Lemme de Grönwall discret

1 Introduction

Le lemme de Grönwall sous sa forme originelle donnée par Thomas Hakon Grönwall (1877-1932) en 1919, s'exprime de la façon suivante :

Soit f une fonction positive sur un intervalle $[a, b]$ telle qu'il existe deux constantes $A \geq 0$ et $B \geq 0$ pour lesquelles l'inégalité suivante est vérifiée :

$$f(t) \leq A + B \int_a^t f(s)\mathrm{d}(s).$$

Alors on a la majoration suivante pour tout $t \in [a, b]$:

$$f(t) \leq Ae^{B(t-a)}.$$

Ce lemme, ainsi que ses généralisations, sont très utiles dans l'étude des équations différentielles. On peut à ce propos se référer, par exemple, au cours "Équations Différentielles ordinaires de R. Rolland, Lemme 2.2.5 page 28", qui se trouve à l'adresse web suivante :

http ://robert.rolland.acrypta.com/index.php/upload/analysis.

On y trouvera la version suivante du lemme de Grönwall :

Lemme (Grönwall)**.** *Soient f, g, h trois fonctions réelles continues, d'une variable réelle, définies sur l'intervalle $[t_0, a]$ et ≥ 0 sur cet intervalle. On suppose que pour $t \in [t_0, a]$:*

$$f(t) \leq g(t) + \int_{t_0}^t h(u)f(u)\mathrm{d}u. \tag{1}$$

Alors on a :

$$f(t) \leq g(t) + \int_{t_0}^t \left[g(v)h(v) \exp\left(\int_v^t h(u)\mathrm{d}u\right)\right] \mathrm{d}v. \tag{2}$$

Il existe des versions discrètes du lemme de Grönwall, où les fonctions d'une variable réelle sont remplacées par des fonctions d'une variable entière, c'est-à-dire des suites, et où les intégrales sont remplacées par des séries. Le problème suivant en propose une version.

2 Problème

Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites telles que pour tout $n \geq 0$ on ait : $a_n \geq 0$ et $b_n \geq 0$.

On suppose qu'il existe une constante $M \geq 0$ telle pour tout $n \geq 0$

$$a_{n+1} \leq M + \sum_{k=0}^{n} a_k b_k. \tag{3}$$

Nous nous proposons de montrer que pour tout $n \geq 0$ on a l'inégalité suivante :

$$a_{n+1} \leq M \exp\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right). \tag{4}$$

1) Pour tout $n \geq 0$ on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ et on pose $S_{-1} = 0$. Soit ρ la fonction en escalier qui sur tout intervalle $[S_{p-1}, S_p[$ (où $p \geq 0$) prend la valeur $\rho(t) = a_p$.

a) Montrer que pour tout $n \geq 0$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \int_0^{S_n} \rho(t)\mathrm{d}t. \tag{5}$$

b) Montrer que pour tout réel $t \geq 0$

$$\rho(t) \leq M + \int_0^{t} \rho(s)\mathrm{d}s. \tag{6}$$

2) Supposons que $0 \leq t \leq S_{n+1}$.

a) Montrer que

$$\rho(t) \leq M + t \sup_{0 \leq j \leq n+1} a_j.$$

b) Montrer que pour tout entier $k \geq 0$

$$\rho(t) \leq M + M\,t + M\,\frac{t^2}{2!} + \cdots + M\,\frac{t^k}{k!} + \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \sup_{0 \leq j \leq n+1} a_j.$$

c) En conclure que pour tout t on a

$$\rho(t) \leq M \exp(t).$$

3) Montrer que pour tout $n \geq 0$

$$a_{n+1} \leq M \exp\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right).$$

4) Énoncer et démontrer une version un peu plus générale du résultat précédent qui calque la version continue donnée dans le lemme cité en introduction. On pourra reprendre la démonstration donnée dans le document cité en introduction et en faire une version discrète.

3 Solution

1) La fonction ρ est la fonction en escalier dont les marches sont construites sur les intervalles (S_{p-1}, S_p) et sont de hauteurs a_p.

a) Il est facile de calculer son intégrale sur $[0, S_n]$:

$$\int_0^{S_n} \rho(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} (S_k - S_{k-1})\, a_k,$$

c'est-à-dire :

$$\int_0^{S_n} \rho(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k.$$

b) Supposons $S_n \leq t < S_{n+1}$. On a donc $\rho(t) = a_{n+1}$ ainsi que

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \int_0^{S_n} \rho(s)\mathrm{d}s \leq \int_0^{t} \rho(s)\mathrm{d}s. \tag{7}$$

2) Supposons $0 \leq t < S_{n+1}$. Alors il existe $k \leq n$ tel que $S_k \leq t < S_{k+1}$.

a) En reportant l'inégalité (9) dans l'inégalité (3) on obtient pour $S_k \leq t < S_{k+1}$:

$$a_{k+1} = \rho(t) \leq M + \int_0^{t} \rho(s)\mathrm{d}s, \tag{8}$$

et en majorant $\rho(s)$ sur l'intervalle $[0, t]$ par son maximum sur l'intervalle $[0, S_{n+1}[$, c'est à dire par $\sup_{0\leq j\leq n+1} a_j$, on obtient :

$$a_{k+1} \leq M + t \sup_{0\leq j\leq n+1} a_j,$$

ou encore :

$$\rho(t) \leq M + t \sup_{0\leq j\leq n+1} a_j. \tag{9}$$

b) En réinjectant l'inégalité (9) dans l'intégrale qui intervient dans l'inégalité (8) on obtient

$$\rho(t) \leq M + Mt + M\frac{t^2}{2!} \sup_{0\leq j\leq n+1} a_j,$$

puis successivement pour tout k :

$$\rho(t) \leq M + Mt + \cdots + M\frac{t^k}{k!} \sup_{0\leq j\leq n+1} a_j.$$

En faisant tendre k vers $+\infty$ on obtient :

$$\rho(t) \leq M\exp(t).$$

3) Il suffit maintenant d'utiliser la formule précédente avec $t = S_n$ pour obtenir le résultat voulu.

4) Énonçons dans un premier temps la transcription discrète du lemme donné en introduction :

Lemme. *Soient* $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ *et* $(c_n)_{n\geq 0}$ *trois suites à termes* ≥ 0 *telles que pour tout* $n \geq 0$ *on ait :*

$$a_{n+1} \leq c_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} a_k b_k. \tag{10}$$

Alors pour tout $n \geq 0$ *on a :*

$$a_{n+1} \leq c_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} c_k b_k \exp\left(\sum_{j=k+1}^{n} g_j\right).$$

Démonstration. On note pour tout $n \geq 0$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} b_k, \quad F_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k, \quad z_n = F_n \exp(-S_n).$$

En outre on pose

$$F_{-1} = 0 \text{ et } z_{-1} = 0.$$

Remarquons qu'en multipliant tous les termes de l'inéquation (10) par b_{n+1} on obtient

$$a_{n+1}b_{n+1} \leq c_{n+1}b_{n+1} + F_n b_{n+1},$$

ou encore

$$F_{n+1} - F_n - F_n b_{n+1} \leq c_{n+1}b_{n+1}.$$

Calculons

$$z_{n+1} - z_n = F_{n+1}\exp(-S_{n+1}) - F_n \exp(-S_n),$$
$$z_{n+1} - z_n = (F_{n+1} - F_n)\exp(-S_{n+1}) + F_n \left(\exp(-S_{n+1}) - \exp(-S_n)\right),$$
$$z_{n+1} - z_n = (F_{n+1} - F_n)\exp(-S_{n+1}) - F_n \exp(-S_{n+1}) \left(\exp(b_{n+1}) - 1\right).$$

Comme $b_{n+1} \leq \exp(b_{n+1}) - 1$, on peut écrire

$$z_{n+1} - z_n \leq (F_{n+1} - F_n - F_n b_{n+1})\exp(-S_{n+1}),$$
$$z_{n+1} - z_n \leq c_{n+1}b_{n+1}\exp(-S_{n+1}).$$

En conséquence par sommation :

$$z_{n+1} = z_{n+1} - z_{-1} \leq \sum_{k=0}^{n+1} c_k b_k \exp(-S_k).$$

En revenant à la définition de z_{n+1} on en déduit que

$$F_{n+1} \leq \sum_{k=0}^{n+1} c_k b_k \exp(S_{n+1} - S_k) = \sum_{k=0}^{n+1} c_k b_k \exp(\sum_{j=k+1}^{n+1} b_j).$$

Or par hypothèse

$$a_{n+1} \leq c_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} a_k b_k = c_{n+1} + F_n.$$

Donc

$$a_{n+1} \leq c_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} c_k b_k \exp(\sum_{j=k+1}^{n} b_j).$$

□

Auteur : Robert Rolland
Diffusé par l'Association ACrypTA