OUTILS ÉLÉMENTAIRES DE L'ANALYSE

ROBERT ROLLAND

Institut de Mathématiques de Luminy
Luminy Case 930, F13288 Marseille cedex 9
e-mail : robert.rolland@acrypta.fr

Résumé. L'analyse est un secteur très large de l'activité mathématique. Développée à partir du $XVII^e$ siècle, elle a été essentiellement centrée sur le calcul infinitésimal jusqu'à la fin du XIX^e siècle. Cette partie s'occupe des nombres et des fonctions en tant que tels, des bonnes approximations de ces objets et des outils de dérivation et d'intégration qui pemettent d'opérer sur eux et même éventuellement de les définir.

À partir du XX^e siècle, l'analyse fonctionnelle, qui considère qu'une fonction est un point d'un ensemble de fonctions, avec tous les aspects géométriques qui s'y rattachent, s'est developpée, principalement pour la résolution des problèmes aux limites des équations différentielles et intégrales.

Nous présentons ici un texte libre qui donne quelques idées élémentaires sur les outils de base et leurs utilisations dans le cadre du calcul infinitésimal. Nous insistons sur l'emploi simultanée de techniques différentielles et de techniques intégrales, le tout relié bien entendu par théorème fondamental du calcul différentiel et intégral.

L'aspect analyse fonctionnelle n'est pas abordé, tout au moins comme objet central d'étude.

Table des matières

Date: 25 mai 2008.

1. Introduction

Dans ces notes, nous nous préoccupons d'une partie particulière de l'analyse, le **calcul infinitésimal**. Celui-ci, qui s'appuie sur les outils classiques que sont la dérivation et l'intégration, c'est-à-dire sur le **calcul différentiel** et le **calcul intégral**, se préoccupe essentiellement d'approcher des nombres et des fonctions. En reprenant une formule employée par Jean Dieudonné dans son livre *Calcul infinitésimal*, le calcul infinitésimal peut se résumer en trois mots : **majorer, minorer, approcher**.

Au début du XX^{e} siècle, lors du Congrés International de Mathématiques de 1897, Jacques Hadamard énonce clairement **qu'il faut considérer les fonctions comme des points dans des ensembles de fonctions**. Ceci est un constat de l'état de la recherche en analyse à cette époque et des directions qu'elle prend alors. Désormais, va se développer, avec en vue l'étude des équations intégrales et des problèmes aux limites pour les équations différentielles, la théorie des espaces fonctionnels, mettant l'accent sur une géométrie des espaces de dimension infinie. On assiste là, au développement de **l'analyse fonctionnelle**. Nous ne parlerons pas de cet aspect, tout au moins en tant que théorie, nous contentant ici d'exprimer les résultats anciens du calcul infinitésimal, quand ceci s'impose, dans le cadre de l'analyse actuelle.

En définitive, nous parlerons de nombres, fonctions, suites, séries, dérivées et intégrales en relation avec des problèmes d'approximation et d'interpolation. Nous évaluerons des différences, à l'aide de majorations, minorations, des ordres de grandeur, nous étudierons des comportements asymptotiques.

Le texte que nous proposons, **n'est pas un cours** suivi de calcul infinitésimal, mais regroupe plutôt quelques notes un peu disparates, écrites au fil de la plume, qui soulignent quelques idées de base, agrémentées d'exemples, qui me semblent importantes pour celui qui doit aborder des exercices et problèmes, ou préparer des cours sur ce sujet.

De ce fait, ce document n'a bien entendu pas vocation à être exhaustif, ni à aborder des résultats fins d'analyse. Pour tout cela, le lecteur pourra se référer aux nombreux cours de « Calculus » disponibles.

2. Dichotomie

Je ne voudrais pas commencer une présentation des outils et des méthodes élémentaires de l'analyse, sans citer le plus simple d'entre eux : la dichotomie. C'est un moyen performant pour encadrer des nombres, notamment des solutions d'équations du type $f(x) = 0$, qui s'apparente aux stratégies employées en informatique sous le nom de « diviser pour règner ».

Nous partons d'une équation :

$$f(x) = 0,$$

où f est une fonction continue, dont nous supposons que nous avons isolé le zéro c que nous voulons calculer. C'est-à-dire que nous avons trouvé un intervalle [a,b] tel que :

$$c \in]a, b[,$$
$$\forall x \in [a, b] \setminus \{c\}, f(x) \neq 0$$

Nous supposerons en outre que f change de signe en c , donc que :

$$f(a)f(b) < 0.$$

La méthode de calcul de c par dichotomie est très simple : on coupe l'intervalle sur lequel on travaille en deux et on teste sur lequel des deux sous-intervalles obtenus se trouve c. On réitère le procédé à partir du sous-intervalle déterminé. Après n itérations on localise le nombre c sur un intervalle de longueur $(b - a)/2^n$. Voici les détails :

On fixe $\epsilon > 0$,

$A := a$;
$B := b$;
$E := \epsilon$;
tant que $B - A > E$ **faire**
    $C := (A + B)/2$;
    si $f(C) = 0$ **alors**
        retourner C ;
        sortir ;
    finsi ;

si $f(A)f(C) < 0$ **alors**
$B := C$;
sinon
$A := C$;
finsi ;
fintq ;
retourner C ;

Cette méthode ne s'applique pas lorsque f s'annule sans changer de signe, ou alors s'annule en des points si proches, qu'il n'est pas possible, numériquement, d'isoler un zéro.

3. Inégalité des accroissements finis

Soit f une fonction définie sur un intervalle (a, b). Devoir évaluer une quantité du type $|f(x) - f(y)|$ est un problème très fréquent, notamment lors des calculs d'erreurs en physique. Un cas très favorable est celui d'une fonction K-lipschitzienne.

Définition 3.1. *Soit $K > 0$ une constante. Nous dirons que la fonction f définie sur (a, b) est K-lipschitzienne, si pour tout x et tout y de l'intervalle (a, b) on a la majoration :*

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

Nous dirons que f est lipschitzienne, s'il existe une constante $K > 0$ telle que f soit K-lipschitzienne. On dira aussi : f est lipschitzienne de rapport K.

Quand on arrive à montrer qu'une fonction est lipschitzienne, il en découle de bonnes propriétés. En effet la fonction est alors uniformément continue sur (a, b).

Obtenir de telles majorations, tout au moins sur une partie de $\mathbb{R}$, peut se faire facilement par calcul algébrique lorsque la fonction s'exprime elle même simplement sous forme algébrique. Par exemple si f est une fonction polynomiale, ou une fraction rationnelle, ou une racine carrée.

Exemple 1 : la fonction $f(x) = x^2$ est lipschitzienne sur $[0, 1]$. En effet :

$$f(x) - f(y) = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y).$$

Donc :

$$|f(x) - f(y)| \leq 2|x - y|.$$

Cette fonction n'est pas lipschitzienne sur $[0, +\infty[$. D'ailleurs une fonction uniformément continue sur $[0, +\infty[$ est majorée par une fonction affine, ce qui n'est pas le cas de x^2.

Exemple 2 : la fonction $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ est lipschitzienne sur $[-1, 1/2]$. En effet :

$$f(x) - f(y) = \frac{x+1}{x-1} - \frac{y+1}{y-1} = 2\frac{y - x}{(x-1)(y-1)}.$$

Donc :

$$|f(x) - f(y)| \leq 2\frac{|y - x|}{|(x-1)(y-1)|},$$

d'où :

$$|f(x) - f(y)| \leq 8|y - x|.$$

Exemple 3 : la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est lipschitzienne sur $[1/2, 1]$. En effet :

$$f(x) - f(y) = \sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}.$$

Donc :

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}|x-y|.$$

Il n'en est pas de même quand f est une fonction plus compliquée. Dans ce dernier cas il faut mettre en place un outil plus complexe : le théorème (ou inégalité) des accroissements finis.

Une version immédiate de ce théorème se démontre avec le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, dans le cas d'une bonne fonction f dérivable sur un segment $[a,b]$ et dont la dérivée est intégrable (pour nous ce sera ici au sens de Riemann, donc en particulier on supposera $f'(t)$ bornée sur $[a,b]$). On a alors pour tout x et tout y de $[a,b]$:

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t)dt. \tag{1}$$

En posant :

$$M = sup_{t\in[a,b]}|f'(t)|dt,$$

on obtient la majoration uniforme :

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|.$$

La forme plus générale suivante, a une **expression géométrique** très simple et très intuitive.

Théorème 3.2 (Théorème des accroissements finis)**.** *Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$. Alors il existe un point $c \in]a,b[$ tel que :*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Autrement dit il existe un point c intérieur au segment où la tangente est parallèle à la corde joignant l'origine à l'extrémité de l'arc considéré (cf. figure 1).

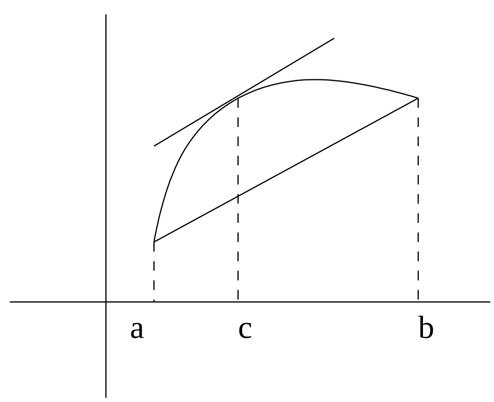

FIG. 1. Théorème des acroissements finis

Démonstration. Il suffit de se ramener au cas où $f(a) = f(b)$, cas dans lequel on doit montrer l'existence d'un point c intérieur tel que $f'(c) = 0$. Dans ce cas le théorème s'appelle théorème de Rolle. Puis on applique le théorème de Rolle à la fonction :

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x,$$

qui en vérifie bien les hypothèses, ce qui nous donne directement le résultat. Supposons donc en outre, $f(a) = f(b)$ et montrons l'existence d'un point c tel que $f'(c) = 0$. Si la fonction est nulle sur $[ab]$ le résultat a lieu. Sinon, il existe un point intérieur c où la fonction atteint un extremum (f est continue sur un compact) . Supposons par exemple qu'au point c la fonction soit maximale. Alors pour tout $a \leq x < c$, on a

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0,$$

ce qui implique, par passage à la limite en c, que $f'(c) \geq 0$ (par hypothèse la dérivée existe en tout point intérieur). Par ailleurs, pour tout $c < x \leq b$ on a

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0,$$

ce qui implique cette fois que $f'(c) \leq 0$. On en déduit que $f'(c) = 0$. □

Cette forme géométrique conduit directement à l'inégalité des accroissements finis, dans le cas où on peut encadrer la dérivée f' sur l'ouvert $]a, b[$.

Théorème 3.3 (Inégalité des accroissements finis)**.** *Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ dérivable sur l'ouvert $]a, b[$ et telle qu'il existe deux constantes $M \geq m$ telles que pour tout $x \in]a, b[$ on ait :*

$$m \leq f'(x) \leq M.$$

Alors,

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a).$$

En posant $K = max(|m|, |M|)$, on obtient :

$$|f(b) - f(a)| \leq K|b - a|.$$

En conclusion, remarquons dès à présent, que lorsqu'on peut employer l'outil très puissant qu'est l'intégration (voir équation (1)), on obtient très rapidement et à moindre frais une majoration de $|f(y) - f(x)|$. Cependant, dans des cas plus particuliers (et certainement plus rares), on doit rester dans le cadre du calcul différentiel sans passer par le calcul intégral. C'est le cas ici, pour la preuve du théorème des accroissements finis (voir le théorème 3.2) supposant uniquement l'existence de la dérivée sur l'ouvert $]a, b[$. Si on sort du cadre de l'interprétation géométrique (qui a tout de même ici un intérêt certain) pour se plonger dans le calcul infinitésimal, il arrive un moment où il faut bien majorer. Et là, la marge de généralité, que semble avoir la fonction f, se réduit notablement. Nous retrouverons cette même question quand nous verrons la formule de Taylor.

4. Point fixe, méthode de Newton

4.1. Approximations successives, point fixe. Avant de présenter la méthode de Newton, disons quelques mots sur la méthode générale des approximations successives. Soit f une fonction de classe C^1 définie sur un intervalle $[a, b]$ à valeurs dans l'intervalle $[a, b]$. Soit $u_0 \in [a, b]$. On définit alors par récurrence la suite de terme général u_i en posant pour tout $i \geq 1$ $u_i = f(u_{i-1})$. On étudie la convergence de cette suite. Nous allons montrer que sous certaines conditions on peut affirmer qu'il existe un point fixe pour f, c'est-à-dire une solution de l'équation $f(x) = x$ (cf. figure 2).

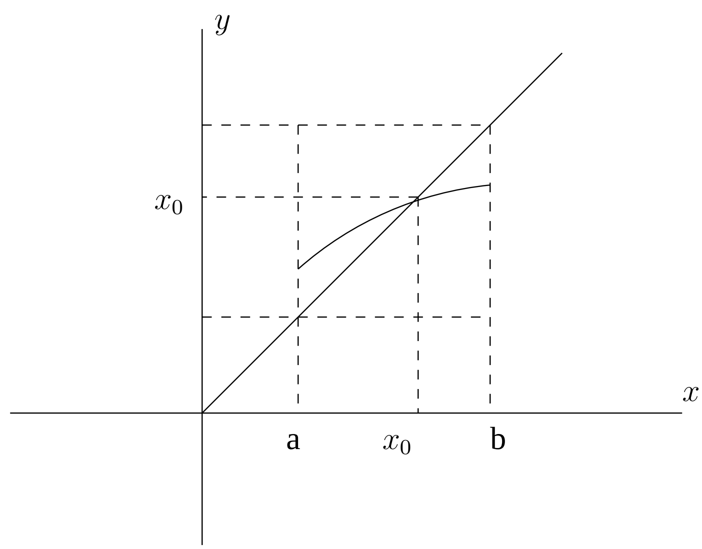

Fig. 2. Théorème du point fixe

Donnons tout d'abord le théorème général suivant, qui met en avant la notion de fonction lipschitzienne dont nous avons déjà parlé :

Théorème 4.1 (Théorème du point fixe)**.** *Soit f une application d'un segment $[a, b]$ dans lui-même. On suppose que pour tout $n \geq 1$ la fonction f_n obtenue en itérant n fois f :*

$$f_n = f \circ f \circ \cdots \circ f$$

est lipschitzienne de rapport k_n. On suppose en outre que la série $\sum_n k_n$ est convergente. Alors la fonction f admet un point fixe c et un seul. Pour tout point $x_0 \in [a, b]$ la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ définie par récurrence à partir de ce point x_0 en itérant f :

$$x_n = f(x_{n-1}) = f_n(x_0),$$

converge vers le point fixe c.

Démonstration. Soient $m > n$ deux indices. On peut écrire successivement :

$$|x_m - x_n| \leq \sum_{i=n}^{m-1} |x_{i+1} - x_i|,$$

$$|x_m - x_n| \leq \sum_{i=n}^{m-1} k_i |x_1 - x_0|,$$

$$|x_m - x_n| \leq (b-a) \sum_{i=n}^{m-1} k_i.$$

Comme la série de terme général k_i est convergente, cette inégalité prouve que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy, donc converge vers un point c du segment $[a,b]$. La fonction f étant continue (puisque lipschitzienne), on conclut que $c = f(c)$. Ce point est l'unique point fixe. En effet soit d un point fixe, et soit n un indice tel que $k_n < 1$. alors $|f_n(c) - f_n(d)| \leq k_n|c-d|$, puisque f_n est k_n-lipschitzienne, et aussi $|f_n(c) - f_n(d)| = |c-d|$ puisque c et d sont des points fixes de f (et donc de f_n). On en déduit que :

$$|c-d| \leq k_n |c-d|,$$

avec $0 < k_n < 1$, donc $d = c$. □

Un cas important d'application de de ce théorème est le cas où f est lipschitzienne de rapport $k < 1$. En effet dans ce cas, f_n est lipschizienne de rapport k_n avec $k_n \leq k^n$, et la série $\sum_n k_n$ est convergente.

Corollaire 4.2. *Soit f une application d'un segment $[a,b]$ dans lui-même. On suppose que la fonction f est lipschitzienne de rapport $k < 1$. Alors la fonction f admet un point fixe c et un seul. Pour tout point $x_0 \in [a,b]$ la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par récurrence à partir de ce point x_0 en itérant f :*

$$x_n = f(x_{n-1}),$$

converge vers le point fixe c.

En pratique, on montre souvent qu'une fonction est lipschitzienne de rapport k à l'aide du théorème des accroissements finis. On a donc le corollaire utile suivant :

Corollaire 4.3. *Soit f une application continue d'un segment $[a,b]$ dans lui-même. Supposons que f soit dérivable sur $]a,b[$ et de dérivée bornée par un nombre $k < 1$, c'est-à-dire :*

$$\sup_{x\in]a,b[} |f'(x)| = k < 1,$$

alors la fonction $f(x)$ admet un point fixe x_0 et un seul sur l'intervalle $[a,b]$. La suite $(u_i)_i$ définie précédemment converge vers le point fixe x_0.

Démonstration. Le théorème des accroissements finis montre que f est lipschitzienne de rapport $k = \sup_{x\in]a,b[} |f'(x)|$. Le corollaire précédent permet de conclure. □

4.2. **Quelques exemples.** Dans le premier exemple que nous allons donner, nos emploierons deux méthodes : nous ferons tout d'abord un calcul à la main, puis nous utiliserons directement le théorème précédent. Nous suggérons au lecteur de calquer ce shéma pour les autres exemples.

Exemple 1 : calcul du sinus et du cosinus de $1°$ par réinjection

4.2.1. *Présentation de l'exemple.* Les propriétés géométriques des lignes trigonométriques permettent de calculer facilement $\sin(\pi/6)$, $\sin(\pi/4)$, $\sin(\pi/3)$, $\sin(\pi/5)$ ainsi évidemment que les cosinus des mêmes angles. En utilisant la formule qui donne le sinus d'une différence on trouve $\sin(\pi/30)$, en utilisant la formule qui donne le sinus de l'arc moitié on obtient $\sin(\pi/60)$. On a donc une table donnant les sinus (et les cosinus) de 3° en 3°. Il faudrait donc calculer $\sin(\pi/180)$ pour avoir une table trigonométrique donnant les lignes de tous les angles en degré entier. On utilise alors la formule :

$$\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x) \tag{2}$$

qu'on va appliquer ici avec $x = \pi/180$. On cherche alors à résoudre cette équation connaissant la valeur $a = \sin(3x)$. L'équation se ramène à :

$$\sin(x) = \frac{1}{3}(4\sin^3(x) + a).$$

Donc si on pose :

$$f(u) = \frac{1}{3}(4u^3 + a),$$

le nombre $\sin(\pi/180)$ est solution de l'équation :

$$f(u) = u,$$

c'est-à-dire est un point fixe de f.

4.2.2. *Calcul à la main.* Pour calculer cette solution on part d'une valeur approchée de la solution u_0, par exemple $u_0 = 0$, et on calcule $u_1 = f(u_0)$. La valeur u_1 est réinjectée dans le second membre pour calculer une nouvelle approximation $u_2 = f(u_1)$, puis plus généralement, par récurrence :

$$u_n = f(u_{n-1}).$$

Théorème 4.4. *La suite de terme général u_n converge vers la valeur cherchée $\sin(\pi/180)$.*

Démonstration. La fonction f a pour dérivée :

$$f'(u) = 4u^2,$$

donc elle est croissante.
On a par ailleurs :

$$u_1 = f(0) = \frac{a}{3} \geq 0,$$

et aussi :

$$f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(4\frac{a^3}{8} + a\right),$$

$$f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^3}{6} + \frac{a}{3},$$

$$f\left(\frac{a}{2}\right) \leq \frac{a}{6} + \frac{a}{3},$$

donc :

$$f\left(\frac{a}{2}\right) \leq \frac{a}{2}.$$

On conclut que l'image par f de l'intervalle $[0, a/2]$ est incluse dans l'intervalle $[0, a/2]$, autrement dit, restreinte à l'intervalle $[0, a/2]$, f est une application de $[0, a/2]$ dans lui-même et cette application est croissante.

Comme $u_0 = 0$, $u_1 = f(u_0) \geq u_0$, on a aussi $f(u_1) \geq f(u_0)$, c'est à dire que $u_2 \geq u_1$ et par récurrence $u_n \geq u_{n-1}$. La suite de terme général u_n est croissante, elle est majorée par $a/2$, elle converge donc vers une limite b. Cette limite vérifie $b = f(b)$. L'étude de la fonction $g(u) = u - f(u)$ sur l'intervalle $[0, a/2]$ nous montre que l'équation $g(u) = 0$ a au plus une solution dans cet intervalle (en effet $g(u)$ est strictement croissante sur cet intervalle). Donc le b trouvé comme limite de la suite de terme général u_n est l'unique solution de l'équation $u = f(u)$ sur l'intervalle $[0, a/2]$. Comme on sait que $\sin(\pi/180)$, qui est dans l'intervalle en question, est solution de cette équation, pas de doute, $b = \sin(\pi/180)$. □

4.2.3. *Application du théorème général.* Il suffit de voir que sur l'intervalle $[0, a/2]$ la dérivée de la fonction f vérifie :

$$|f'(x)| \leq a^2 < 1.$$

Le corollaire 4.3 permet de conclure.

4.2.4. *Qualité de l'approximation.* On peut aussi évaluer la qualité de l'approximation, Sur l'intervalle $[0, a/2]$:

$$|f'(x)| \leq a^2.$$

On a alors en utilisant l'inégalité des accroissements finis et le le fait que $b = f(b)$:

$$|b - u_n| = |f(b) - f(u_{n-1})| \leq a^2 |b - u_{n-1}|,$$

et en réitérant le procédé,

$$|b - u_n| \leq (a^2)^n |b - u_0|,$$

et en majorant $|b - u_0|$ par la longueur de l'intervalle :

$$|b - u_n| \leq \frac{a^{2n+1}}{2}.$$

(Ceci revient à refaire la démonstration du théorème général.)

Exemple 2 : calcul de l'inverse d'un nombre.

4.2.5. *Présentation de l'exemple.* Soit a un nombre réel que nous supposerons > 0 dont nous voulons calculer l'inverse $1/a$. La méthode que nous présentons, et qui est implémentée dans certaines calculatrices et certains langages de programmation, est très performante. C'est la méthode de Newton, développée pour le cas particulier qui nous préoccupe.

Introduisons la fonction :

$$F(x) = x(2 - ax).$$

Cherchons les solutions de l'équation :

$$x = F(x) \tag{3}$$

c'est-à-dire de :

$$x(1 - ax) = 0. \tag{4}$$

Les solutions sont 0 et $1/a$. Nous allons essayer d'approcher la solution $1/a$. L'idée est de partir d'une valeur approchée $u_0 > 0$ de $1/a$ de calculer $u_1 = F(u_0)$, de réinjecter u_1 dans la partie droite de l'équation 3 pour obtenir $u_2 = F(u_1)$ et plus généralement par récurrence $u_n = F(u_{n-1})$.

Notons I l'intervalle ouvert $]0, 2/a[$.

Théorème 4.5. *Soit $u_0 \in I$. Alors la suite définie par le premier terme u_0 et la relation de récurrence pour $n \geq 1$*

$$u_n = F(u_{n-1}),$$

converge vers $1/a$.

Démonstration. La dérivée de $F(x)$ sur l'intervalle I est donnée par :

$$F'(x) = 2(1 - ax).$$

Sur l'intervalle I, la fonction est positive et atteint son maximum en $x = 1/a$. En ce point la valeur de la fonction est $1/a$. On peut donc conclure que l'image de l'intervalle I est incluse dans I. Remarquons aussi que sur l'intervalle $]0, 1/a]$ la fonction $F(x)$ est strictement croissante. Si $u_0 \in I$ alors $0 < F(u_0) \leq 1/a$. Posons ensuite $u_1 = F(u_0)$ et par récurrence $u_n = F(u_{n-1})$. Tous les termes $u_1, u_2, \cdots$ sont donc dans l'intervalle $]0, 1/a]$. De ce fait, $au_n \leq 1$, si bien que $(2 - au_n) \geq 1$ et donc

$$u_{n+1} = u_n(2 - au_n) \geq u_n.$$

La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante, majorée par $1/a$, donc converge vers une limite $0 < b \leq 1/a$ qui vérifie $b = b(2 - ab)$. Cette limite est donc le point $1/a$ de F. □

On peut étudier aussi la qualité de l'approximation obtenue. Pour cela on suppose qu'on parte d'une valeur u_0 telle que

$$0 \leq u_0 \leq \frac{1}{a}.$$

Dans ces conditions on sait que toutes les valeurs u_n sont aussi dans cet intervalle. Alors on a successivement :

$$\begin{aligned}
1 - au_n &= 1 - au_{n-1}(2 - au_{n-1}), \\
1 - au_n &= 1 - 2au_{n-1} + au_{n-1}^2, \\
1 - au_n &= (1 - au_{n-1})^2, \\
1 - au_n &= (1 - au_0)^{2^n}.
\end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\frac{1}{a} - u_n = \frac{1}{a}(1 - au_0)^{2^n}.$$

Posons $\alpha = 1 - au_0$. Compte tenu des conditions sur la valeur initiale u_0 le nombre α vérifie $0 \leq \alpha < 1$. La suite u_n qui vérifie :

$$\left|\frac{1}{a} - u_n\right| = \frac{1}{a}\alpha^{2^n}$$

a donc une convergence quadratique vers $1/a$.

Lors d'une implémentation effective, le problème du choix du point de départ se pose. On commence par écrire a sous la forme :

$$a = c\,10^k,$$

où $1 \leq c < 10$ et où k est un entier relatif. Ceci permet de se ramener à calculer l'inverse d'un nombre compris entre 1 et 10. Ceci étant fait, on peut supposer désormais que

$$1 \leq a < 10.$$

Choisissons u_0 de la façon suivante :

(1) si $1 \leq a < 2$ alors $u_0 = 0.5$,

(2) si $2 \leq a < 3$ alors $u_0 = 0.3$,
(3) si $3 \leq a < 5$ alors $u_0 = 0.2$,
(4) si $5 \leq a < 10$ alors $u_0 = 0.1$.

Ce choix respecte la condition $u_0 \leq 1/a$, et de plus $au_0 \geq 0.5$. Donc $1 - au_0 \leq 0.5$. Ces choix étant faits on obtient puisque $1/a \leq 1$ et $\alpha \leq 1/2$:

$$\left| \frac{1}{a} - u_n \right| \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{2^n}.$$

4.3. **La méthode de Newton.** On peut se demander à propos de l'exemple précédent pourquoi la convergence est si rapide. C'est ce que nous allons essayer d'expliquer maintenant.

On peut déjà, compte tenu de la situation, penser que la convergence va être rapide. En effet compte tenu de l'inégalité des acroissements finis :

$$u_n - \frac{1}{a} = f(u_{n-1}) - f\left(\frac{1}{a}\right) \leq k\, u_{n-1} - \frac{1}{a},$$

où k est un majorant de $F'(x)$ sur l'intervalle considéré. Donc :

$$\left| u_n - \frac{1}{a} \right| \leq k^n \left| u_0 - \frac{1}{a} \right|,$$

si bien que si $k < 1$ la suite converge. Mais ici, la dérivée est nulle au point fixe, donc, on peut s'attendre à une amélioration de la rapidité d'approximation lorsqu'on se rapproche du point fixe. On a vu en fait que l'approximation est quadratique.

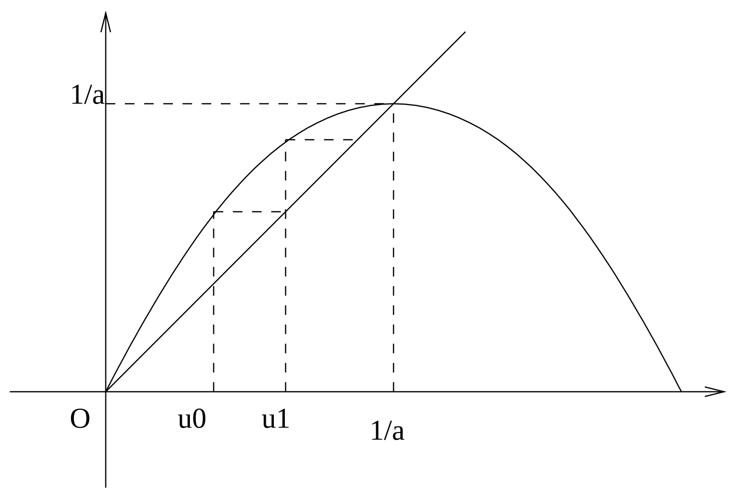

Fig. 3. Approximation de $1/a$

Généralisons cette méthode. Soit $f(x)$ une fonction sur un intervalle $I = [a, b]$ et ayant sur cet intervalle un seul zéro c. On suppose que $f'(x)$ ne s'annule pas sur I.

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Alors c est le seul point fixe de $F(x)$ sur l'intervalle I.

$$F'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}.$$

Donc $F'(c) = 0$. On se retrouve dans la situation favorable précédente.

Remarquons que cette construction a une interprétation géométrique simple : Il s'agit ici de remplacer la fonction f dont on cherche un zéro par sa tangente en un point voisin du zéro cherché (cf. figure 4).

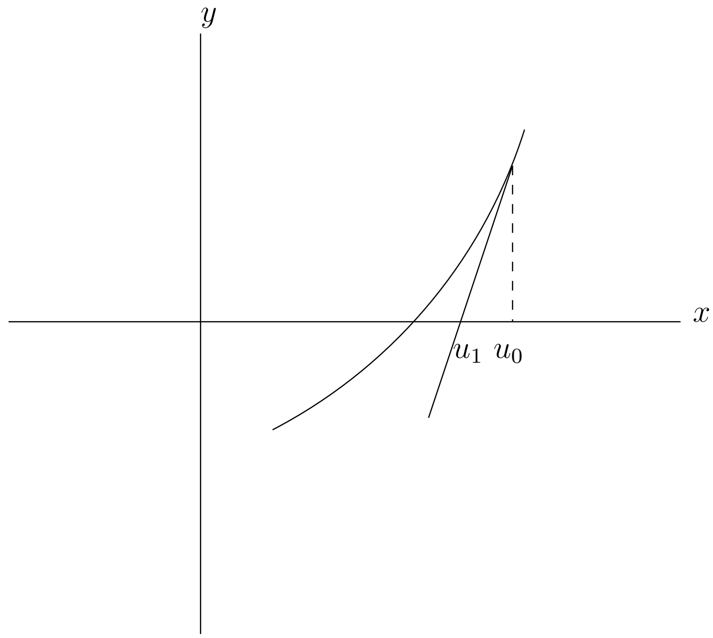

FIG. 4. Méthode de Newton

Ainsi à partir d'un point u_0 proche de la solution x_0 de l'équation $f(x) = 0$ (qu'on supposera unique, tout au moins dans un intervalle adapté), on construit la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(u_0, f(u_0))$. Cette tangente coupe l'axe des abscisses au point u_1. On itère cette construction à partir de la valeur u_1 pour obtenir le point u_2. Le calcul de l'équation de la tangente au point d'abscisse x et de son intersection avec l'axe des x montre que si on introduit :

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

alors on peut écrire :

$$u_1 = F(u_0), u_2 = F(u_1), \cdots, u_n = F(u_{n-1}), \cdots$$

On vérifie imédiatement que x_0 est point fixe de la fonction $F(x)$. De plus si on suppose la fonction f de classe C^2 par exemple et si on suppose que la dérivée f' de f ne s'annule pas, alors $F(x)$ est dérivable et sa dérivée est nulle au point x_0. Il y aura donc un voisinage fermé de ce point fixe, pas nécessairement simple à déterminer effectivement, dans lequel la théorie du paragraphe précédent s'applique. De plus, comme la dérivée de F sera proche de zéro, on peut espérer une bonne convergence de la suite $(u_n)_n$, d'autant plus rapide qu'on va se rapprocher du point fixe.

$$F(x) - F(c) = F(x) - c = \frac{A(x)}{f'(x)}.$$

Comme $F(c) - c = 0$ on conclut que $A(c) = 0$. Comme $F'(c) = 0$ on conclut que $A'(c) = 0$. Si par exemple $A(x)$ est un polynôme ça veut dire qu'il s'écrit :

$$A(x) = (x-a)^2 B(x),$$

où $B(x)$ est un polynôme et donc la convergence est quadratique. Nous verrons (application de la formule de Taylor) que ceci a lieu pour des fonctions plus générales.

Exemple 3 : Considérons la fonction :

$$f(x) = x^2 - 2.$$

En nous restreignant à $x \geq 0$, nous allons déterminer la solution positive de l'équation $x^2 = 2$, c'est à dire $x = \sqrt{2}$. Introduisons donc, comme nous l'indique la méthode de Newton, la fonction :

$$F(x) = x - \frac{x^2-2}{2x} = x - \frac{x}{2} + \frac{1}{x} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right).$$

On voit que par exemple $F([1,2]) \subset [1,2]$ et sur cet intervalle la dérivée de $F(x)$ est en valeur absolue majorée par $1/2$. Donc le théorème du point fixe s'applique sur cet intervalle. Nous avons successivement :

$$\frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) - \sqrt{2} = F(u_n) - F(\sqrt{2}) = \frac{1}{2u_n}\left(u_n^2 + (\sqrt{2})^2 - 2u_n\sqrt{2}\right),$$

$$\frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) - \sqrt{2} = \frac{1}{2u_n}\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2,$$

$$\left|\frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2,$$

c'est-à-dire :

$$|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2.$$

La convergence est donc **quadratique**.

Exemple 4 :

Prenons :

$$f(x) = x^2 - x - 1$$

et regardons ce qu'il se passe sur l'intervalle $[1,2]$. On est alors amené à introduire :

$$F(x) = \frac{x^2+1}{2x-1}.$$

Exemple 5 : On peut reprendre le calcul de $b = \sin(\pi/180)$ connaissant $a = \sin(\pi/60)$. Nous avions utilisé la fonction $f = 1/3(4x^3 + a)$ pour définir par récurrence la suite $u_n = f(u_{n-1})$ qui convergeait vers le point fixe $b = f(b)$. Hélas, au point b, la valeur de la dérivée $f'(b)$ n'est pas nulle, si bien que la convergence n'est peut être pas aussi rapide qu'elle pourrait l'être avec la méthode de Newton. Pour appliquer cette méthode, nous remarquons que nous cherchons le zéro de la fonction $h(x) = f(x) - x$. Conformément aux calculs précédent, nous introduisons la fonction :

$$g(x) = x - \frac{h(x)}{h'(x)}.$$

Tous calculs faits, on obtient :

$$g(x) = \frac{8x^3 - a}{12x^2 - 3}.$$

La suite $u_0 = 0$, $u_n = g(u_{n-1})$ converge alors plus vite que précédemment vers la valeur cherchée $b = \sin(\pi/180)$. Une expérimentation avec un système de calcul confirme ce comportement. En partant de $u_0 = 0$, la première itération, $u_1 = g(u_0)$, donne 4 décimales exactes, la deuxième, $u_2 = g(u_1)$, donne 11 décimales exactes.

5. INTÉGRATION, OUTILS DE BASE

L'intégrale (quand elle existe), est un outil régularisant. Il effectue une moyenne et gomme un certain nombre d'irrégularités de la fonction qu'on intègre. Prenons par exemple la fonction en escalier définie sur $[0, 1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1/2 \\ 1 & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Cette fonction f a un point de discontinuité en $1/2$ et peut être intégrée :

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1/2 \\ x - 1/2 & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

La fonction $g(x)$ est continue sur $[0, 1]$. Mais $g(x)$ n'est pas dérivable (au point $1/2$).

Remarquons que la fonction f n'a pas de primitive sur $[a, b]$. Ce n'est pas une dérivée. D'ailleurs on peut montrer qu'une dérivée vérifie le théorème des valeurs intermédiaires, ce qui n'est pas le cas de f ici :

Théorème 5.1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle (a, b) qui est une dérivée. Soient α et β deux points de (a, b). Alors $f(x)$ prend toute valeur comprise entre $f(\alpha)$ et $f(\beta)$.*

5.1. **Un problème de raccord.** On considère sur l'intervalle $[-1, 1]$ la fonction paire f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = 1 - x$. On considère les points P et Q de coordonnées respectives $(-h, f(h))$, $(h, f(h))$ où $0 < h < 1$. On cherche un arc de parabole qui se raccorde en ces deux points en étant tangent aux deux droites constituant la courbe représentative de f. La dérivée de la fonction parabolique sur $[-h, h]$ est donc $g'(x) = -x/h$ (polynôme du premier degré qui vaut 1 en $-h$ et -1 en h). Donc $g(x) = -x^2/2h + C$. La constante est donnée par $g(h) = f(h) = 1 - h$, ce qui donne $C = 1 - h/2$. En définitive :

$$g(x) = -\frac{x^2}{2h} + 1 - \frac{h}{2}.$$

Bien entendu on aurait pu directement écrire les conditions sur g (g polynôme du second degré, $g'(-h) = 1$, $g'(h) = -1$), mais cette méthode très simple qui consiste à déterminer g à partir de sa dérivée est intéressante.

5.2. **Intégration des relations de comparaison.** L'intégration se comporte bien vis à vis des opérations de comparaisons classiques :

5.2.1. *Inégalités.*

Théorème 5.2. *si f et g sont intégrables sur $[a, b]$ et si $f \leq g$, alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$. Ce résultat persiste pour les intégrales généralisées.*

5.2.2. *Comportement asymptotique : cas de la divergence.* Regardons maintenant ce qui se passe du point de vue des comparaisons asymptotiques des intégrales généralisées. On considèrera qu'on regarde le comportement au voisinage de $+\infty$ (mais ce pourrait être au voisinage d'un point a). On utilise les notations de Landau $o(g)$ et $O(g)$ ainsi que l'équivalence $\sim$.

Théorème 5.3. *Soit g une fonction continue > 0 sur $[a, +\infty[$ telle que*

$$\int_a^{+\infty} g(t)dt = +\infty.$$

Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$.

(1) *Si $f = O(g)$ alors*
$$\int_a^x f(t)dt = O\left(\int_a^x g(t)dt\right)$$
(2) *Si $f = o(g)$ alors*
$$\int_a^x f(t)dt = o\left(\int_a^x g(t)dt\right)$$
(3) *Si $f \sim g$ alors*
$$\int_a^x f(t)dt \sim \int_a^x g(t)dt.$$

5.2.3. *Comportement asymptotique : cas de la convergence.*

Théorème 5.4. *Soit g une fonction continue > 0 sur $[a, +\infty[$ telle que*

$$\int_a^{+\infty} g(t)dt < +\infty.$$

Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$.

(1) *Si $f = O(g)$ alors*
$$\int_x^{+\infty} f(t)dt = O\left(\int_x^{+\infty} g(t)dt\right)$$
(2) *Si $f = o(g)$ alors*
$$\int_x^{+\infty} f(t)dt = o\left(\int_x^{+\infty} g(t)dt\right)$$
(3) *Si $f \sim g$ alors*
$$\int_x^{+\infty} f(t)dt \sim \int_x^{+\infty} g(t)dt.$$

Ces divers résultats permettent, en collaboration avec l'intégration par partie de déterminer des comportements asymptotiques pour diverses intégrales. On verra des exemples dans la section consacrée à l'intégration par partie.

5.3. **Calcul du sinus et du cosinus de 1° par une approximation polynomiale.** On va prendre ici pour valeur approchée du sinus au voisinage de 0 le polynôme :

$$P(x) = x - \frac{x^3}{6}.$$

Compte tenu du problème posé on prendra $x \geq 0$.

Pour évaluer la qualité de cette approximation nous allons partir de l'inégalité triviale

$$\cos(x) \leq 1.$$

Par conservation des inégalités par intégration sur un intervalle $[a, b]$ où $b \geq a$, on a donc :

$$\int_0^x \cos(t)\, dt \leq \int_0^x dt,$$

c'est-à-dire :

$$\sin(x) \leq x.$$

En réappliquant cette méthode on obtient maintenant :

$$\int_0^x \sin(t)\, dt \leq \int_0^x x\, dt,$$

ou encore :

$$1 - \cos(x) \leq \frac{x^2}{2},$$

et en conséquence l'encadrement suivant :

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1.$$

On obtient alors successivement, toujours par intégration les encadrements suivants :

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x,$$

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24},$$

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

Ceci montre en particulier que :

$$0 \leq \sin(x) - P(x) \leq \frac{x^5}{120}.$$

Appliqué au cas où $x = \pi/180$, on obtient :

$$0 \leq \sin\left(\frac{\pi}{180}\right) - P\left(\frac{\pi}{180}\right) \leq 1.35\, 10^{-11}.$$

6. Quelques classes habituelles de fonctions

6.1. **Fonctions réglées.** Quand on fait de l'analyse on essaie le plus possible de « rendre cohérents » les systèmes avec lesquels on travaille. Précisons un peu ce que j'entend par là. On est souvent confronté au problème suivant : on a un ensemble d'objets mathématiques (par exemple des fonctions continues sur un segment $[a, b]$). On a un outil qui s'applique à ces objets (par exemple l'intégrale sur le segment $[a, b]$). Enfin on a un mode de convergence (par exemple la convergence uniforme sur $[a, b]$). La question est : l'outil agit il de manière stable vis à vis de la convergence dans cet ensemble ? (Par exemple : soit f_n une suite de fonctions continues sur $[a, b]$ qui converge uniformément vers f. la suite des intégrales des f_n converge-t-elle vers l'intégrale de f). Dans certains cas ceci n'a pas lieu, et en fait les raisons du dysfonctionnement peuvent être multiples. Prenons l'exemple de l'espace des fonctions continues sur un segment $[a, b]$, et la convergence simple.

(1) Le premier obstacle est que cet espace n'est pas stable pour la convergence simple.

    Exemple 1 : on considère la suite de fonctions $(f_n)_{n>0}$ définies sur $[0, 1]$ par :
$$f_n(x) = \begin{cases} -nx+1 & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
    Cette suite de fonctions continues converge simplement vers la fonction discontinue :
$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(2) On peut alors penser à considérer l'espace des fonctions intégrales au sens de Riemann sur $[a, b]$. Hélas, il n'est pas stable non plus pour la convergence simple : On peut trouver une suite de fonctions intégrables au sens de Riemann, qui converge simplement vers une fonction bornée, qui n'est pas intégrable au sens de Riemann. Pour cela considérons la suite de fonctions f_n, définies sur $[0, 1]$ par :
$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = \frac{k}{n!} \text{ où } 0 \leq k \leq n! \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
    Cette suite converge siplement vers la fonction de Dirichlet :
$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
    Les fonctions f_n sont intégrables (au sens de Riemann), la fonction f ne l'est pas.

D'autre part, rester dans le cadre des fonctions continues et de la convergence uniforme est un peu contraignant. Le cadre des fonctions réglées est un bon compromis.

Définition 6.1. *Soit f une fonction définie sur un segment $[a, b]$. La fonction f est dite réglée, si en tout point $x \in]a, b[$, elle admet une limite à droite et une limite à gauche, et si elle admet une limite à droite en a et une limite à gauche en b.*

On doit donner tout de suite une caractérisation très importante des fonctions réglées, qui pourrait d'ailleurs servir de définition.

Théorème 6.2. *Une fonction f définie sur un segment $[a, b]$ est réglée, si et seulement si elle est limite uniforme de fonctions en escalier.*

Cette caractérisation nous fait comprendre l'intérêt de cette classe lorsqu'on travaille avec l'intégrale de Riemann, qui rappelons le, est définie par passage à la limite sur des intégrales de fonctions en escalier.

Les fonctions en escaliers, les fonctions continues, les fonctions monotones sont des fonctions réglées. Cette classe est stable pour la convergence uniforme et l'intégrale d'une limite de fonctions réglées est la limite des intégrales.

7. L'intégration par partie

Nous présentons ici un outil très simple mais particulièrement efficace : l'intégration par partie. À son propos, je citerais Roger Godement qui dans la rubrique *Calcul Infinitésimal* de l'Encyclopédie Universalis écrit : « [*l'intégration par partie est*] très commode pour le calcul pratique des intégrales, mais dont l'intérêt est ailleurs lorsqu'on s'occupe de mathématiques ».

Donc, si l'on veut bien laisser de côté le volet anecdotique du calcul exact de certaines primitives, il faut comprendre l'intégration par partie comme l'écriture d'une expression sous forme d'une partie principale (la partie tout intégrée) et d'un reste (la deuxième intégrale)

$$\int_a^x f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^x - \int_a^x f(t)g'(t)dt.$$

Évidemment, si on espère que la partie

$$-\int_a^x f(t)g'(t)dt$$

puisse être considérée comme un reste, il faut qu'elle soit négligeable devant la partie tout intégrée

$$[f(t)g(t)]_a^x.$$

Cette remarque nous indique comment choisir, quand on fait une intégration par partie d'un produit de deux fonctions, celle qu'on intègre et celle qu'on dérive : celle qu'on dérive est en général celle qui relativement varie peu, de manière à obtenir une dérivée petite devant la fonction elle-même. Attention ceci ne s'applique pas pour l'utilisation de l'intégration par partie pour des calculs de primitives, ni pour l'établissement de formules théoriques où l'on veut obtenir une forme particulière pour le terme tout intégré.

Dans la suite de ce chapitre, nous donnons deux applications très importantes de l'intégration par partie : la formule de Taylor et la formule d'Euler-Maclaurin. Ces deux formules constituent des outils de base des méthodes d'approximation.

7.1. **Intégrons dans le bon sens.**

Exemple 1. Il s'agit d'évaluer au voisinage de $+\infty$ l'intégrale

$$\int_{\ln(x)}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u^2} du.$$

On choisit clairement de dériver la fonction $1/u^2$ et d'intégrer la fonction e^{-u}, on obtient

$$\int_{\ln(x)}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u^2} du = \frac{1}{x(\ln(x))^2} - 2\int_{\ln(x)}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u^3} du.$$

Cette manière de faire permet effectivement d'obtenir un reste négligeable devant la partie intégrée. En effet :

$$\frac{e^{-u}}{u^3} = o\left(\frac{e^{-u}}{u^2}\right),$$

donc :

$$\int_{\ln(x)}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u^3} du = o\left(\int_{\ln(x)}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u^2} du\right)$$

et en conséquence :

$$\int_{\ln(x)}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u^2} du \sim \frac{1}{x(\ln(x))^2}.$$

Exemple 2. Dans cet exemple nous cherchons la nature de l'intégrale :

$$\int_1^{+\infty} \frac{sin(x)}{x} dx.$$

On étudie donc :

$$\lim_{A \to +\infty} \int_1^A \frac{sin(x)}{x} dx.$$

On va faire une intégration par partie, en dérivant la fonction qui varie peu au voisinage de $+\infty$ et en intégrant l'autre, c'est-à-dire $sin(x)$. On a donc en détaillant un peu l'intégration par partie sur l'intervalle $[0, A]$:

$$\begin{array}{ll} u = \frac{1}{x} & u' = -\frac{1}{x^2} \\ v = -cos(x) & v' = sin(x) \end{array}$$

$$\int_1^A \frac{sin(x)}{x} dx = \left[-\frac{cos(x)}{x}\right]_1^A - \int_1^A \frac{cos(x)}{x^2} dx.$$

La partie principale tend vers $cos(1)$ lorsqu'on fait tendre A vers $+\infty$, le reste, c'est-à-dire :

$$-\int_1^A \frac{cos(x)}{x^2} dx$$

est majoré en valeur absolue par une intégrale convergente :

$$\left|\int_1^A \frac{cos(x)}{x^2} dx\right| \leq \int_1^A \left|\frac{cos(x)}{x^2}\right| dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx,$$

donc constitue une intégrale absolument convergente sur $[1, +\infty[$. On en conclut que l'intégrale étudiée est convergente.

On peut montrer que l'intégrale étudiée n'est pas absolument convergente en étudiant les sommes partielles :

$$S_n = \int_1^{n\pi} \frac{|sin(x)|}{x} dx,$$

$$S_n = \int_1^{\pi} \frac{|sin(x)|}{x} dx + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|sin(x)|}{x} dx. \tag{5}$$

Or :

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|sin(x)|}{x} dx \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^{\pi} sin(x) dx = \frac{2}{(k+1)\pi},$$

ce qui prouve que la série qui intervient dans la formule (5) est divergente.

Exemple 3. Dans cet exemple nous cherhons un équivalent au voisinage de $+\infty$ de

$$\int_a^x \frac{dt}{\ln(t)}.$$

(où $a > 1$).

On effectue une intégration par partie, où on dérive $1/\ln(t)$ et on intègre 1 :

$$\int_a^x \frac{dt}{\ln(t)} = \left[\frac{t}{\ln(t)}\right]_a^x + \int_a^x \frac{dt}{(\ln(t))^2}.$$

Comme :

$$\frac{1}{(\ln(t))^2} = o\left(\frac{1}{\ln(t)}\right),$$

on a :

$$\int_a^x \frac{dt}{(\ln(t))^2} = o\left(\int_a^x \frac{dt}{\ln(t)}\right).$$

En conséquence :

$$\int_a^x \frac{dt}{\ln(t)} \sim \frac{x}{\ln(x)}.$$

Exemple 4 (l'art de se faire enfumer). Il s'agit de calculer

$$I_p = \int_1^e x^2(\ln(x))^p dx.$$

On a $I_0 = (e^3 - 1)/3$.

7.1.1. *Le piège.* Le piège consiste ici à voir apparaître une formule très simple et à se laisser aller à intégrer par partie "à l'envers". C'est-à-dire qu'on va dériver $(\ln(x))^p$ et intégrer x^2.

$$I_p = \frac{e^3}{3} - \frac{p}{3} I_{p-1}.$$

Si nous itérons le calcul nous sommes amenés à écrire la formule exacte

$$I_p = \frac{e^3}{3}\left(1 - \frac{p}{3} + \frac{p(p-1)}{9} + \cdots + (-1)^{p-1}\frac{p!}{3^{p-1}}\right) + (-1)^p \frac{p!}{3^{p-1}}(e^3 - 1).$$

Hélas, comme à chaque étape on a pris un "reste plus grand que la partie qui aurait dû être principale", cette formule est très instable numériquement. En effet si on change un peu la valeur initiale I_0 en J_0, alors le terme J_p calculé vérifie

$$J_p - I_p = (-1)^p \frac{p!}{3^p}(J_0 - I_0),$$

ce qui fait que si $J_0 \neq I_0$, alors $|J_p - I_p| \to +\infty$. Donc une erreur d'arrondi va complètement modifier le calcul.

7.1.2. *L'intégration dans le bon sens.* Bien sûr, si on intègre dans le bon sens en exhibant une partie principale et un reste plus petit que cette partie principale, alors ceci ne se produit plus. Intégrons donc $\frac{(\ln(x))^p}{x}$ et dérivons x^3. Nous obtenons

$$I_p = \frac{e^3}{p+1} - \frac{3}{p+1} I_{p+1},$$

et cette fois-ci en itérant le calcul on tombe sur une formule stable qui nous permet d'écrire tout de suite

$$I_p \sim \frac{e^3}{p}.$$

Si on veut pousser le développement plus loin on obtient :

$$I_p = e^3 \left(\frac{1}{p} - \frac{4}{p^2} \right) + o\left(\frac{1}{p^2} \right).$$

Bien sûr la formule de récurrence trouvée est la même que dans le premier calcul, écrite différemment. Mais justement ceci nous permet de voir que si on a une vision "à l'envers" de l'intégration par partie, alors la suite des calculs qu'on est amené naturellement à faire conduit à de mauvaises situations.

7.2. **Conclusion et remarques.** Nous avons vu que l'intégration par partie est un outil puissant pour étudier des comportements asymptotiques d'intégrales convergentes ou divergentes en considérant la partie tout intégrée comme la partie principale et la deuxième intégrale comme un reste.

D'un autre côté, en analyse il y a un aller-retour pemanent entre des situations « discrètes » et des situations « continues ». On approche des fonctions en regardant ses valeurs en un nombre fini de points par exemple. Ou bien on construit une fonction en interpolant à partir d'un nombre fini de valeurs. On associe à une équation différentielle $y' = f(y)$ une suite telle que $u_0 = y_0$ et $u_{n+1} - u_n = hf(u_n)$, remplaçant ainsi la dérivée par une différence finie (c'est la méthode de la tangente d'Euler). En ce qui concerne les intégrales généralisées, elles trouvent leur équivalent discret en considérant les séries. On peut donc se demander quel est le pendant sur les séries de l'intégration par partie. C'est la transformation d'Abel. Considérons la série de terme général $a_n b_n$. Posons alors $S_k = \sum_{i=1}^{k} b_i$ et $S_0 = 0$. Alors :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k (S_k - S_{k-1}),$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k S_k - \sum_{k=1}^{n} a_k S_{k-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k S_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} S_k,$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n S_n + \sum_{k=1}^{n-1} S_k (a_k - a_{k+1}).$$

On peut aussi écrire cette transformation pour un reste partiel :

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = a_n S_n - a_{m-1} S_{m-1} + \sum_{k=m}^{n-1} S_k (a_k - a_{k+1}).$$

À partir de là et de quelques hypothèses sur les comportements de a_n et S_n, on peut aussi énoncer des résultats sur le comportement asymptotique de la série de terme général $a_n b_n$.

8. La formule de Taylor

8.1. **Remarque préliminaire.** Comme nous allons le voir, la formule de Taylor peut être considérée comme une généralisation du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral qui permet d'écrire lorsque f est dérivable et de dérivée intégrable :

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt.$$

En intégrant par partie l'intégrale du second membre, puis les intégrales calculées successivement en itérant le procédé, on obtient la formule de Taylor, qui nous permet d'exprimer une fonction comme un polynôme plus un reste.

8.2. **Le théorème principal.**

Théorème 8.1. *Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur le segment $[a-\epsilon, a+\epsilon]$ et $n+1$ fois continument dérivable sur ce segment. Alors pour tout point x du segment $[a-\epsilon, a+\epsilon]$ on peut écrire*

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!}f(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt.$$

Démonstration. On utilise une démonstration par récurrence. La formule

$$\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a),$$

assure que le théorème est vrai pour $n = 0$. Si on suppose vraie la formule à l'ordre $n \geq 0$ alors

$$\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt = \left[\frac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(t)\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+2)}(t)dt,$$

$$\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+2)}(t)dt,$$

ce qui nous donne la formule à l'ordre $n+1$. □

8.3. **Obtention d'autres écritures.** J'essaie autant que faire se peut d'exprimer les formules asymptotiques en utilisant des restes intégraux qui donnent des **formules exactes** et qui conduisent assez facilement à des majorations effectives. J'évite au maximum les formules faisant intervenir des restes écrits avec des points dont on ne connait pas la valeur mais juste une localisation. En général, dans un vrai problème on n'a jamais vraiment besoin de ces formules et les formules avec reste intégral ainsi que l'outil "intégration par partie" permettent d'obtenir les évaluations dont on a besoin. De toutes façons, il ne faut pas oublier que tant qu'on écrit la formule avec reste intégral **on ne perd rien**, toute l'information est là et reste disponible sous une forme commode. Ce n'est pas le cas avec les autres écritures : formule de Taylor-Lagrange, formule de Taylor-Young, qui toutefois, sont difficiles à ommettre dans un cours ou dans une leçon formelle en raison de leur poids historique, mais que je ne conseille guère d'utiliser pour majorer effectivement. Insistons encore une fois sur le fait que lorsqu'on dispose du reste intégral (ou d'un autre type de reste d'ailleurs), la formule n'est utile que si on est capable de majorer ce reste et d'obtenir une bonne approximation polynomiale de la fonction f au voisinage du point a.

8.3.1. *Formule de Taylor-Lagrange.* Cette formule est dans la ligne directe du théorème des accroissements finis dans sa version donnée par le théorème 3.2.

Théorème 8.2. *Soit f une fonction de classe C^n sur $[a,b]$ et admettant une dérivée d'ordre $n+1$ dérivable sur $]a,b[$. Alors, il existe un point $c \in]a,b[$ tel que :*

$$f(b) = f(a) + \frac{(b-a)}{1!} f(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Cette formule se démontre en restant dans le cadre du calcul différentiel, en appliquant la formule des accroissements finis dans sa version donnée par le théorème 3.2. C'est une formule **globale**, qui permet d'avoir une évaluation sur tout un intervalle. Remarquons que l'interprétation géométrique qui faisait le grand intérêt du théorème des accroissements finis 3.2 a disparu ici. Dans la plupart des cas on gagnera à appliquer la formule avec reste intégral.

8.3.2. *Formule de Taylor-Young.* Cette formule est une formule **locale** qui permet non pas d'avoir une évaluation sur tout un intervalle fixé à l'avance, mais un comportement au voisinage d'un point. Elle est destinée à écrire des développements limités et remplit parfaitement sa fonction dans ce cas en expédiant tout de suite le reste sous la forme voulue.

Théorème 8.3. *Soit f une fonction de classe C^n sur un intervalle I, et a un point de I. On suppose que f admet une dérivée d'ordre $n+1$ au point a. Alors pour tout $x \in I$ on a*

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + o\left(|x-a|^{n+1}\right).$$

L'étude locale d'une fonction, consistant le plus souvent en un développement limité à un ordre intéressant de la fonction au voisinage d'un point, est l'une des deux applications principales de la formule de Taylor, l'autre étant le développement en série entière.

8.4. **Fonction développable en série entière.** Le développement en série entière de fonctions est, comme nous l'avons souligné, l'une des applications principales de la formules de Taylor. On écrit, quand le développement est possible, l'égalité d'une fonction et de la somme d'une série entière sur tout un intervalle. Le seul espoir d'obtenir pour une fonction f un développement en série entière sur un intervalle ouvert I, est que f soit indéfiniment dérivable sur I, et dans ce cas, le développement de f autour d'un point a de l'intervalle I sera donné par :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \tag{6}$$

À partir de là, plusieurs cas sont possibles :

(1) La série entière (6) a un rayon de convergence nul et donc f n'est pas développable en série entière au voisinage de a.

    Exemple 1 : La série de fonctions de terme général $u_n(x) = e^{-n} sin(n^2 x)$ converge sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f indéfiniment dérivable. La série de Taylor au point 0 de cette fonction a un rayon de convergence nul.

    Exemple 2 : Le théorème de Borel affirme que si on se donne une série entière formelle, il existe une fonction f indéfiniment dérivable dont la série de Taylor en 0 soit la série entière fixée. À partir de là il est facile de montrer l'existence d'une fonction f dont la série de Taylor en 0 est $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$, qui est de rayon de convergence nul.

(2) La série entière (6) a un rayon de convergence $R > 0$, mais quel que soit le voisinage V de a inclus dans le disque de convergence, f ne coïncide pas sur V avec la somme de la série entière. Dans ce cas, f n'est pas développable non plus au voisinage de a.

Exemple : la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

est indéfiniment dérivable et toutes ses dérivées sont nulles en 0. La série de Taylor de f converge donc vers la fonction nulle sur tout intervalle, qui n'est en aucun cas f.

(3) La série entière (6) a un rayon de convergence $R > 0$ et il existe un voisinage V de a inclus dans le disque de convergence où f est la somme de la série entière. Dans ce cas f est développable en série entière au voisinage de a.

L'étude passe par l'observation du reste dans la formule de Taylor :

$$f(x) == f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

En effet, si sur un intervalle $]a-h, a+h[$ on montre que le reste

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

converge vers 0, alors f est développable en série entière sur $]a-h, a+h[$.

8.5. **Cas des dérivées positives.** Le résultat suivant est assez intéressant et mérite d'être signalé.

Théorème 8.4. *Si f est indéfiniment dérivable sur $]-a, a[$ et a toutes ses dérivées positives sur $[0, a[$, alors f est somme de sa série de Taylor sur $[0, a[$.*

Démonstration. Notons P_n le polynôme de Taylor de f en 0 à l'ordre n, et R_n le reste.

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

avec

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{n+1}(t)dt.$$

Soit $x \in [0, a[$. Fixons un d tel que $x < d < a$. On a :

$$f(d) = P_n(d) + R_n(d),$$

ce qui permet d'écrire l'encadrement grossier, compte tenu du fait que les dérivées sont ≥ 0 :

$$0 \leq R_n(d) \leq f(d).$$

Par changement de variable $u = dt/x$, on obtient :

$$0 \leq R_n(x) = \left(\frac{x}{d}\right)^{n+1} R_n(d) \leq \left(\frac{x}{d}\right)^{n+1} f(d).$$

Le terme de droite de cette double inégalité tend bien vers 0. □

Ceci s'applique notamment à la fonction $\tan(x)$ dont on peut ainsi montrer simplement qu'elle est développable en série entière autour de 0, le rayon de convergence de cette série étant $\pi/2$. Bien entendu, ce dernier résultat a une explication plus profonde. Il faut pour cela se placer dans le plan complexe. Soit f une fonction analytique au voisinage d'un point z_0. Le rayon de convergence de la série entière, développement de f au voisinage de z_0 est la distance de z_0 au plus proche point singulier (complexe) de f. En effet le cercle de convergence comporte toujours au moins un point singulier. Et il n'y a pas de point singulier à l'intérieur du disque de convergence. Si on veut appliquer ceci à la fonction tangente, on commence par montrer qu'elle est bien analytique tant que $\cos(z)$ ne s'annule pas, comme quotient de deux fonctions analytiques. Le point singulier le plus proche de 0 est le zéro de $cos(z)$ le plus proche de 0 : c'est $\pi/2$.

Cette façon de voir permet de comprendre entre autres choses, pourquoi le développement de $1/(1+x^2)$ en 0 a pour rayon de convergence 1, alors même que sur $\mathbb{R}$, la fonction f est définie partout. En fait le rayon de convergence est tributaire de ce qu'il se passe dans $\mathbb{C}$ et pas seulement dans $\mathbb{R}$.

8.6. **Retour sur la méthode de Newton.** La formule de Taylor, permet de revenir sur la méthode de Newton exposée dans la section 4.3. En appliquant alors (pourvu que les hypothèses soient remplies) la formule de Taylor à l'ordre 2, on peut montrer que dans cette méthode l'approximation est quadratique, ce qu'on avait déjà constaté dans un certain nombre de cas particuliers.

9. La formule d'Euler-Maclaurin

9.1. Un exemple à la main.

9.1.1. *Présentation du problème.* Il s'agit d'étudier la convergence de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ de terme général :

$$S_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

Puis, ayant établi la convergence de cette suite vers une limite S, nous essaierons d'évaluer la rapidité de la convergence en évaluant $S - S_n$.

9.1.2. *Convergence de la suite.* La suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est croissante. En effet :

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2},$$

donc :

$$S_{n+1} \geq S_n.$$

Considérons la courbe $(\mathcal{C})$ d'équation :

$$y = \frac{1}{x^2}.$$

La somme S_n s'interprète comme la somme des aires des triangles hachurés sur la figure 10. En considérant par ailleurs l'aire sous la courbe, on en déduit que :

$$S_n \leq 1 + \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$$

En conséquence :

$$S_n \leq 2 - \frac{1}{n} \leq 2.$$

La suite $(S_n)_{n\geq 1}$ étant croissante et majorée converge. Elle converge vers un nombre $S \leq 2$. On peut montrer que $S = \frac{\pi^2}{6}$, ce que nous admettrons ici.

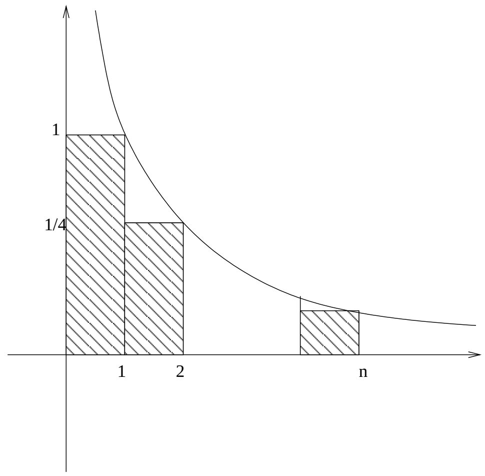

FIG. 5. Majoration

9.1.3. *Évaluation de $S - S_n$.* Posons :

$$S - S_n = R_n.$$

L'entier n étant fixé, pour tout entier m tel que $m \geq n+1$, posons :

$$R_{n,m} = \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{m^2},$$

qu'on peut encore écrire :

$$R_{n,m} = S_m - S_n.$$

L'entier n étant fixé, la suite $(R_{n,m})_{m>n}$ converge donc vers $R_n = S - S_n$. On obtient un encadrement de $R_{n,m}$ par une majoration du style de celle suggérée par la figure 5 et par une minoration telle que celle suggérée par la figure 6.

$$\int_{n+1}^{m+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \leq R_{n,m} \leq \int_n^m \frac{\mathrm{d}x}{x^2},$$

c'est-à-dire que pour tout $m > n$:

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} \leq R_{n,m} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{m},$$

et donc :

$$\frac{1}{n+1} \leq R_n \leq \frac{1}{n}.$$

Cet encadrement nous permet d'obtenir l'encadrement suivant :

$$0 \leq \frac{1}{n} - R_n \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n^2}.$$

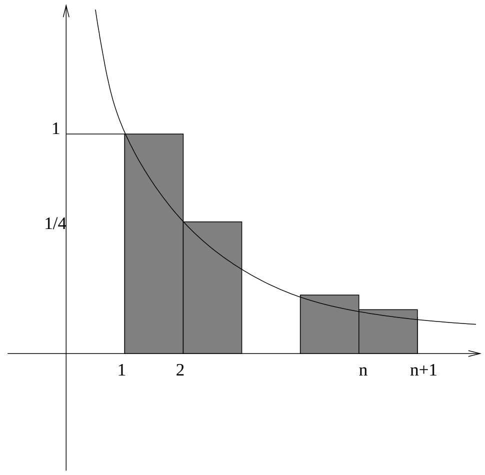

FIG. 6. Minoration

9.1.4. *Amélioration de l'évaluation de $S - S_n$.* On va évaluer plus finement la différence entre l'aire sous la courbe et l'aire des rectangles construits sur la figure 5. Pour cela notons :

$$A_k = \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} - \frac{1}{k^2}$$

et :

$$I_{n,m} = \int_{n}^{m} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$$

Alors :

$$I_{n,m} - R_{n,m} = \sum_{k=n+1}^{m} A_k,$$

et en passant à la limite sur m :

$$\frac{1}{n} - R_n = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^{m} A_k.$$

Or :

$$A_k = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k^2(k-1)},$$

ce qui nous permet de donner l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{k^3} \leq A_k \leq \frac{1}{(k-1)^3}.$$

En faisant cette fois-ci intervenir la courbe d'équation :

$$y = \frac{1}{x^3},$$

et en raisonnant sur des aires bien choisies comme dans le paragraphe précédent on obtient successivement :

$$\int_{k}^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^3} \leq A_k \leq \int_{k-2}^{k-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^3},$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right) \leq A_k \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(k-2)^2}-\frac{1}{(k-1)^2}\right),$$

et par sommation et simplification :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(m+1)^2}\right) \leq \sum_{k=n+1}^{m} A_k \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{1}{(m-1)^2}\right).$$

On en conclut par passage à la limite sur m :

$$\frac{1}{2}\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n} - R_n \leq \frac{1}{2}\frac{1}{(n-1)^2}.$$

On peut alors écrire :

$$\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{2\,n^2}-R_n\right| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right),$$

$$\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{2\,n^2}-R_n\right| \leq \frac{2}{(n-1)^3}.$$

On peut donc conclure que :

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}$$

est une bonne approximation de R_n.

Si nous analysons ce que nous avons fait :

(1) Nous avons comparé la série à une intégrale, c'est-à-dire que sur les intervalles $[k, k+1]$ nous avons d'une part l'intégrale :

$$I_{k,k+1} = \int_k^{k+1} f(t)dt,$$

(avec ici $f(x) = 1/x^2$) qui représente l'aire sous la courbe donnée par la fonction f au dessus de $[k, k+1]$, d'autre part $f(k)$ qui représente l'aire sous la marche d'escalier de hauteur $f(k)$ au dessus de $[k, k+1]$ (marche d'escalier au dessus de la courbe) ou encore éventuellemnt $f(k+1)$ qui représente l'aire de la marche d'escalier au dessous de la courbe.

(2) Nous avons cherché à évaluer la différence entre l'aire sous la courbe et l'aire sous une quelconque des deux marches (au dessus ou au dessous), c'est-à-dire :

$$I_{k,k+1} - f(k), \text{ ou si on veut } f(k+1) - I_{k,k+1}.$$

Nous avons fait cette évaluation de manière un peu artisanale. Nous allons voir maintenant, comment ce même problème peut être attaqué de manière plus systématique par la formule d'Euler-Maclaurin que nous allons exposer, en reprenant l'évaluation de la différence entre ces deux aires (mais pour f quelconque, suffisamment régulière).

9.2. **Un pas vers la formule d'Euler-Maclaurin.** Soit f une fonction de classe C^3 sur $[0,1]$. Cherchons à exprimer

$$\int_0^1 f(t)dt.$$

Pour cela on peut commencer par dire en remplaçant f par sa valeur en 0 qu'une valeur approchée de l'intégrale est $f(0)$. Étudions alors

$$W = \int_0^1 f(t)dt - f(0).$$

On est donc dans un cas tout à fait similaire à celui traité à la main. on voit que

$$W = \int_0^1 (f(t) - f(0))\,dt$$

ce qui par intégration par partie (on dérive $f(t) - f(0)$ et on intégre 1) donne

$$W = [P_1(t)\,(f(t) - f(0))]_0^1 - \int_0^1 f'(t)P_1(t)dt,$$

où $P_1(t)$ est une primitive de 1 (donc de la forme $t - a$) à bien choisir.

$$W = (1-a)\,(f(1) - f(0)) - \int_0^1 f'(t)P_1(t)dt.$$

L'intégrale qui reste dans le second membre peut à son tour être intégrée par partie en dérivant f' et en intégrant P_1. Soit $P_2(t)$ une primitive de $P_1(t)$. Choisissons $P_1(t)$ tel que $P_2(1) = P_2(0)$ ou encore

$$\int_0^1 P_1(t)dt = 0.$$

Ceci impose de prendre $a = 1/2$ ($P_1(t) = t - 1/2$). On a alors

$$W = 1/2\,(f(1) - f(0)) - P_2(0)\,(f_1'(t) - f'(0)) + \int_0^1 P_2(t)f^{(2)}(t)dt.$$

Intégrons de nouveau par partie l'intégrale qui subsiste au second membre. Notons $P_3(t)$ une primitive de $P_2(t)$ et choisissons $P_2(t)$ de telle sorte que $P_3(1) = P_3(0)$. Comme $P_1(t) = t - 1/2$ on a $P_2(t) = t^2/2 - t/2 + C$ et la condition imposée

$$\int_0^1 P_2(t)dt = 0$$

donne $C = 1/12$. Alors $P_3(t) = t^3/6 - t^2/4 + t/12 + C$, et si on impose aussi la condition

$$\int_0^1 P_3(t)dt = 0$$

alors $P_3(t) = t^3/6 - t^2/4 + t/12$. On obtient après une nouvelle intégration par partie :

$$W = 1/2\,(f(1) - f(0)) - 1/12\,(f_1'(t) - f'(0)) - \int_0^1 P_3(t)f^{(3)}(t)dt.$$

Arrêtons là le développement et écrivons en conclusion

$$\int_0^1 f(t)dt = 1/2\,(f(0) + f(1)) - 1/12\,(f'(1) - f'(0)) - \int_0^1 P_3(t)f^{(3)}(t)dt.$$

9.3. **Polynômes de Bernoulli.** Les calculs précédents mettent en évidence la suite des polynômes de Bernoulli.

Théorème 9.1. *Il existe une suite* $(Q_n)_{n\geq 0}$ *et une seule de polynômes telle que*

(1) $Q_0 = 1$
(2) $Q'_n = Q_{n-1}$, *pour* $n \geq 1$
(3) $\int_0^1 Q_n(u)du = 0$, *pour* $n \geq 1$.

Ces polynômes sont appelés **polynômes de Bernoulli**.

Démonstration. Par récurrence, Q_0 est bien défini, Q_{n-1} étant construit, la condition (2) fixe Q_n à une constante près. La condition (3) fixe cette constante. □

Compte tenu du mode de construction de ces polynômes, il est facile de voir que leurs coefficients sont rationnels.

Voici les premiers polynômes de Bernoulli :

$$Q_0 = 1 \quad Q_1 = x - \frac{1}{2} \quad Q_2 = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12}$$
$$Q_3 = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12}.$$

Proposition 9.2. *Pour* $n \geq 2$, $Q_n(1) = Q_n(0)$.

Démonstration. En effet on doit avoir $\int_0^1 Q_{n-1}(u)du = 0$. Mais comme Q_n est une primitive de Q_{n-1} on a $\int_0^1 Q_{n-1}(u)du = Q_n(1) - Q_n(0)$, d'où le résultat. □

Proposition 9.3. *Si* $n \geq 1$, $Q_n(x+1) - Q_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$.

Démonstration. On constate que l'égalité est vraie pour $n = 1$. Supposons la vraie pour n, par primitivation on obtient alors l'égalité à l'ordre $n+1$ à une constante près. Mais la proposition précédente permet de conclure à la nullité de cette constante d'intégration. □

Cette égalité permet de calculer des sommes du type $\sum_{k=1}^{p} k^n$. Par exemple si $n = 2$ on obtient

$$Q_3(p+1) - Q_3(1) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p} k^2,$$

ce qui donne

$$\sum_{k=1}^{p} k^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}.$$

Proposition 9.4. *Pour tout* $n \geq 0$, $Q_n(1-x) = (-1)^n Q_n(x)$.

Démonstration. Le résultat est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$. Supposons le résultat vrai pour $n \geq 2$. Alors par primitivation on obtient au rang $n+1$ la formule voulue à une constante d'intégration près

$$Q_{n+1}(1-x) = (-1)^{n+1}Q_{n+1}(x) + C.$$

Si $n+1$ est pair en donnant à x la valeur 0 on calcule $C = 0$.

Si $n+1$ est impair alors par primitivation

$$Q_{n+2}(1-x) = Q_{n+2}(x) + Cx + D,$$

en prenant $x = 0$ on obtient d'abord $D = 0$, puis en prenant $x = 1$ on obtient $C = 0$. □

Proposition 9.5. *Pour $n \geq 1$,*

$$Q_{2n+1}(0) = Q_{2n+1}(1/2) = Q_{2n+1}(1) = 0.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition précédente avec $x = 0$, ce qui donne $Q_{2n+1}(0) = Q_{2n+1}(1) = 0$, puis avec $x = 1/2$, ce qui donne $Q_{2n+1}(1/2) = 0$. □

En étudiant par récurrence les variations des fonctions Q_n, on pourra montrer que :

Proposition 9.6. *Pour $n \geq 1$, $Q_{2n}(0) \neq 0$ et Signe$(Q_{2n}(0)) = (-1)^{n+1}$.*

On notera

$$B_k = (-1)^{k+1}(2k)!Q_{2k}(0).$$

Ainsi les B_k (**nombres de Bernoulli**) sont des rationnels positifs. Les premiers nombres de Bernoulli sont

$$B_1 = 1/6 \quad B_2 = 1/30 \quad B_3 = 1/42 \quad B_4 = 1/30.$$

9.4. **Formule d'Euler-Maclaurin.** Soit f une fonction réelle de classe C^∞ sur $[0, 1]$.

$$f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(t)dt,$$

$$f(1) - f(0) = [Q_1(t)f'(t)]_0^1 - \int_0^1 Q_1(t)f^{(2)}(t)dt,$$

$$f(1) - f(0) = 1/2(f'(1) + f'(0)) - \int_0^1 Q_1(t)f^{(2)}(t)dt,$$

et par récurrence on montre que :

Théorème 9.7. *Soit f une fonction réelle de classe C^∞ sur $[0, 1]$. Alors pour tout $n \geq 1$:*

$$f(1) - f(0) = \frac{1}{2}\big(f'(1) + f'(0)\big) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k B_k}{(2k)!}\big(f^{(2k)}(1) - f^{(2k)}(0)\big)$$
$$- \int_0^1 Q_{2n+1}(x)f^{(2n+2)}(x)dx.$$

En particulier si on applique ce résultat à une primitive de f on obtient

$$\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}\big(f(1) + f(0)\big) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{B}{}_k(2k)!\big(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)\big)$$
$$- \int_0^1 Q_{2n+1}(x)f^{(2n+1)}(x)dx.$$

On peut appliquer le théorème 9.7 sur un intervalle $[a, b]$ au lieu de $[0, 1]$. Il suffit comme toujours de faire le changement de variable affine qui envoie a sur 0 et b sur 1 : $t = a + u(b - a)$. On obtient alors :

Théorème 9.8. *Soit f une fonction réelle de classe C^∞ sur $[a,b]$. Alors pour tout $n \geq 1$:*

$$f(b)-f(a) = \frac{b-a}{2}\big(f'(b)+f'(a)\big) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k B_k (b-a)^{2k}}{(2k)!}\big(f^{(2k)}(b)-f^{(2k)}(a)\big)$$
$$-\int_a^b Q_{2n+1}(\frac{u-a}{b-a})(b-a)^{2n-1} f^{(2n+2)}(u)du.$$

Découpons maintenant l'intervalle $[a,b]$ en q morceaux de même longueur $h = (b-a)/q$ sous la forme :

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{q-1} < a_q = b,$$

appliquons le théorème 9.8 sur chaque morceau et sommons les résultats. Nous obtenons :

Théorème 9.9. *Soit f une fonction réelle de classe C^∞ sur $[a,b]$. Soit $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{q_1} < a_q = b$ le partage de $[a,b]$ en q intervalles de même longueur $h = (b-a)/q$. Alors pour tout $n \geq 1$:*

$$f(b)-f(a) = f(a_q)-f(a_0) = \frac{h}{2}(f'(b)+f'(a)) + h\sum_{s=1}^{q-1} f'(a_s)$$
$$+\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k B_k h^{2k}}{(2k)!}\big(f^{(2k)}(b)-f^{(2k)}(a)\big)$$
$$-h^{2n-1}\int_0^h Q_{2n+1}\left(\frac{v}{h}\right)\left(\sum_{s=0}^{q-1} f^{(2n+2)}(a_s+v)\right)dv.$$

Cette dernière formule est appelée la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin car elle permet de calculer la somme :

$$\sum_{s=1}^{q-1} f'(a_s).$$

9.5. **Application à l'évaluation de restes de séries.** Considérons la série de terme général $1/n^2$. On sait que cette série converge et que :

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Écrivons la somme S sous la forme :

$$S = S_p + R_p$$

où :

$$S_p = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad R_p = \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Nous cherchons à évaluer R_p. Pour cela introduisons la fonction $f(x) = -1/x$ dont la dérivée est $f'(x) = 1/x^2$. Appliquons le théorème 9.9 à la fonction f sur l'intervalle $[p, r+1]$ (où p et r sont des entiers) avec $h = 1$ et $n = 1$. Nous obtenons successivement :

$$R_p - R_r = \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{(p+2)^2} + \cdots + \frac{1}{r^2},$$

$$R_p - R_r = \frac{1}{p} - \frac{1}{r+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{(r+1)^2}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{p^3} - \frac{1}{(r+1)^3}\right) + T_{p,r},$$

et en faisant tendre r vers $+\infty$:

$$R_p = \frac{1}{p} - \frac{1}{2p^2} + \frac{1}{6p^3} + T_p,$$

où T_p se calcule facilement en utilisant le théorème 9.9. Un calcul simple (comparaison d'une somme de série avec une intégrale) permet de voir que :

$$T_p = O\left(\frac{1}{p^4}\right),$$

ce qui donne pour R_p le développement asymptotique :

$$R_p = \frac{1}{p} - \frac{1}{2p^2} + \frac{1}{6p^3} + O\left(\frac{1}{p^4}\right).$$

9.6. **Remarque.** Dans l'étude précédente, nous avons appliqué plusieurs méthodes conjointes :

(1) tout d'abord nous sommes passé du discret au continu en comparant une série avec une intégrale ;
(2) ensuite, nous avons appliqué une méthode d'intégration par partie ou plutôt une de ses conséquences évoluées : la formule d'Euler-Maclaurin.

Si nous étions resté dans le cadre strict des séries, nous aurions pu arriver (mais c'est assez pénible) à un développement asymptotique du reste de la série de terme général $1/n^2$ en utilisant la version discrète de l'intégration par partie, c'est-à-dire la transformation d'Abel.

10. Le théorème de Weierstrass

10.1. **Présentation du problème.** Nous montrons essentiellement les deux versions suivantes du théorème de Weierstrass.

Théorème 10.1. *Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a,b]$ à valeurs complexes. Il existe une suite de polynômes qui converge uniformément vers f.*

Théorème 10.2. *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, à valeurs complexes. Il existe une suite de polynômes trigonométriques qui converge uniformément vers f.*

Nous donnons sous forme d'exercices diverses démonstrations de ces résultats. En particulier nous insistons sur l'importance de la notion de noyau positif. Nous terminons en donnant une version améliorée de ces résultats, exprimée en terme d'opérateurs positifs (Théorème de Bohman et Korovkin).

10.2. **La démonstration élémentaire d'Henri Lebesgue.**

10.2.1. *Approximation de* $|x|$.

Exercice 1 (Méthode 1) *Soit* x *un élément du segment* $[-1,1]$. *Posons* $u = 1 - x^2$, *donc* $|x| = \sqrt{1-u}$. *En conclure que la fonction* $f(x) = |x|$ *est sur* $[-1,1]$ *limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.*

Exercice 2 (Méthode 2) *Définissons une suite de fonctions polynomiales à coefficients réels par*

$$\begin{cases} P_0(x) = 0 \\ P_n(x) = P_{n-1}(x) + \frac{1}{2}\left(x - P_{n-1}^{\,2}(x)\right) \quad \textit{pour } n \geq 1 \end{cases}$$

Montrer que la suite P_n *converge uniformément sur* $[0,1]$ *vers* $\sqrt{x}$.

En conclure que $|x|$ *est sur* $[-1,1]$ *limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.*

10.2.2. *La méthode de Lebesgue.*

Exercice 3 *Soit* $C[0,1]$ *l'espace des fonctions continues sur* $[0,1]$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$, *muni de la norme uniforme. Soit* $\mathcal{A}$ *le sous espace de* $C[0,1]$ *constitué des fonctions continues affines par morceaux.*

a) *Montrer que* $\overline{\mathcal{A}} = C[0,1]$.

b) *Montrer que les fonctions constantes et les fonctions du type* $(x-a+|x-a|)$ *forment un système générateur pour* $\mathcal{A}$.

c) *Soit* $\mathcal{P}$ *le sous espace des fonctions polynomiales de* $[0,1]$ *dans* $\mathbb{R}$. *Montrer que* $\overline{\mathcal{P}} = C[0,1]$

d) *Soit* $[a,b]$ *un intervalle fermé borné de* $\mathbb{R}$, *montrer que tout élément de* $C[a,b]$ *(espace des fonctions continues de* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{R}$*) est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.*

e) *Démontrer un résultat analogue pour* $C_{\mathbb{C}}[a,b]$, *espace des fonctions continues de* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{C}$.

10.3. **Les noyaux positifs.**

Exercice 4 *Soit*

$$I_\delta(x) = \{y \mid 0 \leq y \leq 1 \textit{ et } |x-y| \geq \delta\}$$

Soit $(K_n)_n$ *une suite de fonctions de deux variables réelles à valeurs réelles telles que*

a) *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *on a*

$$\int_0^1 K_n(x,y)dy = 1 \quad n = 1, 2, \cdots$$

b) *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *on a*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{I_\delta(x)} K_n(x,y)dy = 0 \quad \delta > 0$$

c) *Les* K_n *sont positifs,*

$$K_n(x,y) \geq 0 \quad n = 1, 2, \cdots$$

Soit f *une fonction continue à valeurs complexes sur* $[0,1]$. *Définissons*

$$A_n(f)(x) = \int_0^1 K_n(x,y)f(y)dy.$$

Montrer que pour tout $x \in [0,1]$,

$$\lim_{n\to\infty} A_n(f)(x) = f(x)$$

et que si dans l'hypothèse b) la convergence est uniforme par rapport à x *alors* $A_n(f)$ *converge uniformément vers* f.

Exercice 5 *Soit* $[a,b]$ *un segment tel que* $a < 0 < b$. *On considère une suite* $(\phi_n)_n$ *de fonctions réelles intégrables sur* $[a,b]$ *satisfaisant à*

a) *Pour tout entier* $n > 0$ *on a*

$$\int_a^b \phi_n(t)dt = 1$$

b) *Pour tout* $\eta > 0$ *tel que* $[-\eta,\eta] \subset [a,b]$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^{-\eta} \phi_n(t)dt + \int_\eta^a \phi_n(t)dt\right) = 0$$

c) *Pour tout entier* $n > 0$ *on a*

$$\phi_n \geq 0.$$

Etant donnée une fonction f *continue sur* $\mathbb{R}$ *on pose*

$$\phi_n \star f(x) = \int_a^b f(x-t)\phi_n(t)dt.$$

Montrer que la suite $(\phi_n \star f)_n$ *converge uniformément vers* f *sur tout compact.*

Exercice 6 *Soit* f *une fonction continue périodique de période* 2π. *On pose*

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt,$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt,$$

puis

$$S_n(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)),$$

et

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f)(x).$$

Montrer que

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}dt$$

et que

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{n\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x+2t)\left(\frac{\sin(nt)}{\sin(t)}\right)^2 dt.$$

Montrer que $\sigma_n(f)(x)$ *converge uniformément vers* $f(x)$ *(théorème de Fejér).*

Exercice 7 *Posons (noyau de Landau)*

$$Q_n(x) = \begin{cases} c_n(1-x^2)^n & si \ -1 \le x \le 1 \\ 0 & si \ x > 1 \ ou \ x < -1 \end{cases}$$

où c_n est choisi de telle sorte que

$$\int_{-1}^{1} Q_n(x)dx = 1.$$

Montrer que si $x \in [0,1]$ alors

$$(1-x^2)^n \ge 1 - nx^2,$$

puis que

$$c_n \le \sqrt{n}.$$

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. Étudier

$$Q_n \star f(x) = \int_0^1 f(t)Q_n(x-t)dt$$

où $x \in [0,1]$. En conclure le théorème de Weierstrass.

Exercice 8 *Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Posons (polynômes de Bernstein)*

$$B_n(f)(x) = \sum_{p=0}^{n} C_n^p f\left(\frac{p}{n}\right)(1-x)^{n-p}x^p.$$

On se propose de montrer que la suite $(B_n(f))_{n\ge 1}$ converge uniformément vers f.

a) Posons $r_p(x) = C_n^p(1-x)^{n-p}x^p$, montrer que

$$\sum_{p=0}^{n} r_p(x) = 1,$$

$$\sum_{p=0}^{n} p r_p(x) = nx,$$

$$\sum_{p=0}^{n} p(p-1)r_p(x) = n(n-1)x^2.$$

(On pourra utiliser le développement de $(x+y)^n$).

b) Calculer

$$\sum_{p=0}^{n} (p-nx)^2 r_p(x).$$

c) On sait que $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ t.q. $|x - x'| \le \delta$ implique $|f(x) - f(x')| \le \epsilon$.
On étudiera alors la somme

$$\sum_{p=0}^{n} \left(f(x) - f\left(\frac{p}{n}\right)\right) r_p(x)$$

en la décomposant en deux suivant que $|p - nx| \le \delta n$ ou que $|p - nx| > \delta n$ et on conclura.

10.4. **Les opérateurs positifs.**

Exercice 9 *Soit K un espace topologique compact et $C(K)$ l'espace des fonctions continues sur K à valeurs réelles normé par*

$$\|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

Soit T un opérateur linéaire de $C(K)$ dans lui même tel que

$$\forall f \in C(K),\ f > 0 \Longrightarrow T(f) \geq 0.$$

On dit alors que T est un opérateur positif.
Montrer que T est un opérateur continu et que

$$\|T\| = \|1_K\|,$$

où 1_K est la fonction constante valant 1 sur K.

Exercice 10 *Soit B_n l'opérateur de $C[0,1]$ dans lui même défini par*

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Calculer $\|B_n\|$.

Exercice 11 *Soit f une fonction continue périodique de période 2π. On reprend les notations de l'exercice 6. La fonction f peut être considérée comme élément de $C^\star = C(T)$ où T est le tore $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$. On définit donc sur $C^\star$ l'opérateur S_n par*

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t-x) dt$$

avec

$$D_n(t) = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

(noyau de Dirichlet)
et l'opérateur σ_n par

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_n(t-x) dt$$

avec

$$K_n(t) = \frac{1}{2n} \left(\frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right)^2$$

a) Montrer que σ_n est un opérateur positif et que $\|\sigma_n\| = 1$.

b) Montrer que pour tout n, S_n n'est pas un opérateur positif. Montrer que

$$\|S_n\| = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt = \frac{4}{\pi^2} \log(n) + O(1).$$

Un nombre x étant fixé, calculer la norme de la forme linéaire S_n^x sur $C^\star$ définie par

$$S_n^x(f) = S_n(f)(x).$$

Exercice 12 *(Théorème de Bohman et Korovkin)*

Soit K un espace topologique compact possédant au moins deux points et $C(K)$ l'espace des fonctions continues sur K à valeurs réelles normé par

$$\|f\| = \sup_{x\in K} |f(x)|.$$

Soient $f_1, f_2, \cdots, f_m$ des éléments de $C(K)$ vérifiant la propriété

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \textit{Il existe } m \textit{ fonctions continues réelles} \\ a_1, a_2, \cdots, a_m \textit{ définies sur } K, \textit{ telles que la fonction} \\ Q(x,y) = \sum_{i=1}^m a_i(y) f_i(x) \textit{ satisfasse à} \\ \\ \qquad a) Q(x,y) \geq 0 \\ \qquad b) Q(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y. \end{array} \right.$$

Soit L_n une suite d'opérateurs positifs de $C(K)$ dans lui-même vérifiant :

pour tout $i (i = 1, \cdots, n)$ la suite $(L_n(f_i))_n$ converge vers f_i dans $C(K)$.

Le but du problème est de démontrer que dans ces conditions pour toute fonction $f \in C(K)$ la suite $(L_n(f))_n$ converge vers f.

Partie I. *Soit E le sous-espace vectoriel de $C(K)$ engendré par $f_1, f_2, \cdots, f_m$.*

a) Montrer que si $f \in E$ la suite $(L_n(f))_n$ converge vers f.

b) Montrer qu'il existe $g \in E$ tel que pour tout $x \in K$ on ait $g(x) > 0$.

Soit y fixé dans K. On note Q_y la fonction définie par $Q_y(x) = Q(x,y)$. On note ϕ_n la fonction définie par $\phi_n(y) = L_n(Q_y)(y)$.

c) Montrer que la suite $(\phi_n)_n$ converge uniformément vers 0.

d) Montrer qu'il existe $M_0 > 0$ tel que pour tout n on ait $\|L_n(1_K)\| \leq M_0$ où 1_K est la fonction constante valant 1.

Partie II. *Soit F un élément de $C(K \times K)$. Si $y \in K$ notons F_y la fonction définie par $F_y(x) = F(x,y)$. Supposons en outre que $F(x,x) = 0$ pour tout $x \in K$.*

a) Soit $\epsilon > 0$ montrer qu'il existe un compact $A \subset K \times K$ tel que

$$(x,y) \notin A \Longrightarrow |F(x,y)| \leq \epsilon,$$
$$m = \inf_{(x,y)\in A} Q(x,y) > 0.$$

Notons alors

$$M = \sup_{(x,y)\in A} |F(x,y)|.$$

b) Montrer que pour tout couple $(x,y) \in K \times K$ on a

$$|F(x,y)| \leq \epsilon + \frac{M}{m} Q(x,y).$$

c) En conclure qu'il existe un entier N tel que $\forall n \geq N, \forall y \in K$ on ait

$$|L_n(F_y)(y)| \leq (M_0+1)\epsilon.$$

Partie III. *Soit f un élément de $C(k)$. On pose*

$$F(x,y) = f(x) - \frac{f(y)}{g(y)}g(x).$$

En utilisant les résultats précédents, montrer que la suite $(L_n(f))_n$ converge vers f.

Applications.

a) On prend $K = [0,1]$, $m = 3$, $f_1 = 1_K$, $f_2 = x$, $f_3 = x^2$. on vérifiera avec $Q(x,y) = (y-x)^2$ que ce système satisfait bien à la condition (1). On prend $L_n = B_n$ (opérateur de Bernstein). Retrouver ainsi les résultats de l'exercice 8.

b) On prend $K = T = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$, $m = 3$, $f_1 = 1_K$, $f_2 = \cos(x)$, $f_3 = \sin(x)$. On vérifiera avec $Q(x,y) = 1-\cos(x-y)$ que ce système satisfait bien à la condition (1). On prend $L_n = \sigma_n$ (opérateur de Fejér). Retrouver ainsi les résultats de l'exercice 6.

11. Interpolation de Lagrange

11.1. **Introduction au problème.** L'**interpolation** est un sujet très vaste lié aux questions d'**approximation** des fonctions. Très grossièrement il s'agit de trouver dans une classe fixée de fonctions (par exemple les fonctions polynomiales) un élément réalisant un certain nombre de contraintes. Souvent ces contraintes sont liées à la donnée d'une fonction f qu'on cherche à approcher par un procédé d'interpolation (par exemple la fonction cherchée doit prendre la même valeur que f en des points donnés). On se trouve alors confronté à plusieurs problèmes de natures différentes. Tout d'abord un problème algébrique, celui de trouver le ou les éléments de la classe choisie qui réalise les contraintes. Ensuite un problème d'approximation qui consiste lorsqu'on est parti d'une fonction f à mesurer la qualité de l'approximation théorique obtenue. Enfin un problème algorithmique, celui de déterminer un algorithme performant qui permette de calculer facilement et de manière aussi exacte que possible la ou les solutions.

11.2. **Partie d'algèbre linéaire pure : l'interpolation.** Soient $x_0, x_1, ..., x_n$ des nombres complexes distincts et $y_0, y_1, ..., y_n$ des nombres complexes. Il s'agit de trouver un polynôme $P(X)$ vérifiant $P(x_k) = y_k$ pour toutes les valeurs de k comprises entre 0 et n.

11.3. **L'aspect algébrique.**
Existence de solutions. Notons $\mathbb{C}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients complexes et $\mathbb{C}_n[X]$ le sous espace des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n. Considérons alors l'application linéaire T de $\mathbb{C}[X]$ dans $\mathbb{C}^{n+1}$ qui à un polynôme $P(X)$ fait correspondre $(P(x_0), P(x_1), ..., P(x_n))$. On voit que le noyau $Ker(T)$ de l'application T est l'espace constitué des multiples du polynôme $N(X) = (X-x_0)(X-x_1)...(X-x_n)$ et qu'on peut écrire

$$\mathbb{C}[X] = \mathbb{C}_n[X] \bigoplus Ker(T).$$

Ceci nous montre que la restriction de T à $\mathbb{C}_n[X]$ est une bijection de $\mathbb{C}_n[X]$ sur $\mathbb{C}^{n+1}$.

Le résultat obtenu est donc le suivant

Théorème 11.1. *Pour tout élément* $(y_0, y_1, ..., y_n)$ *de* $\mathbb{C}^{n+1}$ *il existe un polynôme* $P(X)$ *de degré* $\leq n$ *et un seul (polynôme d'interpolation de Lagrange) tel que* $P(x_k) = y_k$ $(0 \leq k \leq n)$. *Tout polynôme* $Q(X)$ *(de degré quelconque) vérifiant aussi* $Q(x_k) = y_k$ $(0 \leq k \leq n)$ *s'écrit sous la forme*

$$Q(X) = P(X) + K(X)N(X).$$

Ecriture sous la forme naturelle (base des monômes). Si on cherche à trouver explicitement le polynôme de Lagrange écrit sous la forme habituelle $P(X) = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$ on est amené à résoudre le système de $n+1$ équations en les $n+1$ inconnues $a_0, ..., a_n$

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_0 + a_1x_0 + ... + a_nx_0^n & = & y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + ... + a_nx_1^n & = & y_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ a_0 + a_1x_n + ... + a_nx_n^n & = & y_n. \end{array}\right.$$

Ce système est un système de **Vandermonde** dont on sait bien sûr qu'il admet une solution unique. Nous fournirons ultérieurement un algorithme pour résoudre ce système plus rapidement que ne le ferait une méthode classique comme la méthode du pivot par exemple.
Ecriture sous forme de Lagrange. Ainsi le calcul des coefficients a_i du polynôme cherché se ramène à la résolution d'un système de Vandermonde. Sans être très compliqué ceci n'est cependant pas immédiat. Or il peut se faire qu'on n'ait pas absolument besoin des coefficients a_i et qu'on puisse se satisfaire d'exprimer le polynôme d'interpolation dans une base mieux adaptée que la classique base des monômes. Dans cet ordre d'idée, introduisons les $n+1$ polynômes $L_k(X)$ (où $0 \leq k \leq n$) qui vérifient

$$\left\{\begin{array}{lcl} L_k(x_k) & = & 1 \\ L_k(x_j) & = & 0 \quad (j \neq k). \end{array}\right.$$

D'après l'étude qui précède le polynôme $L_k(X)$ existe et est unique. On vérifie aisément que $L_k(X)$ s'écrit explicitement sous la forme

$$L_k(X) = \frac{(X - x_0)...(X - x_{k-1})(X - x_{k+1})...(X - x_n)}{(x_k - x_0)...(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})...(x_k - x_n)}.$$

Ces polynômes forment une base de $\mathbb{C}_n[X]$ et le polynôme d'interpolation s'exprime dans cette base

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(X).$$

Il est intéressant de remarquer que le polynôme $L_k(X)$ s'écrit aussi

$$L_k(X) = \frac{N(X)}{(X - x_k)N'(x_k)}$$

où $N(X) = (X - x_0)(X - x_1)...(X - x_n)$.

Ecriture sous la forme de Newton. L'inconvénient des polynômes $L_k(X)$ est que chacun d'eux fait intervenir tous les points d'interpolation et donc si on rajoute un nouveau point tout calcul fait à partir des polynômes $L_k(X)$ doit être entièrement refait.

Prenons alors les polynômes $N_k(X) = (X-x_0)(X-x_1)...(X-x_{k-1})$ où $0 \leq k \leq n$ (avec $N_0 = 1$). Ces polynômes forment aussi une base de $\mathbb{C}_n[X]$ et le polynôme d'interpolation se décompose sur cette base sous la **forme de Newton**

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} b_k N_k(X).$$

Le problème est alors de calculer les coefficients b_k. Pour ce faire définissons les différences divisées successives des valeurs y_i par rapport aux points x_i

$$[y_0] = y_0$$

$$[y_0, y_1, ..., y_k] = \frac{[y_1, ..., y_k] - [y_0, ..., y_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

Théorème 11.2. *Les coefficients de la décomposition du polynôme d' interpolation de Lagrange de degré n dans la base de Newton sont donnés par*

$$b_k = [y_0, y_1, ..., y_k]$$

où

$$0 \leq k \leq n.$$

Preuve. La formule à démontrer est clairement vraie si on a $n = 0$. Supposons la formule vraie pour les polynômes de degré $n-1$ interpolant en n points. Soit alors $P_{n-1}(X)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points $x_0, x_1, ..., x_{n-1}$ et aux valeurs $y_0, y_1, ..., y_{n-1}$, $Q_{n-1}(X)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points $x_1, x_2, ..., x_n$ et aux valeurs $y_1, y_2, ..., y_n$ et

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} b_k N_k(X)$$

le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points $x_0, x_1, ..., x_n$ et aux valeurs $y_0, y_1, ..., y_n$. Il est facile de voir que

$$P_{n-1}(X) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k N_k(X)$$

si bien qu'il reste simplement en vertu de l'hypothèse de récurrence à établir la formule pour le coefficient b_n.

Pour cela définissons

$$\tilde{P}_n(X) = \frac{(X - x_0)Q_{n-1}(X) - (X - x_n)P_{n-1}(X)}{x_n - x_0}.$$

On vérifie que

$$\tilde{P}_n(x_i) = y_i$$

pour $0 \leq i \leq n$. Donc

$$\tilde{P}_n(X) = P(X).$$

En égalant les coefficients du terme de degré n dans l'expression des polynômes P_n et $\tilde{P}_n$ on obtient la relation cherchée.

En comparant l'expression de Newton du polynôme P_k d'interpolation en $k+1$ points avec celle de Lagrange on trouve en regardant les coefficients des termes de degré k

$$[y_0, y_1, ..., y_k] = \sum_{j=0}^{k} \frac{y_j}{N'_{k+1}(x_j)}.$$

Il est clair dans cette représentation que le rajout d'un nouveau point ne fait que rajouter un nouveau terme au polynôme, les autres termes restant identiques.

11.4. **L'aspect algorithmique.**

Le calcul des différences divisées. L'algorithme des différences divisées est très simple. Il utilise l'écriture du polynôme d'interpolation sous la forme de Newton. Les coefficients sont alors calculés par la formule de récurrence établie précédemment

$$\begin{aligned} [y_0] &= y_0 \\ [y_0, y_1, ..., y_k] &= \frac{[y_1, ..., y_k] - [y_0, ..., y_{k-1}]}{x_k - x_0}. \end{aligned}$$

si bien que le calcul se fait conformément à la figure 7.

Le nombre d'opérations à effectuer est en $O(n^2)$.

$$\begin{tikzcd}
{[y_0]} \arrow[dr] & & & \\
& {[y_0, y_1]} \arrow[dr] & & \\
{[y_1]} \arrow[ur] \arrow[dr] & & {[y_0, y_1, y_2]} \arrow[dr] & \\
& {[y_1, y_2]} \arrow[ur] \arrow[dr] & & {[y_0, y_1, y_2, y_3]} \\
{[y_2]} \arrow[ur] \arrow[dr] & & {[y_1, y_2, y_3]} \arrow[ur] & \\
& {[y_2, y_3]} \arrow[ur] & & \\
{[y_3]} \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

FIG. 7. Le calcul des différences divisées

Résolution d'un système de Vandermonde. Nous avons vu que le calcul effectif des coefficients du polynôme d'interpolation de Lagrange dans la base naturelle des monômes passe par la résolution d'un système de Vandermonde. Voici un algorithme qui permet de résoudre un tel système. Cet algorithme est basé en fait sur l'algorithme de Hörner pour l'évaluation de polynômes. Il est plus rapide que les algorithmes directs de résolution des systèmes linéaires généraux comme la méthode du pivot de Gauss ou la méthode de Householder qui sont en $O(n^3)$ alors que nous obtenons ici un algorithme en $O(n^2)$.

Soit N un entier ≥ 2. Etant donné $x = (x_1, x_2, ..., x_N)$ un N-uplet de réels deux à deux distincts on note B la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_N \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_N^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{N-1} & x_2^{N-1} & \cdots & x_N^{N-1} \end{pmatrix}$$

On cherche à résoudre le système

$$BW = Q$$

où Q est la matrice colonne constituée des seconds membres $q_1, q_2, \cdots, q_N$ du système et où W est la matrice colonne constituée des inconnues $w_1, w_2, \cdots, w_N$ du système.

Pour tout entier j vérifiant $1 \leq j \leq N$ on pose

$$P_j(x) = \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq j}}^{N} \frac{x - x_n}{x_j - x_n}.$$

P_j est donc un polynôme en x de degré $N - 1$ qui peut s'écrire

$$P_j(x) = \sum_{k=1}^{N} A_{j,k} x^{k-1}$$

En effectuant le produit de la matrice $A = (A_{j,k})_{j,k}$ par la matrice B on constate que

$$AB = (P_j(x_k))_{j,k}$$

ce qui prouve que A est l'inverse de B.

On peut alors écrire que W=AQ. On obtient ainsi les formules

$$w_j = \sum_{k=1}^{N} A_{j,k} q_k.$$

Nous allons dans la suite mettre en place une méthode de résolution qui calcule les coefficients des polynômes P_j, donc qui calcule l'inverse de la matrice B.Pour calculer les coefficients de P_j on sera amené à calculer les coefficients de

$$N_j(x) = \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq j}}^{N} (x - x_n)$$

et aussi le dénominateur intervenant dans la formule qui définit P_j, c'est à dire le nombre $N_j(x_j)$.

Posons

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_N)$$

$P(x)$ est donc un polynôme de degré N qui s'écrit sous la forme :

$$P(x) = x^N + c_N x^{N-1} + ... + c_2 x + c_1$$

Montrons tout d'abord comment si on connaît les coefficients c_j on peut calculer les coefficients du polynôme

$$N_j(x) = \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq j}}^{N} (x - x_n)$$

Pour cela posons

$$N_j(x) = b_N x^{N-1} + ... + b_2 x + b_1$$

On vérifie immédiatement sur l'expression de $N_j(x)$ que le coefficient du terme de plus haut degré est 1. En remarquant que $P(x) = N_j(x)(x - x_j)$ on établit la formule

$$b_{k-1} = c_k + x_j b_k.$$

Si bien que

$$\begin{cases} b_N = 1 \\ b_{k-1} = c_k + x_j b_k \end{cases}$$

Connaissant les coefficients de N_j il est alors facile de calculer le dénominateur $N_j(x_j)$ intervenant dans la définition de P_j.

En effet posons $t_N = b_N = 1$ et définissons pour tout $k \leq N$

$$t_{k-1} = x_j t_k + b_{k-1}$$

On constate alors que $t_1 = N_j(x_j)$, le calcul proposé pour $N_j(x_j)$ n'étant rien d' autre que l'algorithme de Horner.

Il reste maintenant à calculer les coefficients c_j de P.

Pour tout entier k vérifiant $1 \leq k \leq N$ on définit

$$Q_k(x) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_k)$$

et on écrit Q_k sous la forme

$$Q_k(x) = x^k + \alpha_{k,k} x^{k-1} + \alpha_{k,k-1} x^{k-2} + ... + \alpha_{k,1}$$

Il est facile de voir sur l'expression de $Q_1(x) = x - x_1$ que $\alpha_{1,1} = -x_1$.

De la formule

$$Q_k(x) = Q_{k-1}(x)(x - x_k).$$

découlent pour $k = 2, 3, ..., N$ les formules

$$\alpha_{k,k} = \alpha_{k-1,k-1} - x_k$$

$$\alpha_{k,j} = \alpha_{k-1,j-1} - x_k \alpha_{k-1,j} \quad j = k-1, ..., 2$$

ce qui achève l'algorithme.

On peut voir que le nombre d'opérations à faire dans cet algorithme est en $O(N^2)$, la partie la plus coûteuse étant le calcul des coefficients c_k.

11.5. **Partie approximation.**

11.5.1. *Un exemple.* On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0,6]$ par l'équation :

$$y = f(x) = 6\left(\sin\left(\frac{\pi(x-3)}{6}\right) + 1\right). \tag{7}$$

Remarque : Cette fonction peut représenter l'élévation du niveau de la mer pour une marée en fonction du temps. La variable x est alors l'heure marée (1/6 du temps de passage de la basse mer à la haute mer) tandis que y représente le nombre de $1/12^{\mathrm{e}}$ (1/12 de la différence de niveau exprimé en mètre entre la haute mer et la basse mer). Nous allons chercher un polynôme qui approche cette fonction sinus sur cet intervalle. Le point d'inflexion nous donne à penser qu'il faut tenter une cubique pour être « dans la forme ».

Nous allons donc chercher le polynôme d'interpolation P de degré ≤ 3 tel que :
- P(0)=f(0)=0 ;
- P(3)=f(3)=6 ;
- P(6)=f(6)=12 ;
- P'(0)=f'(0)=0.

Les conditions $P(0) = 0$ et $P'(0) = 0$ imposent que :

$$P(x) = x^2(ax + b).$$

Les deux autres conditions donnent respectivement :

$$9a + 3b = 2,$$

$$18a + 3b = 1,$$

d'où :

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{9} \\ b = 1 \end{cases}$$

Le polynôme cherché est donc :

$$P(x) = -\frac{1}{9}x^3 + x^2.$$

Nous avons représenté le graphe de P sur la figure 8.

11.5.2. *Qualité des approximations.* Afin d'évaluer la précision des deux approximations $g(x)$ et $P(x)$ de la fonction $f(x)$, nous allons majorer les quantités :

$$\sup_{x\in[0,6]} |f(x) - g(x)|$$

et

$$\sup_{x\in[0,6]} |f(x) - P(x)|,$$

c'est-à-dire les normes uniformes $||f - g||_\infty$ et $||f - P||_\infty$ sur l'intervalle $[0,6]$. (Les meilleures majorations seront primées !)

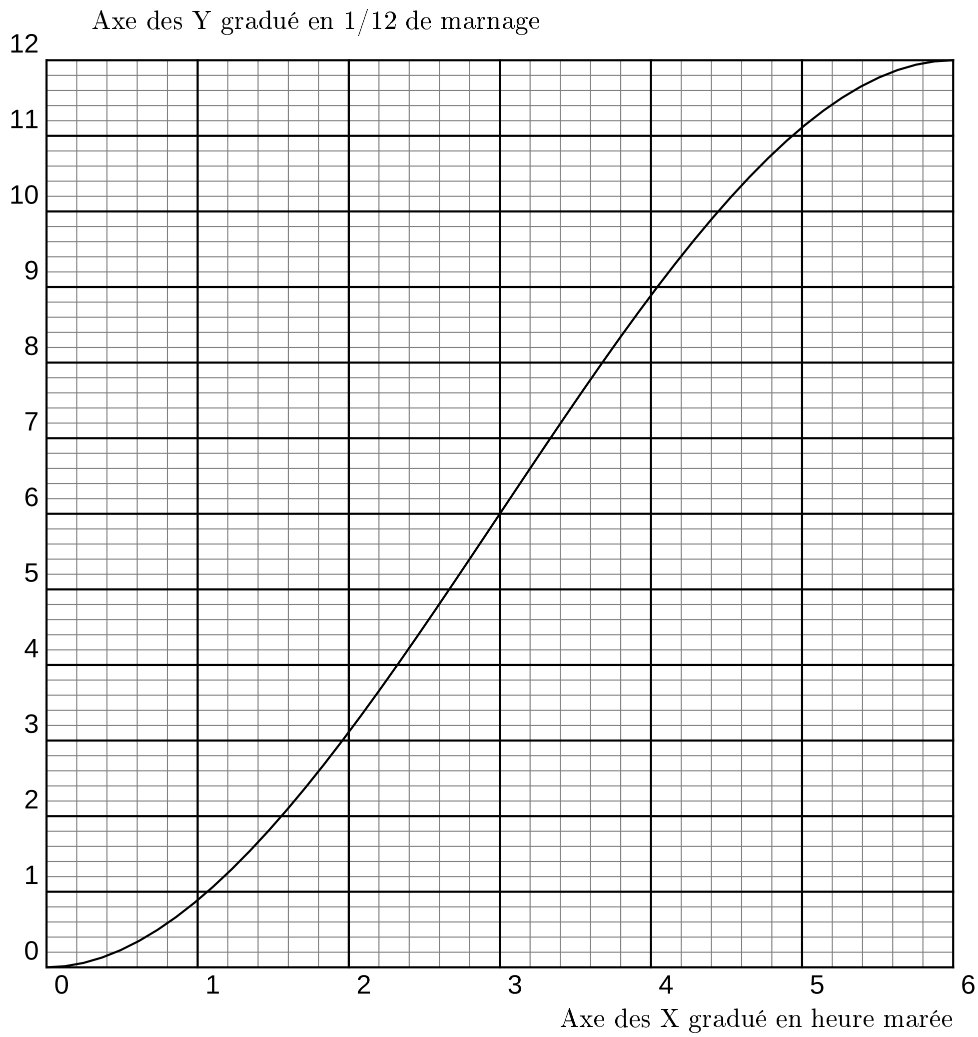

FIG. 8. Approximation cubique

11.5.3. *Un outil fondamental : le théorème de division des fonctions différentiables.*

Théorème 11.3. *Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ de classe C^{p+1}, où p est un entier naturel. On suppose que f s'annule en un point a de $\mathbb{R}$. Alors il existe une unique fonction continue $g(x)$ telle que :*

$$f(x) = (x-a)g(x).$$

Cette fonction g est de classe C^p et pour tout $0 \leq q \leq p$:

$$|g^{(q)}(x)| \leq \frac{1}{q+1} \sup_{t\in[a,x]} |f^{(q+1)}(t)|. \tag{8}$$

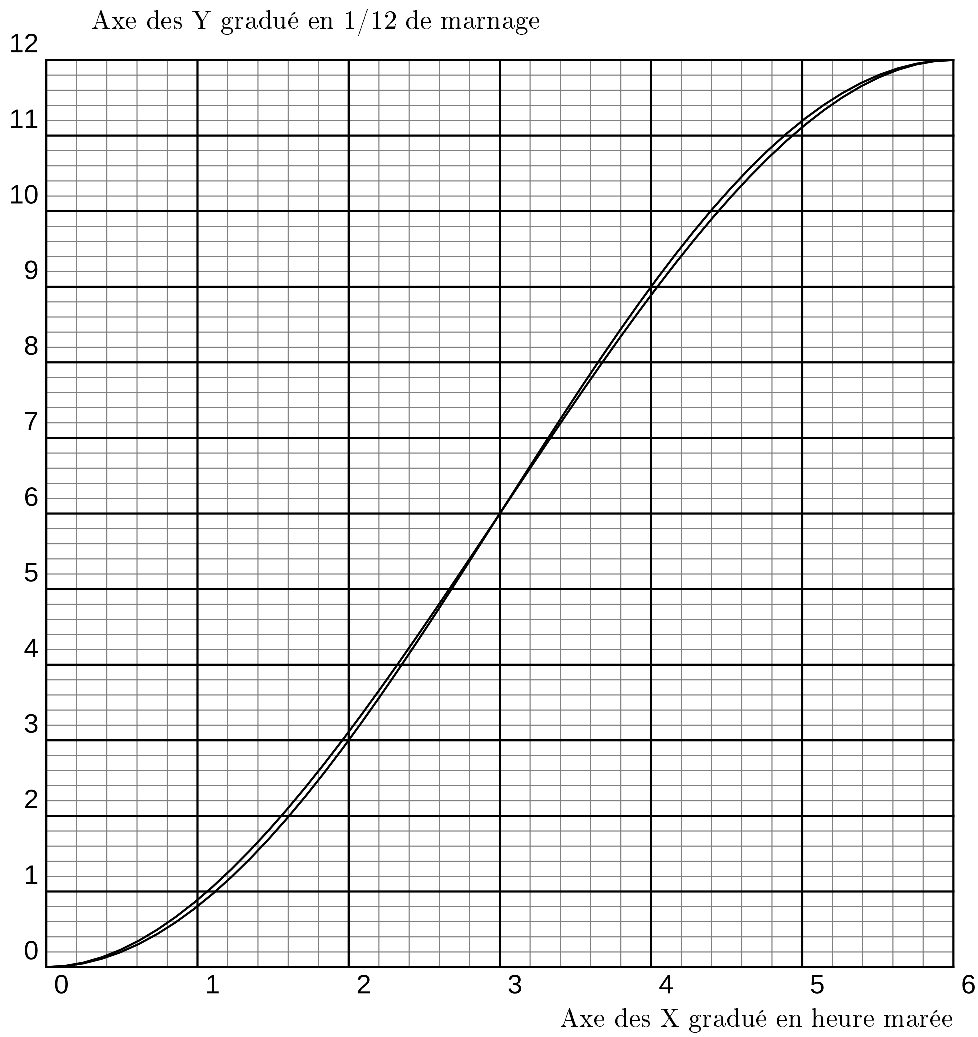

FIG. 9. Comparaison entre le sinus et la cubique

Démonstration. La fonction g est nécessairement définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x-a} & \text{si } x \neq a, \\ f'(a) & \text{si } x = a. \end{cases} \tag{9}$$

On constate en distinguant le cas où $x = a$ de celui où $x \neq a$ que :

$$g(x) = \int_0^1 f'(a + (x-a)u)du.$$

Sous cette dernière forme, d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, on voit que la fonction $g(x)$ est de classe C^p et que pour tout $0 \leq q \leq p$

$$g^{(q)}(x) = \int_0^1 u^q f^{(q+1)}(a + (x-a)u)du,$$

ce qui nous donne la formule (8). □

11.5.4. *Majoration de l'erreur dans une interpolation.* Soit f une fonction de classe C^{n+1}, P le polynôme d'interpolation de Lagrange qui prend les mêmes valeurs que f aux points $x_0, x_1, ..., x_n$ et I un intervalle compact contenant $x, x_0, x_1, ..., x_n$. Appliquons alors le théorème 11.3 à $f(x) - P(x)$. On obtient

$$f(x) - P(x) = (x - x_0)g_0(x)$$

avec

$$|g_0^{(n)}(x)| \leq \frac{1}{n+1} \sup_{t \in I} |f^{(n+1)}(t)|$$

(ne pas oublier que $P^{(n+1)}(x) = 0$), puis

$$g_0(x) = (x - x_1)g_1(x)$$

avec

$$|g_1^{(n-1)}(x)| \leq \frac{1}{n} \sup_{t \in I} |g_0^{(n)}(t)|,$$

et ainsi de suite. Si bien que :

$$(10) \qquad |f(x) - P(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} |(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)| \sup_{t \in I} |f^{(n+1)}(t)|.$$

Remarque 11.4. *Cette démonstration permet d'établir de la même façon une majoration dans le cas d'une interpolation de Lagrange-Sylvester.*

11.5.5. *Les majorations.* Si on ne regarde pas de plus près, on pourrait croire que nous avons fait une interpolation de Lagrange-Sylvester par un polynôme de degré 3 sous les conditions d'interpolation :

$$P(0) = f(0) \quad P(3) = f(3) \quad P(6) = f(6) \quad P'(0) = f'(0).$$

Mais en fait on constate qu'avec ce même polynôme de degré 3 on a aussi $P'(6) = f'(6)$. Donc on a effectué en fait une interpolation de degré 4, dont le coefficient du terme de plus haut degré est nul. On peut donc appliquer la majoration (10) et la remarque 11.4 à cet ordre et on obtient :

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{1}{5!} |x^2(x-3)(x-6)^2| \sup_{t \in [0,6]} |f^{(5)}(t)|.$$

Ceci nous donne :

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{1}{120} \times 6 \times \left(\frac{\pi}{6}\right)^5 |x^2(x-3)(x-6)^2|,$$

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{1}{120} \times 6 \times \frac{1}{25} |x^2(x-3)(x-6)^2|.$$

Pour étudier la borne supérieure de la fonction $|x^2(x-3)(x-6)^2|$ qui est symétrique par rapport à $x = 3$, il suffit de chercher son maximum sur $[0, 3]$. Sur cet intervalle cette fonction est $x^2(3-x)(x-6)^2$ et sa dérivée s'annule pour 0 et $\frac{15-3\sqrt{5}}{5}$. Le maximun est atteint en $\frac{15-3\sqrt{5}}{5}$ et est majoré par 70. En conséquence :

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{1}{120} \times 6 \times \frac{1}{25} \times 70,$$

$$|f(x) - P(x)| \leq 0.14$$

Remarque 11.5. *Un calcul à la machine montre qu'il semble que le maximum soit proche de* 0.12 *(pour* $x \approx 1.7$*).*