THÉORÈME DE BAIRE ET APPLICATIONS À L'ANALYSE FONCTIONNELLE

par

Robert Rolland

Résumé. — On rapppelle le théorème de Baire et ses applications aux théorèmes de base de la géométrie des espaces de Banach.

Table des matières

1. Introduction

Une lacune importante de l'intégration au sens de Cauchy, et qui persiste avec l'intégrale de Riemann, est que la classe des fonctions intégrables n'est pas stable par passage à la limite simple. René Baire (1874 - 1932) a étudié quelles classes de fonctions pouvaient être obtenues, en partant de l'espace des fonctions continues, par des passages successifs à la limite simple. Plus précisément, si on part des fonctions continues et qu'on prend l'espace des fonctions qui sont limites simples de suites de fonctions continues, on trouve une classe un peu plus grande $\mathcal{B}_1$ appelée première classe de Baire. Si on considère l'espace des fonctions qui sont limites simples de suites de fonctions de $\mathcal{B}_1$ on tombe sur une classe encore plus grande, la deuxième classe de Baire. On définit ainsi les classes $\mathcal{B}_n$. On peut penser que si on considère $\cup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{B}_n$, on obtient une classe stable par passage à la limite simple. Mais cela est faux, il faut encore continuer et donc travailler sur les ordinaux. Lors de cette étude que Baire a mené à son terme, et qui aboutit à la constructions de toutes les fonctions boreliennes par une récurrence transfinie, il a eu besoin de nombreux résultats, dont celui qu'on appelle maintenant le théorème de Baire, qu'il donne comme un simple lemme dans son travail. Ce théorème est maintenant à la base de quelques outils parmis les plus importants de l'analyse fonctionnelle.

2. Le théorème de Baire

Nous allons nous placer dans un espace métrique complet $\mathcal{R}$ dont nous notons d la distance. On rappelle que le diamètre $\delta(A)$ d'une partie A de $\mathcal{R}$ est l'élément de $\overline{\mathbb{R}^+}$ défini par

$$\delta(A) = \sup_{x,y \in A} d(x,y).$$

On notera $\mathring{A}$ l'intérieur de A et $\overline{A}$ l'adhérence de A.

Le théorème de Baire repose sur le lemme suivant

Lemme 2.1. — *Soit $\mathcal{R}$ un espace métrique complet et $(K_n)_{n\geq 1}$ une suite décroissante de fermés non vides de $\mathcal{R}$, telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} \delta(K_n) = 0.$$

Alors l'intersection des K_n est réduite à un point :

$$\cap_{n=1}^{+\infty} K_n = \{a\}.$$

Démonstration. — Pour tout n choisissons un point $x_n \in K_n$. La suite $(x_n)_{n\geq 1}$ ainsi construite est une suite de Cauchy. Comme $\mathcal{R}$ est complet, cette suite de Cauchy converge donc vers un point a. Remarquons que pour tout n, les points x_m où $m \geq n$ sont tous dans K_n. Comme chaque K_n est fermé, on conclut que le point limite a est dans tous les K_n. L'hypothèse sur les diamètres des K_n implique que l'intersection des K_n a au plus un point. En définitive on a montré que

$$\cap_{n=1}^{+\infty} K_n = \{a\}.$$

$\square$

En s'appuyant sur ce lemme, nous allons montrer le théorème de Baire :

***Théorème 2.2* (Baire).** — *Soit $\mathcal{R}$ un espace métrique complet. Soit $(M_n)_{n\geq 1}$ une famille dénombrable de sous-ensembles de $\mathcal{R}$ telle que :*

$$\cup_{n=1}^{+\infty} M_n = \mathcal{R}. \tag{1}$$

Alors l'une au moins des adhérences $\overline{M_n}$ contient une boule.

Démonstration. — Supposons qu'aucun des $\overline{M_n}$ ne contienne de boule. Alors $\overline{M_1} \neq \mathcal{R}$. Dans ces conditions $\complement\overline{M_1}$ est un ouvert non vide de $\mathcal{R}$. On peut donc trouver une boule fermée K_1 de diamètre ≤ 1, telle que $K_1 \cap M_1 = \emptyset$. Nous construisons alors par récurrence une suite $(K_n)_{n\geq 1}$ de boules fermées telle que :

(1) $K_{n+1} \subset K_n$,
(2) $\delta(K_n) \leq 1/n$,
(3) $K_n \cap M_n = \emptyset$.

En effet, on a construit K_1, et si la suite $(K_n)_{n\geq 1}$ est construite jusqu'au rang n, alors on construit K_{n+1} de la façon suivante. Comme $\overline{M_{n+1}}$ ne contient pas de boule, l'ensemble $\mathring{K}_n \setminus \overline{M_{n+1}}$ est un ouvert non vide qui contient donc une boule fermée K_{n+1} de diamètre $\leq 1/(n+1)$. D'après le lemme 2.1, l'intersection des K_n est réduite à un point a. Ce point a n'appartient à aucun des M_n contrairement à l'hypothèse (1). □

On obtient à partir de là :

Corollaire 2.3. — *Soit $\mathcal{R}$ un espace métrique complet. Soit $(M_n)_{n\geq 1}$ une famille dénombrable de sous-ensembles de $\mathcal{R}$ dont les fermetures sont d'intérieurs vides : $\mathring{\overline{M_n}} = \emptyset$. Alors la réunion $\cup_{n\geq 1} M_n$ est d'intérieur vide.*

Démonstration. — Supposons que $\cup_{n\geq 1} M_n$ ne soit pas d'intérieur vide. Alors cette réunion contient une boule fermée B. L'espace métrique $\mathcal{R}$ induit sur B un espace métrique complet. Or $\cup_{n\geq 1}(M_n \cap B) = B$, on peut donc lui appliquer le théorème précédent ce qui fait que $\overline{M_n \cap B}$ contient une boule (qui est à la fois une boule de B et une boule de $\mathcal{R}$). Remarquons que $\overline{M_n \cap B}$ est la fermeture dans B, mais comme B est fermé dans $\mathcal{R}$, c'est aussi la la fermeture dans $\mathcal{R}$. De plus $\overline{M_n \cap B} \subset \overline{M_n}$. Donc $\overline{M}$ contient une boule. □

3. Applications à la géométrie des espaces de Banach

3.1. Théorème de Banach-Steinhaus. — Voici une conséquence immédiate du théorème de Baire qui va nous servir par la suite.

Théorème 3.1. — *Soit* $(f_i)_{i\in I}$ *une famille de fonctions continues définies sur un espace métrique complet* $\mathcal{R}$ *et à valeurs réelles. On suppose que pour tout point* $x \in \mathcal{R}$ *on a :*

$$\sup_{i\in I} f_i(x) = M(x) < +\infty.$$

Alors il existe un ouvert non vide Ω *dans lequel les fonctions* f_i *sont uniformément bornées, c'est-à-dire :*

$$\sup_{x\in\Omega}\left(\sup_{i\in I} f_i(x)\right) < +\infty.$$

Démonstration. — Pour tout $n \geq 1$ posons

$$F_n = \{x \mid \sup_{i\in I} f_i(x) \leq n\}.$$

Les F_n sont des fermés et

$$\mathcal{R} = \cup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Donc l'un au moins des F_n contient une boule ouverte Ω. □

Quand on parle actuellement du Théorème de Banach-Steinhaus, on parle en fait d'une synthèse de résultats tirés et adaptés de plusieurs lemmes et théorèmes qui apparaissent dans l'article de S. Banach et H. Steinhaus intitulé « Sur le principe de la condensation de singularités » (Fundamenta Math. 9 (1927) p. 50-61). Nous donnerons ici deux versions qui sans être exactement rédigées comme dans l'article en question en sont une transcription assez fidèle et correspondent aux exposés modernes qu'on trouve actuellement dans la littérature.

Théorème 3.2 **(Banach - Steinhaus (version 1))**

Soit B *un espace de Banach,* F *un espace vectoriel normé. Soit* $(T_i)_{i\in I}$ *une famille d'applications linéaires continues de* B *dans* F*. On suppose que pour tout* $x \in B$ *on ait :*

$$\sup_{i\in I} ||T_i(x)|| < +\infty.$$

Alors :

$$\sup_{i\in I} ||T_i|| < +\infty.$$

Démonstration. — Appliquons le théorème 3.1 aux fonctions $f_i(x) = ||T_i(x)||$. Les fonctions f_i sont bien continues et $\sup_{i\in I} f_i x) = M(x) < +\infty$. Donc il existe un ouvert non vide Ω tel que $\sup_{x\in\Omega}(\sup_{i\in I} ||T_i(x)||) = M < +\infty$. Soit $K(x_0, r)$ une boule fermée de centre x_0 et de rayon r incluse dans Ω. Pour tout $i \in I$ et tout $x \in K(x_0, r)$ on a donc $||T_i(x)|| \leq M$. Si maintenant x est un élément de norme 1, alors $x_0 + rx \in K(x_0, r)$ et donc $||T_i(x_0 + rx)|| \leq M$. Mais $rx = (x_0 + rx) - x_0$ et donc $r||T_i(x)|| \leq 2M$, d'où $||T_i(x)|| \leq 2M/r$. Par suite pour tout $i \in I$ on a $||T_i|| \leq 2M/r$. □

Corollaire 3.3. — *Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'applications linéaires continues d'un espace de Banach B dans un espace vectoriel normé F. On suppose que pour tout $x \in B$ on a $\sup_{i\in I} ||T_i(x)|| < +\infty$. Alors :*

$$\lim_{x\to 0} T_i(x) = 0,$$

uniformément par rapprt à i.

Démonstration. — Le théorème de Banach-Steinhaus nous permet de dire que :

$$M = \sup_{i\in I} ||T_i|| < +\infty.$$

Donc :

$$||T_i(x)|| \leq ||T_i||\,||x|| \leq M||x||,$$

ce qui prouve le corollaire. □

Théorème 3.4 **(Banach - Steinhaus (version 2))**

Soient X et Y deux espaces de Banach et $(T_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ un système dirigé d'applications linéaires continues de X dans Y. On suppose que pour tout $x \in X$ on ait

$$\sup_{\alpha\in\mathcal{A}} ||T_\alpha(x)|| < +\infty.$$

Si $\lim_{\alpha\in\mathcal{A}} T_\alpha(x)$ existe pour les éléments d'une partie topologiquement génératrice de X, alors la limite existe pour tout $x \in X$ et l'application

$$x \mapsto T(x) = \lim_{\alpha\in\mathcal{A}} T_\alpha(x)$$

est linéaire et continue.

Démonstration. — Soit $\epsilon > 0$. D'après le corolaire 3.3 il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $z \in X$ de norme $||z|| \leq \delta$ on ait $||T_\alpha(z)|| \leq \frac{\epsilon}{3}$, et ceci pour tout α.

Si $\lim_{\alpha \in \mathcal{A}} T_\alpha(x)$ existe pour les éléments d'une partie A topologiquement génératrice de X notons $D = [A]$ l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de A. La limite $\lim_{\alpha \in \mathcal{A}} T_\alpha(x)$ existe alors pour les éléments de D qui est par construction une partie dense dans X. Comme D est dense dans X, pour tout $x \in X$ il existe $y \in D$ tel que $||x - y|| \leq \delta$. Comme $\lim_{\alpha \in \mathcal{A}} T_\alpha(y)$ existe, on peut trouver un indice $\alpha(y, \epsilon) \in \mathcal{A}$ tel que pour tout $\alpha > \alpha(y, \epsilon)$ et tout $\beta > \alpha(y, \epsilon)$ on ait $||T_\alpha(y) - T_\beta(y)|| \leq \frac{\epsilon}{3}$.

On a alors pour tout $\alpha > \alpha(y, \epsilon)$ et pour tout $\beta > \alpha(y, \epsilon)$ les inégalités successives :

$$||T_\alpha(x) - T_\beta(x)|| \leq ||T_\alpha(x) - T_\alpha(y)|| + ||T_\alpha(y) - T_\beta(y)|| + ||T_\beta(y) - T_\beta(x)||\,,$$

$$||T_\alpha(x) - T_\beta(x)|| \leq ||T_\alpha(x - y)|| + ||T_\alpha(y) - T_\beta(y)|| + ||T_\beta(y - x)||\,,$$

$$||T_\alpha(x) - T_\beta(x)|| \leq \epsilon. \tag{2}$$

Soit $\alpha_1 > \alpha(y, 1)$ et par récurrence $\alpha_n > \max\big(\alpha_{n-1}, \alpha(y, 1/n)\big)$. La suite $\big(T_{\alpha_n}(x)\big)_{n \geq 1}$ est une suite de Cauchy dans Y, et comme Y est complet elle converge vers une limite l_x. Pour tout $\epsilon > 0$ il existe donc n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait

$$||T_{\alpha_n}(x) - l_x|| \leq \epsilon. \tag{3}$$

On a aussi :

$$\lim_\alpha T_\alpha(x) = l_x.$$

En effet, partons de l'inégalité :

$$||T_\alpha(x) - l_x|| \leq ||T_\alpha(x) - T_{\alpha_n}(x)|| + ||T_{\alpha_n}(x) - l_x||\,.$$

Fixons n tel que $n \geq \max(n_0, 1/\epsilon)$. Le α_n correspondant est $> \alpha(y, \epsilon)$. Pour tout $\alpha > \alpha(y, \epsilon)$ on a donc en vertu de (2) :

$$||T_\alpha(x) - T_{\alpha_n}(x)|| \leq \epsilon,$$

et en vertu de (3) :

$$||T_{\alpha_n}(x) - l_x|| \leq \epsilon.$$

Ceci montre qu'on a pu rendre $||T_\alpha(x) - l_x||$ aussi petit qu'on veut.

Soit T l'application de X dans Y définie par :

$$x \mapsto T(x) = \lim_\alpha T_\alpha(x).$$

Les applications T_α étant linéaires, la conservation des égalités par passage à la limite nous montre que T est linéaire. Pour tout $\epsilon > 0$ il existe α tel que $||T_\alpha(x) - T(x)|| \leq \epsilon$, donc tel que $||T(x)|| \leq ||T_\alpha(x)|| + \epsilon$. Par ailleurs l'hypothèse et le théorème 3.2 impliquent que $M = \sup_\alpha ||T_\alpha|| < +\infty$. On a donc pour tout $\epsilon > 0$ et tout x :

$$||T(x)|| \leq M||x|| + \epsilon,$$

et donc encore :

$$||T(x)|| \leq M||x||.$$

Ceci montre la continuité de T avec en plus :

$$||T|| \leq M = \sup_\alpha ||T_\alpha|| \, .$$

□

3.2. Théorème de Banach-Schauder. — Rappelons qu'une application est dite ouverte lorsque l'image de tout ouvert est un ouvert.

Théorème 3.5 **(Banach-Schauder ou de l'application ouverte)**

Soient E et F deux espaces de Banach. Toute application linéaire continue surjective de E sur F est ouverte.

Démonstration. — Soit u une application linéaire continue surjective de E sur F. Soit V un voisinage de 0 dans E. L'application $(x, y) \mapsto x - y$ étant continue dans E, il existe un voisinage V' de 0 dans E tel que $V' - V' \subset V$. Soit $F_n = n\,\overline{u(V')}$ où $\overline{u(V')}$ est l'adhérence dans F de $u(V')$. Soit $y \in F$, alors puisque u est surjective il existe $x \in E$ tel que $u(x) = y$. Comme V est un ouvert non vide (il contient 0), il contient une boule ouverte de rayon $r > 0$. Prenons $n > \frac{||x||}{r}$, alors $x \in n\,V$, donc $u(x) \in u(n\,V) = n\,u(V') \subset n\,\overline{u(V')}$. On en conclut que $\cup_{n=1}^{+\infty} n\,\overline{u(V')} = F$. Par application du théorème de Baire on conclut à l'existence d'un entier n tel que F_n soit d'intérieur non vide. Donc $\overline{u(V')}$ est d'intérieur non vide, c'est-à-dire qu'il contient un ouvert non vide Ω. Pour tout point x, l'ensemble $\Omega_x = -x + \Omega$ translaté de Ω est aussi ouvert, si bien que

$\Omega - \Omega = \cup_{x\in\Omega}\Omega_x$ est aussi un ouvert. Cet ouvert contient le point 0. De plus :

$$\Omega - \Omega \subset \overline{u(V')} - \overline{u(V')} \subset \overline{u(V') - u(V')} = \overline{u(V' - V')} \subset \overline{u(V)},$$

ce qui prouve que $\overline{u(V)}$ est un voisinage de 0 dans F.

Posons $W = u(V)$. Soit ϵ fixé tel que $0 < \epsilon < 1$. Alors $\overline{W} \subset W + \epsilon\,\overline{W}$. En effet soit $x \in \overline{W}$, comme $\epsilon\,\overline{W}$ est un voisinage de 0, l'ensemble $X + \epsilon\,\overline{W}$ est un voisinage de x. Par définition de l'adhérence, ce voisinage contient donc un $y \in W$, c'est-à-dire que $y = x + z$ où $z \in \epsilon\,\overline{W}$. Donc $x \in W + \epsilon\,\overline{W}$.

Par suite on a pour tout entier n l'inclusion :

$$\overline{W} \subset W + \epsilon\,W + \epsilon^2\,W + \cdots + \epsilon^n\,W + \epsilon^{n+1}\overline{W}.$$

En conséquence, tout point $y \in \overline{W}$ s'écrit :

$$y = \eta_0 + \epsilon\,\eta_1 + \cdots + \epsilon^n\,\eta_n + y'_n,$$

où $\eta_i \in W$ et $y'_n \in \epsilon^{n+1}\,\overline{W}$.

Si on prend pour voisinage V la boule fermée de centre 0 et de rayon $r > 0$ alors $W = u(V)$ est un ensemble borné, $\overline{W}$ est borné, donc $\lim_{n\to+\infty} y'_n = 0$. D'autre part on peut réécrire y sous la forme :

$$y = u(\xi_0 + \epsilon\,\xi_1 + \cdots + \epsilon^n\,\xi_n) + y'_n,$$

où $\xi_i \in V$. Posons alors :

$$x_n = \xi_0 + \epsilon\,\xi_1 + \cdots + \epsilon^n\,\xi_n,$$

si $m > n$ on a :

$$x_m - x_n = \epsilon^{n+1}(\xi_{n+1} + \epsilon\,\xi_{n+2} + \cdots + \epsilon^{m-n-1}\,\xi_m).$$

Comme $||\xi_i|| \leq r$ on peut aussi écrire :

$$||x_m - x_n|| \leq \epsilon^{n+1} r(1 + \epsilon +_c dots + \epsilon^{m-n-1} \leq \epsilon^{n+1}\frac{r}{1-\epsilon}.$$

Ceci montre que la suite $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy. Elle converge donc vers un $x \in V$. Cet élément limite vérifie :

$$u(x) = \lim_{n\to+\infty} u(x_n) = y \quad \text{et} \quad ||x|| \leq \frac{r}{1-\epsilon}.$$

Ceci prouve que :

$$\overline{W} \subset u\left(\frac{1}{1-\epsilon}\,V\right),$$

ou encore :

$$(1-\epsilon)\,\overline{W} \subset u(V).$$

Donc $u(V)$ est un voisinage de 0.

On en déduit en faisant une tanslation que si V est un voisinage d'un point x alors $u(V)$ est un voisinage de $u(x)$. Sachant qu'un ensemble est ouvert si et seulement s'il est voisinage de tous ses points, on conclut que pour tout ouvert $\mathcal{O}$ de E, $u(\mathcal{O})$ est un ouvert de F. □

***Corollaire 3.6* (Théorème d'isomorphisme).** — *Si u est une bijection linéaire continue d'un espace de Banach E sur un espace de Banach F alors u est bicontinue, et donc les deux espaces sont isomorphes.*

Si E et F sont des espaces de banach, $E\times F$ muni de la norme $||(x,y) = ||x||_E + ||y||_F$ est un espace de Banach. La topologie donnée par cette norme est bien la topolgie produit des deux espaces topologiques données par les deux normes $||.||_E$ et $||.||_F$.

Sauf avis contraire, c'est cette norme que nous prendrons sur l'espace produit $E \times F$.

***Théorème 3.7* (Théorème du graphe fermé)**

Une application linéaire u d'un espace de Banach E dans un espace de Banach F est continue si et seulement si son graphe est fermé dans $E \times F$.

Démonstration. — Supposons que l'application linéaire u de E dans F soit continue. Notons G le graphe de u, c'est-à-dire :

$$G = \left\{ \big(x, u(x)\big) \ \mid x \in E \right\}.$$

Si $(x,y) \notin G$, alors $y \neq u(x)$ et comme u est continue, il existe un $d > 0$ tel que $||u(x) - y|| \geq d > 0$. Soit V_1 un voisinage de x tel que pour tout $x' \in V_1$ on ait $||u(x) - u(x')|| < d/2$. Soit $V_2 = \{y' \in F \mid ||y - y'|| < d/2$. Alors $V_1 \times V_2$ est un voisinage de (x,y) inclus dans le complémentaire de G. Ceci montre que G est fermé.

Réciproquement, si G est fermé dans $E \times F$, G muni de la norme induite est un espace de Banach. Soit alors p l'application de G dans E définie par $p\big(x, u(x)\big) = x$ est bicontinue, ce qui implique la continuité de u puisque $p^{-1}(x) = \big(x, u(x)\big)$ est continue. □

Corollaire 3.8. — *Une application linéaire u d'un espace de Banach E dans un espace de Banach F est continue si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de E telle que :*

(1) $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$,
(2) $\lim_{n\to+\infty} u(x_n) = y$.

on a $y = u(x)$.

Démonstration. — La condition est évidemment nécessaire pour que u soit continue. Si la condition a lieu, cela veut dire que tout point (x, y) qui est adhérent au graphe G de u appartient à G. Le graphe est donc fermé et en conséquence u est continue. □

Théorème 3.9. — *Soient X, Y, Z trois espaces de Banach. Soit $\mathcal{F}$ une famille d'applications linéaires continues de F dans Z vérifiant la condition suivante :*

(C) *Si y est tel que $f(y) = 0$ pour tout $f \in \mathcal{F}$ alors $y = 0$.*

Soit T une application linéaire de E dans F. Si pour tout $f \in \mathcal{F}$ l'application composée $f \circ T$ est continue, alors T est continue.

Démonstration. — Soit x_n une suite de points de E telle que :

(1) $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$,
(2) $\lim_{n\to+\infty} T(x_n) = y$.

Alors $\lim_{n\to+\infty} f\big(T(x_n)\big) = f(y)$ en vertu de (2) et de la continuité de f. On a aussi $\lim_{n\to+\infty} f \circ T(x_n) = f \circ T(y)$, en vertu de (1) et de la continuité de $f \circ T$. Par suite $f \circ T(x) = f(y)$ ou encore $f\big(T(x) - y\big) = 0$ et ceci pour tout f, donc $T(x) = y$. Le corollaire précédent nous permet de conclure. □

---

24 mai 2010

R. Rolland, Association ACrypTA, 50 Rue Edmond Rostand 13006 Marseille,
E-mail : `robert.rolland@acrypta.fr`