

Série dont les termes sont divisés par la somme partielle

1 Introduction

Le problème qui suit résout une question qu'on peut se poser sur l'espace l^2 des suites de carré sommable : si une suite $u = (u_n)_n$ est telle que pour toute suite de carré sommable $v = (v_n)_n$ la série $\sum_n u_n v_n$ converge, la suite u est-elle de carré sommable ? La réponse est oui. On donne deux démonstrations. L'une utilise les propriétés de certains types de séries, l'autre un gros outil d'analyse fonctionnelle : le théorème de Banach-Steinhaus. Pour mettre en place la première on a besoin de résultats sur les séries à termes positifs. C'est l'objet de la partie I. La partie II pose le problème, et pour cela on y étudie quelques résultats sur l'espace l^2 . Ensuite on présente les deux démonstrations.

2 Problème

I - Étude d'une suite

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite dont les termes sont strictement positifs. On pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k.$$

Soit K un nombre réel strictement positif. On se propose d'étudier la convergence de la série de terme général v_n , où :

$$v_n = \frac{u_n}{(S_n)^K}.$$

- 1) On suppose que la série de terme général u_n est convergente et a pour somme S .
 - a) Trouver, en fonction de u_n , un équivalent de v_n au voisinage de $+\infty$.
 - b) En conclure que la série de terme général v_n est convergente.
- 2) On suppose que la série de terme général u_n est divergente et que $K = 1$.
 - a) Conclure dans le cas où v_n ne tendrait pas vers 0.
 - b) Dans le cas où v_n tendrait vers 0, étudier la nature de la série de terme général $\log(1 - v_k)$ (où $k \geq 2$). En déduire que la série de terme général v_n diverge.
- 3) On suppose que la série de terme général u_n est divergente et que $0 < K < 1$.
 - a) Montrer qu'il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $v_n > \frac{u_n}{S_n}$.
 - b) Conclure.
- 4) On suppose que la série de terme général u_n est divergente et que $K > 1$.
 - a) Montrer que :

$$v_n < \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t^K}.$$

b) Montrer que la série de terme général v_k converge.

II - Un problème de géométrie des espaces de suites

On note l^2 l'ensemble des suites réelles de carré sommable, c'est-à-dire des suites $(v_n)_{n \geq 1}$ telles que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n^2 < +\infty.$$

1) Rappels.

a) Montrer que si les deux suites $u = (u_n)_{n \geq 1}$ et $v = (v_n)_{n \geq 1}$ sont deux éléments de l^2 , alors la série de terme général $|u_n v_n|$ converge et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n v_n| \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n^2 \right).$$

b) Montrer que si les deux suites $u = (u_n)_{n \geq 1}$ et $v = (v_n)_{n \geq 1}$ sont deux éléments de l^2 , alors :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n v_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On pourra appliquer l'inégalité de la question précédente aux deux suites de terme général

$$\frac{u_n}{\left(\sum_{k=1}^{+\infty} u_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{et} \quad \frac{v_n}{\left(\sum_{k=1}^{+\infty} v_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}}.$$

c) Montrer que l^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel de toutes les suites réelles et que

$$\|u\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

défini une norme sur l_2 .

d) Montrer que l^2 muni de la norme $\|\cdot\|_2$ est un espace complet.

2) On se propose de démontrer le résultat suivant :

Soit $u = (u_n)_{n \geq 1}$ une suite à termes strictement positifs telle que pour toute suite $v = (v_n)_{n \geq 1} \in l^2$ la série de terme général $u_n v_n$ converge. Alors $u \in l^2$.

a) Supposons que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2 = +\infty$. Posons :

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k^2 \quad \text{et} \quad v_n = \frac{u_n}{S_n}.$$

Étudier les convergences des séries de terme général v_n^2 et $u_n v_n$ et en déduire une contradiction.

b) Nous allons donner une autre démonstration basée sur le théorème de Banach-Steinhaus. Pour tout $N > 0$ définissons l'application linéaire T_N de l^2 dans \mathbb{R} par :

$$T_N(v) = \sum_{k=1}^N u_k v_k.$$

Montrer que pour tout N , l'application T_N est continue. Calculer la norme de T_N . Montrer que pour tout $v \in l^2$ on a :

$$\sup_{N > 1} |T_N(v)| < +\infty.$$

En appliquant le théorème de Banach-Steinhaus conclure que $u \in l^2$.

3 Solution

Partie I

Cette partie sur les suites est un exercice classique qu'on trouve dans la plupart des livres de préparation aux divers concours.

1) avec cette hypothèse $S_n \sim S$.

a) De ce fait, $v_n \equiv \frac{u_n}{S^K}$.

b) Puisque on travaille sur des séries à termes positifs, le fait que v_n soit équivalent au terme général d'une série convergente prouve que la série de terme général v_n est convergente.

2) Maintenant on suppose que la série de terme général u_n diverge et que $K = 1$.

a) Si v_n ne tend pas vers 0 alors la série de terme général v_n diverge.

b) Si v_n tend vers 0. Remarquons que pour $k \geq 2$ on a :

$$1 - v_k = \frac{S_{k-1}}{S_k} > 0.$$

On calcule :

$$\sum_{k=2}^n \log(1 - v_k) = \log(u_1) - \log(S_n).$$

La série de terme général $t_n = -\log(1 - v_n)$ est une série à termes positifs qui diverge. Comme $t_n \sim v_n$ on conclut à la divergence de la série de terme général v_n .

En conclusion si la série de terme général u_n diverge et si $K = 1$ alors la série de terme général v_n diverge.

3) Maintenant on suppose que la série de terme général u_n diverge et que $0 < K < 1$.

a) Il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $S_n > 1$. Puisque $0 < K < 1$ on a alors pour $n \geq n_0$ l'inégalité

$$S_n^K < S_n.$$

Donc pour $n \geq n_0$,

$$v_n = \frac{u_n}{S_n^K} > \frac{u_n}{S_n}.$$

b) On vient de voir dans 2) que $\frac{u_n}{S_n}$ est le terme général d'une série à termes positifs divergente. Donc la série de terme général v_n diverge.

4) Maintenant on suppose que la série de terme général u_n diverge et que $K > 1$.

a) Remarquons que

$$v_n = \frac{u_n}{S_n^K} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^K} = \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{S_n^K}.$$

Comme la suite S_n est croissante, on a donc

$$v_n \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t^K}.$$

Par sommation des inégalités précédentes on obtient :

$$\sum_{k=1}^n v_k \leq \int_{S_1}^{+\infty} \frac{dt}{t^K}.$$

Comme $K > 1$ l'intégrale de la partie droite converge, ce qui prouve que la série de terme général v_n converge.

Conclusion de la partie I : la série de terme général v_n converge si et seulement si on est dans l'un des deux cas suivants :

- (i) la série de terme général u_n converge ;
- (ii) $K > 1$.

Partie II

1) Rappels

a) On a successivement :

$$0 \leq (|u_n| - |v_n|)^2 = u_n^2 + v_n^2 - 2|u_n v_n|,$$

$$2|u_n v_n| \leq u_n^2 + v_n^2,$$

$$|u_n v_n| \leq \frac{1}{2} (u_n^2 + v_n^2).$$

Ceci prouve que la série de terme général $|u_n v_n|$ est convergente et qu'on a l'inégalité attendue.

b) Si l'une des suites est nulle le résultat est vrai. Sinon posons :

$$w_n = \frac{u_n}{\left(\sum_{k=1}^{+\infty} u_k^2\right)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{et} \quad t_n = \frac{v_n}{\left(\sum_{k=1}^{+\infty} v_k^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

En appliquant le résultat précédent on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |w_n t_n| \leq 1,$$

ce qui donne :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n v_n| \leq \left(\sum_{k=1}^{+\infty} u_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} v_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

c) Si u et v sont deux suites de l^2 alors $(u_n + v_n)^2 = u_n^2 + v_n^2 + 2u_n v_n$. Comme les 3 séries de terme général u_n^2 , v_n^2 et $|u_n v_n|$ sont convergentes, on en déduit que la série de terme général $(u_n + v_n)^2$ est convergente. De plus :

$$\|u + v\|^2 \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n v_n|,$$

ce qui donne en utilisant l'inégalité montrée en b :

$$\|u + v\|^2 \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\| \|v\|,$$

et donc :

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

d) Soit $(u^{(n)})_n$ une suite de Cauchy dans l^2 . Notons $u_k^{(n)}$ le terme général de la suite $u^{(n)}$. Écrivons la condition de Cauchy. Pour tout $\epsilon > 0$ il existe $A > 0$ tel que pour tout $m \geq A$ et tout $n \geq A$ on ait :

$$\|u^{(n)} - u^{(m)}\| \leq \epsilon,$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(u_k^{(n)} - u_k^{(m)} \right)^2 \leq \epsilon^2. \quad (1)$$

Pour tout k fixé on a donc :

$$\left| u_k^{(n)} - u_k^{(m)} \right| \leq \epsilon,$$

ce qui prouve que pour tout k la suite $\left(u_k^{(n)} \right)_n$ est une suite de Cauchy dans \mathbb{R} et donc converge dans \mathbb{R} vers une limite qu'on va appeler u_k . Nous allons montrer que la suite $u = (u_k)_k$ est dans l^2 et que c'est la limite dans l^2 de la suite $(u^{(n)})_n$. Pour cela on utilise de nouveau la condition de Cauchy (1). Pour tout $m \geq A$, tout $n \geq A$ et tout $N > 1$ on a :

$$\sum_{k=1}^N \left(u_k^{(n)} - u_k^{(m)} \right)^2 \leq \epsilon^2. \quad (2)$$

Fixons un $n \geq A$ et faisons tendre m vers $+\infty$. Pour tout $N \geq 1$ on obtient donc :

$$\sum_{k=1}^N \left(u_k^{(n)} - u_k \right)^2 \leq \epsilon^2. \quad (3)$$

ce qui montre que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(u_k^{(n)} - u_k \right)^2 \leq \epsilon^2. \quad (4)$$

Cette dernière inégalité prouve que la suite de terme général $\left(u_k^{(n)} - u_k \right)_k$ est dans l^2 et donc que la suite de terme général u_k qui est la somme des deux suites de l^2 de terme général $\left(-u_k^{(n)} + u_k \right)$ et $u_k^{(n)}$ est elle-même dans l^2 . Elle prouve en plus, que $\|u^{(n)} - u\| \leq \epsilon$, ce qui permet de conclure que $(u^{(n)})_n$ converge vers u dans l^2 .

2) Soit $u = (u_n)_n$ une suite telle que pour toute suite $v \in l^2$ la série de terme général $u_n v_n$ converge.

a) Supposons que u n'appartienne pas à l^2 et posons $S_n = \sum_{k=1}^n u_k^2$ et $v_n = \frac{u_n}{S_n}$. On a alors :

$$v_n^2 = \frac{u_n^2}{\left(\sum_{k=1}^n u_k^2 \right)^2}.$$

En vertu des résultats de la partie I,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n^2 < +\infty.$$

Donc $(v_n)_n \in l^2$. Mais toujours en vertu de la partie I,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n^2}{\sum_{k=1}^n u_k^2} = +\infty,$$

ce qui contredit l'hypothèse.

b) On peut écrire pour tout N :

$$|T_N(v)| = \left| \sum_{k=1}^N u_k v_k \right|, \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
|T_N(v)| &\leq \sum_{k=1}^N |u_k v_k|, \\
|T_N(v)| &\leq \left(\sum_{k=1}^N u_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^N v_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \\
|T_N(v)| &\leq \left(\sum_{k=1}^N u_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} v_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \\
|T_N(v)| &\leq \left(\sum_{k=1}^N u_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|v\|.
\end{aligned}$$

Ceci prouve que T_N est une application linéaire continue de norme

$$\|T_N\| \leq \left(\sum_{k=1}^N u_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si on fait le calcul pour la suite particulière $v \in l^2$ définie par $v_k = u_k$ si $k \leq N$ et $v_k = 0$ si $k > N$, on voit que :

$$|T_N(v)| = \left(\sum_{k=1}^N u_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|v\|,$$

ce qui finit de prouver que :

$$\|T_N\| = \left(\sum_{k=1}^N u_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Reprenons l'égalité (5). On en déduit que :

$$\sup_N |T_N(v)| \leq \sup_N \left| \sum_{k=1}^N u_k v_k \right|.$$

Mais comme la série $\sum_{k=1}^N u_k v_k$ est convergente, ses sommes partielles sont bornées, ce qui montre que :

$$\sup_N |T_N(v)| < +\infty.$$

D'après le théorème de Banach-Steinhaus on a donc :

$$\sup_N \|T_N\| < +\infty,$$

ce qui compte tenu de la valeur de la norme de T_N conduit à :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k^2 < +\infty.$$

Remarque : La démonstration du fait que l^2 est complet est exemplaire. La démarche est classique :

1. on part d'une suite de Cauchy, et on écrit proprement la condition de Cauchy,

2. ceci permet d'avoir une convergence simple, ce qui pour les suites correspond à une convergence sur chaque composante ; on obtient alors un candidat pour la limite au sens de la norme ;
3. à partir de là on passe à la limite dans la condition de Cauchy, ce qui donne simultanément l'appartenance du candidat retenu à l'espace dont on veut montrer la complétude, et la convergence de la suite initiale, au sens de la norme, vers ce candidat.

*Auteur : Robert Rolland
Diffusé par l'Association ACrypTA*