cup B$, où $A \cap B = \emptyset$, $|\mu(A)| \geq 1$ et $|\mu|(B) = +\infty$.

En effet si $t < +\infty$ il existe une partition $(E_i)_{i\geq 1}$ de E telle que $\sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)| > t$.

Prenons $t = 6(1 + |\mu(E)|)$; alors il existe n tel que $\sum_{j=1}^{n} |\mu(E_j)| > t$.

Si $z_j = \mu(E_j)$, en appliquant le lemme et en posant $A = \bigcup_{j\in S} E_j$ on a :

$A \subset E$ et $|\mu(A)| > t/6 \geq 1$.

Si $B = E - A$, $|\mu(B)| = |\mu(E) - \mu(A)| \geq |\mu(A)| - |\mu(E)|$,

$|\mu(B)| > t/6 - |\mu(E)| = 1$.

Comme $|\mu|(E) = |\mu|(A) + |\mu|(B) = +\infty$ quitte à échanger les rôles de A et de B on a la remarque.

Supposons $|\mu|(E) = +\infty$. Posons $B_0 = E$, $A_0 = \emptyset$.

B_n étant construit tel que $|\mu|(B_n) = +\infty$,

soient A_{n+1} et B_{n+1} tels que $B_n = B_{n+1} \cup A_{n+1}$ où $|\mu|(B_{n+1}) = +\infty$ et $|\mu(A_{n+1})| > 1$.
Les A_n sont alors deux à deux disjoints ; posons $C = \bigcup_{n\geq 0} A_n$; $\mu(C) = \sum_{n\geq 0} \mu(A_n)$ ce qui est impossible puisque $\mu(A_n)$ ne tend pas vers 0.

Définition 28. La mesure $|\mu|$ définie par $|\mu|(A) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(A_i)|$ est appelée variation de μ.

Remarquons que sur l'ensemble $\mathcal{M}$ des mesures à valeurs complexes sur $(E, \mathcal{E})$, on peut définir la somme par $(\mu+\nu)(A) = \mu(A) + \nu(A)$ et la multiplication par un scalaire $(\lambda\mu)(A) = \lambda(\mu(A))$.
On obtient ainsi un espace vectoriel, qui peut être normé par $\|\mu\| = |\mu|(E)$.

Nous introduisons maintenant si μ est à valeurs réelles :
$\mu^+ = 1/2\,(|\mu| + \mu)$ et $\mu^- = 1/2\,(|\mu| - \mu)$.

μ^+ et μ^- sont deux mesures positives finies ; on a $\mu = \mu^+ - \mu^-$ et $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$.
La représentation de μ sous la forme $\mu = \mu^+ - \mu^-$ est appelée décomposition de Jordan de μ.
Dans le cas d'une mesure à valeurs complexes on a une décomposition sous la forme :
$\mu = (\mathcal{R}e\,\mu)^+ - (\mathcal{R}e\,\mu)^- + i(\mathcal{I}m\,\mu)^+ - i(\mathcal{I}m\,\mu)^-$

6.2. La théorie de Radon-Nikodym.

Nous avons vu à la proposition 48 page 120 comment on pouvait définir une mesure ν ayant une densité f par rapport à une mesure μ. Le problème que nous nous posons ici est réciproque du précédent : étant données deux mesures μ et ν, existe-t-il une fonction f de telle sorte que ν ait pour densité f par rapport à μ ? Sous cette forme la réponse est négative ; toutefois nous allons voir que l'on peut toujours obtenir une décomposition proche de celle-ci.

Définition 29. λ et μ étant deux mesures complexes définies sur l'espace mesurable $(E,\mathcal{T})$, nous dirons que λ est absolument continue par rapport à μ et nous écrirons $\lambda \ll \mu$ si pour tout élément A de $\mathcal{T}$ tel que $\mu(A)=0$ on a $\lambda(A)=0$.

Définition 30. λ étant une mesure complexe, nous dirons que λ est concentrée sur l'élément A de $\mathcal{T}$ si $\lambda(B)=\lambda(A\cap B)$ pour tout élément B de $\mathcal{T}$.
Si λ_1 est concentrée sur A_1 et λ_2 sur A_2 avec $A_1\cap A_2=\emptyset$ nous dirons que λ_1 et λ_2 sont mutuellement singulières et nous noterons : $\lambda_1 \perp \lambda_2$.

On voit tout de suite que λ est concentrée sur A si et seulement si pour tout élément B de $\mathcal{T}$ disjoint de A on a $\lambda(B)=0$. Il est clair aussi que si $\lambda \ll \mu$ et si μ est concentrée sur A, λ est concentrée sur A.

Remarquons que les définitions 29 et 30 sont valables si éventuellement une ou plusieurs des mesures considérées sont des mesures positives non nécessairement finies.

Proposition 80. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda$ des mesures complexes sur $(E,\mathcal{T})$ et μ une mesure positive sur $(E,\mathcal{T})$; alors :

a) λ concentrée sur $A \Rightarrow |\lambda|$ concentrée sur A.
b) $\lambda_1 \perp \lambda_2 \Rightarrow |\lambda_1| \perp |\lambda_2|$.
c) $\lambda_1 \perp \mu$ et $\lambda_2 \perp \mu \Rightarrow (\lambda_1+\lambda_2) \perp \mu$.
d) $\lambda_1 \ll \mu$ et $\lambda_2 \ll \mu \Rightarrow (\lambda_1+\lambda_2) \ll \mu$.
e) $\lambda \ll \mu \Rightarrow |\lambda| \ll \mu$.
f) $\lambda_1 \ll \mu$ et $\lambda_2 \perp \mu \Rightarrow \lambda_1 \perp \lambda_2$.
g) $\lambda \ll \mu$ et $\lambda \perp \mu \Rightarrow \lambda = 0$.

Démonstration.

a) soit B un élément de $\mathcal{T}$ disjoint de A. $|\lambda|(B) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(B_i)|$; mais $\lambda(B_i)=0$ puisque $B_i \subset B$ et donc $B_i \cap A = \emptyset$.
Par suite $|\lambda|(B)=0$.

b) est une conséquence immédiate de a) et des définitions.

c) d) e) f) sont aussi des conséquences aisées des définitions.

Pour montrer g) il suffit d'utiliser f) et de constater que $\lambda \perp \lambda$ implique $\lambda = 0$.

Théorème 33 (Radon-Nikodym).

Soient λ et μ deux mesures positives finies sur $(E, \mathcal{E})$.

Il existe un couple unique de mesures λ_a et λ_s sur $(E,\mathcal{E})$ telles que :

(1) $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$, $\lambda_a \ll \mu$, $\lambda_s \perp \mu$ (donc $\lambda_a \perp \lambda_s$), λ_a et λ_s sont des mesures positives.

(2) Il existe un élément h de $L^1(\mu)$ unique tel que

$\lambda_a(A) = \int_A h \, d\mu$ pour tout A de $\mathcal{E}$.

Démonstration.

Supposons l'existence d'un autre couple (λ'_a, λ'_s) répondant à la question : alors :

$\lambda_a - \lambda'_a \ll \mu$ et $\lambda_s - \lambda'_s \perp \mu$; d'autre part $\lambda_a - \lambda'_a + \lambda_s - \lambda'_s = 0$, donc $\lambda_a - \lambda'_a + \lambda_s - \lambda'_s \perp \lambda_a - \lambda'_a$; comme $\lambda_s - \lambda'_s \perp \lambda_a - \lambda'_a$, on déduit que $\lambda_a - \lambda'_a \perp \lambda_a - \lambda'_a$ et donc $\lambda_a = \lambda'_a$; on a aussi alors $\lambda_s = \lambda'_s$.

Supposons que h et g sont deux éléments distincts de $L^1(\mu)$. Alors l'un des deux ensembles $A_1 = \{x ; h(x) > g(x)\}$ $A_2 = \{x ; h(x) < g(x)\}$ est de mesure non nulle ; supposons que ce soit A_1 par exemple. Alors en vertu de la proposition 45 page 117, $\int_{A_1} (h-g)\, d\mu > 0$.

On conclut de cette étude à l'unicité de λ_a, λ_s, h.

Posons $\varphi = \lambda + \mu$. φ est une mesure finie sur $(E, \mathcal{E})$.

Soit $f \in L^2(\varphi)$:

$\left|\int f \, d\lambda\right| \le \int |f| \, d\lambda \le \int |f| \, d\varphi \le \left(\int |f|^2 d\varphi\right)^{1/2} (\varphi(E))^{1/2}$

donc : $f \to \int f \, d\lambda$ est une forme linéaire continue sur $L^2(\varphi)$. Cette forme linéaire peut être obtenue sous forme d'un produit scalaire : il existe $g \in L^2(\varphi)$

telle que pour tout $f \in L^2(\varphi)$:

$\int f d\lambda = \int fg \, d\varphi$.

Soit $f = \chi_A$ où $\varphi(A) > 0$:

$\lambda(A) = \int \chi_A \, d\lambda = \int_A g \, d\varphi$, et comme $0 \leq \lambda \leq \varphi$ on a :

$$0 \leq \frac{1}{\varphi(A)} \int_A g \, d\varphi \leq 1$$

Cette double inégalité ayant lieu pour tout $A \in \mathcal{C}$, on en déduit que $g(x) \in [0,1]$ pour φ-presque tout x. On supposera désormais que $0 \leq g(x) \leq 1$ partout.

$\int f d\lambda = \int fg \, d\varphi = \int fg \, d\lambda + \int fg \, d\mu$.

Donc $\int (1-g) f \, d\lambda = \int fg \, d\mu$, pour tout $f \in L^2_{(\varphi)}$.

Posons $A = \{x ; 0 \leq g(x) < 1\}$ et $B = \{x ; g(x) = 1\}$, puis $\lambda_a(P) = \lambda(P \cap A)$

$\lambda_s(P) = \lambda(P \cap B)$.

Prenons $f = \chi_B$: on voit que :

$\mu(B) = \int \chi_B g \, d\mu = \int (1-g) \chi_B \, d\lambda = 0$;

comme λ_s est concentrée sur B, $\lambda_s \perp \mu$.

Remplaçons f par $(1+g+\dots+g^n)\chi_P$, on obtient :

$\int_P (1-g^{n+1}) \, d\lambda = \int_P g(1+g+\dots+g^n) \, d\mu$.

En tout point de B, $g(x) = 1$, donc $1 - g^{n+1}(x) = 0$.

En tout point de A, $\lim_{n\to\infty} g^{n+1}(x) = 0$, la suite $(g^{n+1}(x))_n$ étant décroissante ; donc :

$\int_P (1-g^{n+1}) \, d\lambda \to \lambda(A \cap P) = \lambda_a(P)$;

d'autre part le théorème de Beppo-Levi (page 113) montre que :

$\int_P g(1+g+\dots+g^n) \, d\mu$ converge vers $\int_P h \, d\mu$ où $h = \lim_{n\to\infty} g(1+\dots+g^n)$

En prenant $P = E$ on voit que $h \in L^1(\mu)$ puisque $\lambda_a(E) < +\infty$.

On a aussi $\lambda_a(P) = \int_P h \, d\mu$. Il est clair alors que $\lambda_a \ll \mu$.

Remarquons que si λ est absolument continue par rapport à μ, alors $\lambda_s = 0$ et donc $\lambda = \lambda_a$; par suite dans ce cas :

$\lambda(P) = \int_P h \, d\mu$.

Le théorème de Radon Nikodym reste valable si μ est une mesure positive σ-finie et si λ est une mesure complexe.

Une mesure complexe μ est absolument continue par rapport à $|\mu|$; donc μ a une densité h par rapport à $|\mu|$. Le théorème suivant précise que h est de module 1.

Théorème 54. Soit μ une mesure complexe sur $(E,\mathcal{E})$. Il existe une fonction de $L^1(\mu)$ telle que $|h(x)|=1$ telle que μ ait pour densité h par rapport à $|\mu|$ (Ce qu'on écrira $d\mu = h.\,d|\mu|$)

Démonstration.

Comme $\mu \ll |\mu|$, on a $d\mu = h\,d|\mu|$; il reste à voir que $|h| \leq 1$.

Soit $A_r = \{x ; |h(x)| < r\}$, et soit $(E_i)_{i\geq 1}$ une partition de A_r ; alors :

$$\sum_i |\mu(E_i)| = \sum_i \int_{E_i} h\,d|\mu| \leq \sum_i r|\mu|(E_i) = r|\mu|(A_r)$$

donc : $|\mu|(A_r) \leq r|\mu|(A_r)$.

Si $r<1$ on a donc $|\mu|(A_r) = 0$; par suite $|h(x)| \geq 1$ presque partout.

D'autre part si $|\mu|(\ ) \geq 0$, on a :

$$\left|\frac{1}{|\mu(A)|}\int h\,d|\mu|\right| = \frac{|\mu(A)|}{|\mu|(A)} \leq 1$$

Soit Δ un disque de centre α et de rayon r inclus dans $\{z ; |z| > 1\}$

Soit $B = h^{-1}(\Delta)$; si on suppose que $|\mu|(B) \neq 0$ alors :

$$\left|\frac{1}{|\mu|(B)}\int_B h\,d|\mu| - \alpha\right| = \frac{1}{|\mu|(B)}\left|\int_B (h-\alpha)\,d|\mu|\right|$$

$$\leq \frac{1}{|\mu|(B)}\int_B |h-\alpha|\,d|\mu|$$

$$\leq r$$

ce qui est impossible puisque :

$$\frac{1}{|\mu|(B)}\int_B h\,d|\mu| \notin \Delta$$

On conclut que, puisque $\{z ; |z|>1\}$ peut être recouvert par une réunion dénombrable d'ensembles du type Δ, $|h(x)| = 1$ presque partout.

Ce resultat permet de voir que si λ a une densité g par rapport à μ, alors $|\lambda|$ a pour densité $|g|$ par rapport à μ.

Proposition 81. Soient μ une mesure positive sur $(E,\mathcal{C})$, et $g \in L^1(\mu)$.
Si $\lambda(A) = \int_A g \, d\mu \quad \forall A \in \mathcal{C}$
alors :

$$|\lambda|(A) = \int_A |g| \, d\mu .$$

Démonstration.
Soit h, telle que $|h|=1$ et $d\lambda = h \, d|\lambda|$.
Comme $d\lambda = g \, d\mu$, on a $h \, d|\lambda| = g \, d\mu$.
Par suite $\int_A \bar{h} \, d\lambda = \int_A \bar{h} h \, d|\lambda| = \int_A \bar{h} g \, d\mu$
d'où :
$\int_A d|\lambda| = \int_A \bar{h} g \, d\mu$, ce qui montre que
$d|\lambda| = \bar{h} g \, d\mu$.
Comme $|\lambda| \geq 0$ et $\mu \geq 0$, on a $\bar{h} g \geq 0$ p.p,
donc $\bar{h} g = |g|$ p.p.

Théorème 35 (Décomposition de Hahn) Soit μ une mesure réelle sur $(E,\mathcal{C})$; alors il existe A et B, deux éléments de $\mathcal{C}$, formant une partition de E tels que : $\mu^+(C) = \mu(A \cap C)$
et $\mu^-(C) = -\mu(B \cap C)$ pour tout $C \in \mathcal{C}$.

Démonstration.
Il existe h de module 1 telle que :
$d\mu = h \, d|\mu|$.
Comme μ est une mesure réelle h est réelle (après redéfinition sur un ensemble de mesure nulle). Donc $h = \pm 1$.
Posons $A = \{x \,;\, h(x) = 1\}$ et $B = \{x \,;\, h(x) = -1\}$.
Comme $\mu^+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu)$ et comme
$\frac{1}{2}(1+h) = \begin{cases} h & \text{sur } A \\ 0 & \text{sur } B \end{cases}$,
on a pour tout C de $\mathcal{C}$,
$\mu^+(C) = \frac{1}{2}\int_C (1+h) \, d|\mu| = \int_{C\cap A} h \, d|\mu| = \mu(E \cap A)$
Comme $\mu(C) = \mu(C\cap A) + \mu(C \cap B)$ et que $\mu = \mu^+ - \mu^-$ on a alors $\mu^-(C) = -\mu(B \cap C)$.

Nous verrons lors des exercices diverses applications de ces résultats, notamment pour la détermination du dual d'un espace L^p avec $1 \leq p < +\infty$.
La définition de l'espérance conditionnelle, notion très importante pour les probabilités, s'appuie aussi sur le théorème de Radon Nikodym (cf. exercices)

6.3. Mesures de Radon.

Dans tout ce paragraphe, E désigne un espace topologique localement compact dénombrable à l'infini.
Nous étudions les formes linéaires continues sur $C_K(E)$ ou, ce qui revient au même, sur $C_0(E)$ espace de fonctions continues qui tendent vers 0 à l'infini muni de la norme uniforme (en effet, pour la norme uniforme $C_K(E)$ est dense dans $C_0(E)$ et en conséquence le dual topologique de $C_K(E)$ s'identifie à celui de $C_0(E)$).
En ce qui concerne les formes linéaires positives, on a vu qu'il était possible de les interpréter à l'aide d'intégrales par rapport à certaines mesures positives.
Nous allons généraliser ce point de vue.
Ceci nous conduit à définir l'intégrale d'une fonction f par rapport à une mesure complexe μ:

On sait que $d\mu = h\, d|\mu|$; on pose donc $\int f d\mu = \int f h\, d|\mu|$; ceci pour f tel que $fh \in L^1(|\mu|)$
(On verra en exercice qu'il est équivalent de poser : $\int f d\mu = \int f d\mathrm{Re}\,\mu^+ + i\int f d\mathrm{Im}\,\mu^+ - \int f d\mathrm{Re}\,\mu^- - i\int f d\mathrm{Im}\,\mu^-$)
Avec cette définition il est facile de voir que $\int f\, d(\lambda+\mu) = \int f d\lambda + \int f d\mu$, chaque fois que les trois intégrales qui interviennent dans cette formule sont définies (par exemple si f est bornée).
Si μ est une mesure complexe sur $(E, \mathcal{B}_E)$ l'application

$$T_\mu : C_0(E) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad f \longmapsto \int f d\mu$$

est une forme linéaire continue sur $C_0(E)$:

$$\left|\int f d\mu\right| = \left|\int f h\, d|\mu|\right| \leq \int |fh|\, d|\mu| \leq \|f\|\, |\mu|(E)$$

donc $\|T_\mu\| \leq |\mu|(E)$.
Nous allons voir que toute forme linéaire continue peut être trouvée ainsi.

Théorème 36. Pour chaque forme linéaire continue F sur $C_0(E)$ il existe une mesure régulière unique μ, à valeurs complexes, définie sur $\mathcal{B}_E$ telle que :
$F(f) = \int f d\mu$.
De plus $\|F\| = |\mu|(E)$.

Démonstration.

Regardons tout d'abord la question d'unicité :

Soit μ une mesure régulière telle que $\int f d\mu = 0$ pour tout f de $C_0(E)$.

$d\mu = h\, d|\mu|$ avec $|h| = 1$.

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de $C_0(E)$:

$|\mu|(E) = \int (\bar{h} - f_n) h\, d|\mu| \leq \int |\bar{h} - f_n|\, d|\mu|$

et comme $C_K(E)$ est dense dans $L^1(|\mu|)$ on peut choisir la suite $(f_n)_n$ de telle sorte que $\lim\limits_{n\to\infty} \int |\bar{h} - f_n|\, d|\mu| = 0$.

Donc $|\mu|(E) = 0$; ce qui montre que $|\mu| = 0$ et donc $\mu = 0$.

En ce qui concerne l'existence :

soit F une forme linéaire continue sur $C_0(E)$ telle que $\|F\| = 1$ (ce qui ne restreint pas la généralité)

Définissons pour tout $f \in C_K^+(E)$:

$\Lambda(f) = \sup\{|F(h)| \,;\, h \in C_K(E),\, |h| \leq f\}$.

Il est clair que $\Lambda(f) \geq 0$ et que si $f_1 \leq f_2$ $\Lambda(f_1) \leq \Lambda(f_2)$; de plus si $a > 0$, $\Lambda(af) = a\Lambda(f)$.

Soient f et g des éléments de $C_K^+(E)$; pour tout $\varepsilon > 0$ il existe h_1 et $h_2 \in C_K(E)$

tels que $|h_1| \leq f$, $|h_2| \leq g$ et :

$\Lambda(f) \leq |F(h_1)| + \varepsilon \quad \Lambda(g) \leq |F(h_2)| + \varepsilon$;

Soient alors α_1 et α_2 deux complexes de module 1 tels que $\alpha_1 F(h_1) = |F(h_1)|$ et $\alpha_2 F(h_2) = |F(h_2)|$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\Lambda(f) + \Lambda(g) &\leq |F(h_1)| + |F(h_2)| + 2\varepsilon \\
&\leq \alpha_1 F(h_1) + \alpha_2 F(h_2) + 2\varepsilon \\
&\leq F(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2) + 2\varepsilon \\
&\leq \Lambda(|h_1| + |h_2|) + 2\varepsilon \\
&\leq \Lambda(f+g) + 2\varepsilon .
\end{aligned}$$

Donc $\Lambda(f+g) \geq \Lambda(f) + \Lambda(g)$.

Choisissons maintenant h telle que $h \in C_K(E)$ et $|h| \leq f+g$.

Soit $V = \{x \,;\, f(x) + g(x) > 0\}$; posons :

$h_1(x) = \dfrac{f(x)h(x)}{f(x)+g(x)}$, $h_2(x) = \dfrac{g(x)h(x)}{f(x)+g(x)}$ si $x \in V$

et $h_1(x) = h_2(x) = 0$ si $x \notin V$.

Il est facile de montrer que h_1 et $h_2 \in C_K(E)$.

Comme $h_1 + h_2 = h$ et $|h_1| \leq f$, $|h_2| \leq g$ on a :

$$\begin{aligned}
|F(h)| = |F(h_1) + F(h_2)| &\leq |F(h_1)| + |F(h_2)| \\
&\leq \Lambda(f) + \Lambda(g)
\end{aligned}$$

Donc $\Lambda(f+g) \leq \Lambda(f) + \Lambda(g)$.

Nous avons donc prouvé que :

$\Lambda(f+g) = \Lambda(f) + \Lambda(g)$.

Si f est une fonction quelconque de $C_K(E)$ on pose :

$\Lambda(f) = \Lambda \mathrm{Re} f^+ - \Lambda \mathrm{Re} f^- + i\Lambda \mathrm{Im} f^+ - i\Lambda \mathrm{Im} f^-$

On a défini ainsi une forme linéaire sur $C_K(E)$. Cette forme linéaire vérifie par définition même :

$|F(f)| \leq \Lambda(|f|)$

D'autre part pour toute fonction h telle que $|h| \leq |f|$ on a :

$|F(h)| \leq \|F\| \, \|h\| \leq \|F\| \, \|f\| \leq \|f\|$

Par suite $\Lambda(|f|) \leq \|f\|$.

Le théorème de Riesz (Théorème 30 page 225) nous permet d'associer à Λ une mesure positive régulière λ.

Remarquons que $\lambda(E) = \sup\{\Lambda(f) ; 0 \leq f \leq 1, f \in C_K(E)\}$ donc $\lambda(E) \leq 1$.

On a aussi :

$|F(f)| \leq \Lambda(|f|) = \int |f| \, d\lambda = \|f\|_1$

Il existe donc une extension de F en une forme linéaire $\tilde{F}$ sur $L^1(\lambda)$ de norme ≤ 1.

(En effet $C_K(E)$ est dense dans $L^1(\lambda)$)

On peut alors trouver g telle que $|g| \leq 1$ vérifiant pour tout $f \in C_K(E)$:

$F(f) = \int f g \, d\lambda$.

Comme $C_0(E)$ est le complété de $C_K(E)$ cette formule est vraie pour $f \in C_0(E)$.

On obtient donc la représentation cherchée avec $d\mu = g \, d\lambda$.

Comme $\|F\| = 1$:

$\int |g| \, d\lambda \geq \sup\{|F(f)| ; f \in C_0(E), \|f\| \leq 1\} = 1$.

On sait aussi que $\lambda(E) \leq 1$ et $|g| \leq 1$, par conséquent :

$\lambda(E) = 1$, $|g| = 1$ p.p. et $\int |g| \, d\lambda = 1$.

Par suite :

$d|\mu| = |g| \, d\lambda = d\lambda$, si bien que :

$|\mu|(E) = \lambda(E) = 1 = \|F\|$.

Nous avons donc déterminé le dual topologique de l'espace $C_0(E)$.

Remarquons que si E est un espace compact, les résultats sont encore valables ; on détermine alors le dual de $C(E)$. Les formes linéaires continues sur $C_0(E)$ sont appelées mesures de Radon.

Exercices.

Nous étudions, dans l'exercice suivant la décomposition de Hahn Jordan pour une mesure réelle μ.

Exercice 74.

Soit μ une mesure réelle.
On suppose que $\mu = \lambda_1 - \lambda_2$, où λ_1 et λ_2 sont des mesures positives.
Montrer que $\lambda_1 \geq \mu^+$ et $\lambda_2 \geq \mu^-$.
Montrer que $\mu^+(A) = \sup\{\mu(B)\,;\ B \subset A\}$ et que $\mu^-(A) = \sup\{-\mu(B)\,;\ B \subset A\}$.

L'exercice 75 étudie les duaux des espaces L^p.

Exercice 75.

Soit $(\Omega, \mathcal{C}, \mu)$ un espace probabilisé.
Soit $1 \leq p \leq \infty$; on note p' le conjugué

de Hölder de p : $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

a) Montrer que toute variable aléatoire $f \in L^{p'}(\Omega, \mathcal{C}, \mu)$ définit une forme linéaire continue F sur $L^p(\Omega, \mathcal{C}, \mu)$ par l'intermédiaire de la formule :
$F(g) = \int fg\, d\mu$.
Montrer de plus que dans ces conditions,
$\|F\| = \|f\|_{p'}$.

b) Dans le cas où $p < +\infty$, montrer que réciproquement toute forme linéaire continue F sur L^p, provient d'un élément et d'un seul, $f \in L^{p'}$.

c) Généraliser la démonstration au cas où μ est une mesure σ-finie.

L'exercice qui suit étudie la notion d'espérance conditionnelle, extrêmement importante pour les probabilités.

Exercice 76.

Soit $(\Omega, \mathcal{C}, P)$ un espace probabilisé.

Soit $\mathcal{B}$ une sous tribu de $\mathcal{C}$; notons $P_{\mathcal{B}}$ la restriction à $\mathcal{B}$ de P.

Soit f une variable aléatoire réelle intégrable sur $(\Omega, \mathcal{C}, P)$ $(f \in L^1(P))$.

Montrer qu'il existe un élément $E^{\mathcal{B}}(f)$ et un seul de $L^1(P_{\mathcal{B}})$ tel que pour tout $B \in \mathcal{B}$ on ait :

$$\int_B f \, dP = \int_B E^{\mathcal{B}}(f) \, dP_{\mathcal{B}}.$$

Montrer que dans ces conditions, si de plus f est ≥ 0, pour toute fonction g positive $\mathcal{B}$-mesurable définie sur Ω on a :

$$\int gf \, dP = \int g \, E^{\mathcal{B}}(f) \, dP_{\mathcal{B}}.$$

Trouver $E^{\mathcal{B}}(f)$ dans le cas où $\mathcal{B} = \{\emptyset, \Omega\}$.

Montrer que l'espérance conditionnelle $E^{\mathcal{B}}$ restreinte à $L^p(P)$ $(p \geq 1)$ est une projection de norme 1 de $L^p(P)$ sur $L^p(P_{\mathcal{B}})$. En particulier si $p = 2$, montrer que c'est la projection orthogonale de $L^2(P)$ sur $L^2(P_{\mathcal{B}})$.