

# UNE TRÈS IMPORTANTE APPLICATION DU PLAN AFFINE SUR LE CORPS FINI À 5 ÉLÉMENTS

AINIGMATIAS CRUPTOS

## 1. INTRODUCTION

Il s'agit de résoudre le problème suivant : organiser un concours de pétanque en doublettes avec 25 joueurs les équipes étant tournantes. Nous allons montrer, comment construire les parties de façon à ce que les conditions suivantes soient réalisées

- (1) Le concours se déroule en 5 tours, chaque tour mettant en jeu 5 parties. Chaque partie comporte 5 participants : 4 joueurs (2 équipes de deux joueurs) et un arbitre.
- (2) Deux participants au concours ne peuvent se trouver ensemble parmi les 5 participants à une même partie qu'au plus une fois.
- (3) Chaque participant au concours joue 4 fois et arbitre une fois.

## 2. PARTICIPANTS ET PLAN AFFINE

Notons  $\mathbb{F}_5$  le corps fini premier à 5 éléments et  $\mathbb{A}_5$  le plan affine ayant 25 points, sur ce corps. Comme il y a exactement 25 joueurs dans ce concours, nous allons représenter chaque joueur numéroté de 1 à 25 par un élément de coordonnées  $(x, y)$  (dans un repère choisi une fois pour toutes) de  $\mathbb{A}_5$ .

Prenons par exemple la correspondance suivante

01 *point*(0, 0) 02 *point*(1, 0) 03 *point*(2, 0) 04 *point*(3, 0) 05 *point*(4, 0)

06 *point*(0, 1) 07 *point*(1, 1) 08 *point*(2, 1) 09 *point*(3, 1) 10 *point*(4, 1)

11 *point*(0, 2) 12 *point*(1, 2) 13 *point*(2, 2) 14 *point*(3, 2) 15 *point*(4, 2)

16 *point*(0, 3) 17 *point*(1, 3) 18 *point*(2, 3) 19 *point*(3, 3) 20 *point*(4, 3)

21 *point*(0, 4) 22 *point*(1, 4) 23 *point*(2, 4) 24 *point*(3, 4) 25 *point*(4, 4)

---

*Date:* December 27, 2021.

## 3. LES PARTIES

Dans l'espace affine  $\mathbb{A}_5$  il y a 6 directions de droites et 5 droites parallèles par direction, chaque droite contenant 5 points. Ecrivons les droites de 5 directions et les participants (repérés par leur numéro) qui sont sur ces droites. La 6<sup>eme</sup> direction servira plus tard.

Direction 1 :

droite x=0	01 06 11 16 21
droite x=1	02 07 12 17 22
droite x=2	03 08 13 18 23
droite x=3	04 09 14 19 24
droite x=4	05 10 15 20 25

Direction 2 :

droite y=0	01 02 03 04 05
droite y=1	06 07 08 09 10
droite y=2	11 12 13 14 15
droite y=3	16 17 18 19 20
droite y=4	21 22 23 24 25

Direction 3 :

droite x+y=0	01 10 14 18 22
droite x+y=1	02 06 15 19 23
droite x+y=2	03 07 11 20 24
droite x+y=3	04 08 12 16 25
droite x+y=4	05 09 13 17 21

Direction 4 :

droite x-y=0	01 07 13 19 25
droite x-y=1	02 08 14 20 21
droite x-y=2	03 09 15 16 22
droite x-y=3	04 10 11 17 23
droite x-y=4	05 06 12 18 24

Direction 5 :

droite 2x+y=0	01 08 15 17 24
droite 2x+y=1	04 06 13 20 22

droite $2x+y=2$	02 09 11 18 25
droite $2x+y=3$	05 07 14 16 23
droite $2x+y=4$	03 10 12 19 21

Chaque droite parmi les 25 droites précédentes constitue une partie (5 participants décomposés en 4 joueurs et 1 arbitre). Pour chaque tour les 5 parties sont déterminés par un bloc de 5 droites parallèles. Ainsi le  $i^{eme}$  tour sera déterminé par les 5 droites de la direction  $i$  (où  $i$  va de 1 à 5).

On voit tout de suite que 2 individus distincts ne peuvent participer à une même partie qu'une fois au plus. En effet, deux individus distincts définissent une droite unique, et les 25 droites précédentes sont toutes distinctes et utilisées une et une seule fois.

#### 4. JOUEURS ET ARBITRE D'UNE PARTIE

Maintenant que nous avons défini toutes les parties ainsi que les parties de chaque tour, il reste à déterminer parmi les 5 participants à une partie, qui sont les joueurs et qui est l'arbitre. C'est là qu'on utilise la sixième direction qui fournit les 5 droites parallèles suivantes :

- D1 :  $x+2y=0$
- D2 :  $x+2y=1$
- D3 :  $x+2y=2$
- D4 :  $x+2y=3$
- D5 :  $x+2y=4$

Les intersections de la droite  $D_i$  avec les 5 droites parallèles de la  $i^{eme}$  direction donnent les arbitres des 5 parties correspondantes du  $i^{eme}$  tour. On voit immédiatement que tous les arbitres sont différents. Quand on considère deux d'entre eux on peut toujours les situer sur deux droites parallèles distinctes. En effet, ou bien ils sont sur deux droites distinctes de la direction 6, ou bien ils sont sur la même droite  $i$  de la direction 6, mais alors ils sont sur deux droites parallèles distinctes de la direction  $i$ . Les 4 participants restants sur chaque droite de la direction  $i$  sont les joueurs qui peuvent être répartis aléatoirement en 2 équipes de 2 joueurs.

#### 5. UN TABLEAU POSSIBLE

Tout calcul fait et en répartissant aléatoirement dans chaque partie les 4 joueurs qui n'arbitrent pas en 2 équipes on obtient un tableau de rencontres, par exemple le suivant :

## Tour 1 :

06 11	contre	16 21	arbitre	01
02 12	contre	17 22	arbitre	07
03 08	contre	18 23	arbitre	13
04 09	contre	19 24	arbitre	14
05 10	contre	20 25	arbitre	15

## Tour 2 :

01 03	contre	04 05	arbitre	02
07 08	contre	09 10	arbitre	06
11 13	contre	14 15	arbitre	12
17 18	contre	19 20	arbitre	16
21 22	contre	24 25	arbitre	23

## Tour 3 :

01 10	contre	14 18	arbitre	22
02 06	contre	15 23	arbitre	19
07 11	contre	20 24	arbitre	03
04 12	contre	16 25	arbitre	08
05 09	contre	13 21	arbitre	17

## Tour 4 :

01 07	contre	13 19	arbitre	25
02 08	contre	14 20	arbitre	21
03 15	contre	16 22	arbitre	09
10 11	contre	17 23	arbitre	04
05 06	contre	12 24	arbitre	18

## Tour 5 :

01 08	contre	15 17	arbitre	24
04 06	contre	13 22	arbitre	20
02 09	contre	18 25	arbitre	11
07 14	contre	16 23	arbitre	05
03 12	contre	19 21	arbitre	10

## 6. REMARQUE FINALE

Le lecteur qui voudrait progresser à la pétanque pourrait étudier les systèmes de Steiner (du mathématicien suisse Jakob Steiner (né Utzenstorf le 18 March 1796 décédé à Bern le 1 April 1863)).

ASSOCIATION ACRYPTA

*Email address:* `robert.rolland@acrypta.fr`