

Geométrie du dessin : projections, perspectives

Robert Rolland

20 septembre 2006

R. Rolland, C.N.R.S. Institut de Mathématiques de Luminy
Luminy Case 930, F13288 Marseille CEDEX 9
e-mail : rolland@iml.univ-mrs.fr



Plan

- 1 Les diverses représentations
 - Principes et difficultés
 - Les projections parallèles
 - Les projections centrales

Plan

- 1 Les diverses représentations
 - Principes et difficultés
 - Les projections parallèles
 - Les projections centrales
- 2 Travail sur les projections centrales
 - Remarque d'ordre général
 - Cas d'un point de fuite
 - Cas de deux points de fuite
 - œil de l'observateur
 - Apprenons à additionner

Plan

- 1 Les diverses représentations
 - Principes et difficultés
 - Les projections parallèles
 - Les projections centrales
- 2 Travail sur les projections centrales
 - Remarque d'ordre général
 - Cas d'un point de fuite
 - Cas de deux points de fuite
 - œil de l'observateur
 - Apprenons à additionner

Principes

Pour représenter un objet de l'espace on choisit un plan sur lequel on va projeter, qu'on appellera **plan de projection** et un **type de projection** :

Principes

Pour représenter un objet de l'espace on choisit un plan sur lequel on va projeter, qu'on appellera **plan de projection** et un **type de projection** :

- projection parallèle ;

Principes

Pour représenter un objet de l'espace on choisit un plan sur lequel on va projeter, qu'on appellera **plan de projection** et un **type de projection** :

- projection parallèle ;
- projection centrale ;

Difficultés

Mais ceci ne suffit pas. Les dessinateurs, qu'ils soient industriels ou artistiquement, veulent montrer un objet, ou une scène. Et la position de l'objet importe. Du fait des situations multiples, les terminologies peuvent différer d'un auteur à l'autre suivant le point de vue qu'il adopte. Dans la suite on adoptera le point de vue suivant : on fixera dans l'espace euclidien un trièdre trirectangle \mathcal{T} donné par trois vecteurs unitaires \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} , ou encore si on préfère un cube unité, qui constituera le **cube de référence**. On fixera une **projection** parallèle ou centrale sur un **plan de projection** \mathcal{P} .

Bien entendu, tous ces éléments peuvent être choisis dans des positions générales, mais les dessinateurs ayant le souci de la lisibilité et de l'esthétique choisissent souvent des cas particuliers intéressants, c'est-à-dire des positions particulières du cube de référence par rapport au plan de projection. On commencera donc par faire une classification relativement au type de projection utilisée. Puis afin de tenir compte des cas particuliers importants on raffindra cette classification en faisant intervenir la position du cube de référence.

Plan

- 1 Les diverses représentations
 - Principes et difficultés
 - Les projections parallèles
 - Les projections centrales
- 2 Travail sur les projections centrales
 - Remarque d'ordre général
 - Cas d'un point de fuite
 - Cas de deux points de fuite
 - œil de l'observateur
 - Apprenons à additionner

Les diverses projections et perspectives parallèles

Les **projection parallèles** (on dit aussi des **perspectives parallèles** ou encore **axonométries**) sont déterminées par le plan de projection \mathcal{P} , la direction de projection \mathcal{D} qui n'est pas une direction du plan \mathcal{P} . Si M est un point de l'espace, on considère la droite D de direction \mathcal{D} passant par M . Elle coupe le plan \mathcal{P} en m qui est par définition le transformé du point M . Elles sont très employées en dessin industriel. On distingue :

Les diverses projections et perspectives parallèles

Les **projection parallèles** (on dit aussi des **perspectives parallèles** ou encore **axonométries**) sont déterminées par le plan de projection \mathcal{P} , la direction de projection \mathcal{D} qui n'est pas une direction du plan \mathcal{P} . Si M est un point de l'espace, on considère la droite D de direction \mathcal{D} passant par M . Elle coupe le plan \mathcal{P} en m qui est par définition le transformé du point M . Elles sont très employées en dessin industriel. On distingue :

- les projections obliques ;

Les diverses projections et perspectives parallèles

Les **projection parallèles** (on dit aussi des **perspectives parallèles** ou encore **axonométries**) sont déterminées par le plan de projection \mathcal{P} , la direction de projection \mathcal{D} qui n'est pas une direction du plan \mathcal{P} . Si M est un point de l'espace, on considère la droite D de direction \mathcal{D} passant par M . Elle coupe le plan \mathcal{P} en m qui est par définition le transformé du point M . Elles sont très employées en dessin industriel. On distingue :

- les projections obliques ;
- les projections orthogonales ;

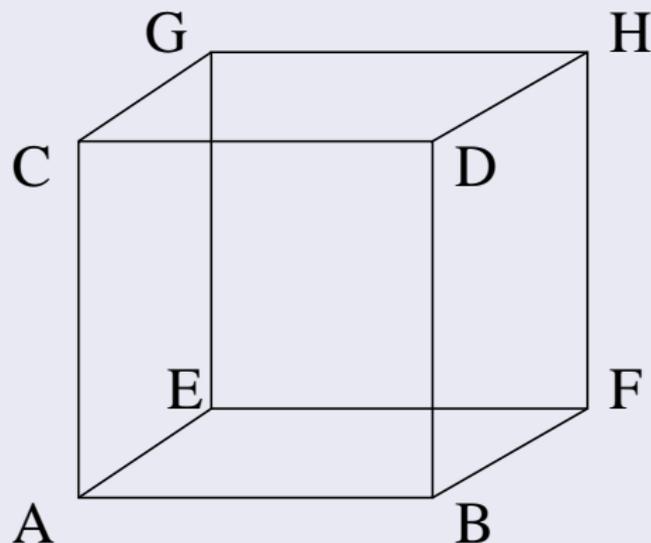
Projections obliques ou perspectives parallèles obliques

Une projection oblique (ou perspective parallèle oblique) est une projection parallèle dont la direction n'est pas perpendiculaire au plan de projection. Bien entendu quand on a dit ça c'est très bien, mais on n'a rien dessiné ! Et l'objet de référence qu'on va dessiner est le cube de référence. Il est clair que dans ce cas certaines positions sont plus simples et plus explicites que d'autres.

Cas particuliers : perspective cavalière du cube de référence

Dans le cas très utilisé où le plan de projection est parallèle à une face du cube de référence, on dit qu'on a une perspective cavalière du cube de référence. Dans ce cas, l'angle des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BF}$ est appelé **l'angle de fuite**. Le rapport des longueurs $\frac{BF}{AB}$ est appelé le **rapport de réduction** (qui peut être plus grand que 1).

Une perspective cavalière



Cas particuliers : perspective cabinet du cube de référence

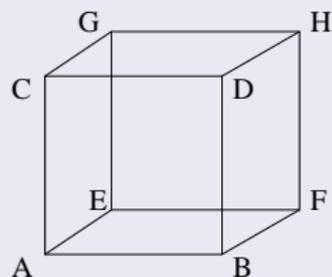
Une perspective cavalière d'un cube dans laquelle le rapport de réduction vaut $1/2$ est appelée une perspective cabinet.

Question : Comment doit être la direction de projection pour avoir la perspective cabinet d'angle de fuite 45° ?

Pour les perspectives cavalières et cabinets, l'angle de fuite choisi est souvent 30° ou 45° . L'angle pifométrique ne marche pas mal non plus.

Question : étant donné un dessin du type de celui-ci, est-ce toujours la projection cavalière d'un cube ? Réponse : oui (Le montrer !)

Est-ce une perspective cavalière ?



Le cas général

En général si on projette en projection parallèle un trièdre $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé on obtient trois vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ qui engendrent le plan de projection et qui définissent 3 directions ainsi que les rapports de réduction $\|\vec{u}\|, \|\vec{v}\|, \|\vec{k}\|$ sur chacune des directions. Réciproquement, on a le théorème de Pohlke :

Théorème

Tout triple de vecteurs engendrant un plan P est l'image à une homothétie près d'un trièdre orthonormé par une projection parallèle sur le plan P .

Les projections orthogonales

Ce sont aussi des projections parallèles, mais la direction de projection est orthogonale au plan de projection. De ce fait il n'est guère intéressant de considérer un plan de projection parallèle à une face, car alors on voit juste une face en vraie grandeur, le reste vient se superposer au tracé de cette face. De ce fait on réserve ces projections aux cas où les axes sont en position générale. Le fait que la projection soit orthogonale évite par exemple les déformations déplorables des sphères.

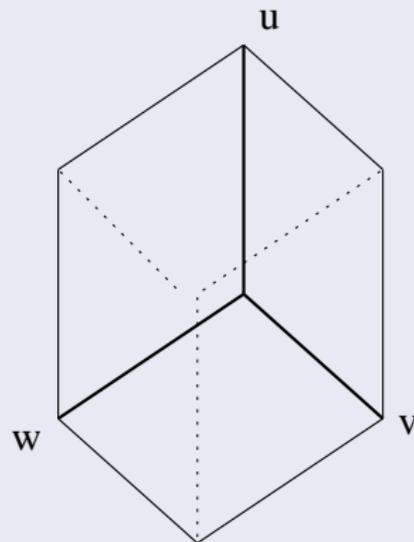
Les projections orthogonales

Puisque on utilise les projections orthogonales essentiellement dans le cas général, on récupère comme il a été dit, 3 directions et les rapports de réductions sur chacune d'elles. On distingue trois cas :

- projections orthogonales isométriques
- projections orthogonales dimétriques
- projections orthogonales trimétriques

suivant que les 3 rapports de réduction sont égaux, que 2 d'entre eux sont égaux, ou qu'ils sont tous différents.

Une projection orthogonale



Une extension du théorème de Pohlke

Théorème

Soit trois droites concourantes distinctes du plan de projection. Il est facile de construire un triangle dont les trois hauteurs sont les droites portées par les trois droites données. Si l'orthocentre de ce triangle est intérieur au triangle, il existe un trièdre trirectangle qui se projette orthogonalement sur ces trois droites.

Il est alors facile de construire les vecteurs projetés (graphiquement ou analytiquement).

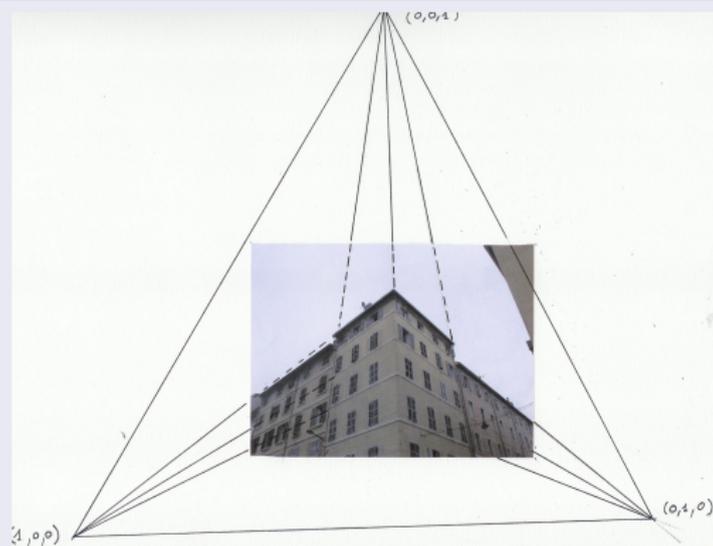
Plan

- 1 Les diverses représentations
 - Principes et difficultés
 - Les projections parallèles
 - Les projections centrales
- 2 Travail sur les projections centrales
 - Remarque d'ordre général
 - Cas d'un point de fuite
 - Cas de deux points de fuite
 - œil de l'observateur
 - Apprenons à additionner

Introduction

Les projections centrales donnent des dessins plus réalistes avec leur effet de perspective. Elles sont utilisées en dessin d'art. Elles reflètent ce qu'on peut obtenir avec un appareil photo.

Une projection centrale



Les différents cas

Pour bien comprendre les constructions, on doit considérer le plan de projection comme un plan projectif. Divers cas se présentent quand on représente le cube de référence (ou le trièdre de référence) :

Les différents cas

Pour bien comprendre les constructions, on doit considérer le plan de projection comme un plan projectif. Divers cas se présentent quand on représente le cube de référence (ou le trièdre de référence) :

- Un point de fuite : c'est le cas où le plan de projection contient un plan du trièdre de référence. Donc seule une direction du trièdre a son point à l'infini représenté sur la carte constituée par le plan de projection.

Les différents cas

Pour bien comprendre les constructions, on doit considérer le plan de projection comme un plan projectif. Divers cas se présentent quand on représente le cube de référence (ou le trièdre de référence) :

- Un point de fuite : c'est le cas où le plan de projection contient un plan du trièdre de référence. Donc seule une direction du trièdre a son point à l'infini représenté sur la carte constituée par le plan de projection.
- Deux points de fuite : le plan de projection contient une seule direction du trièdre de référence

Les différents cas

Pour bien comprendre les constructions, on doit considérer le plan de projection comme un plan projectif. Divers cas se présentent quand on représente le cube de référence (ou le trièdre de référence) :

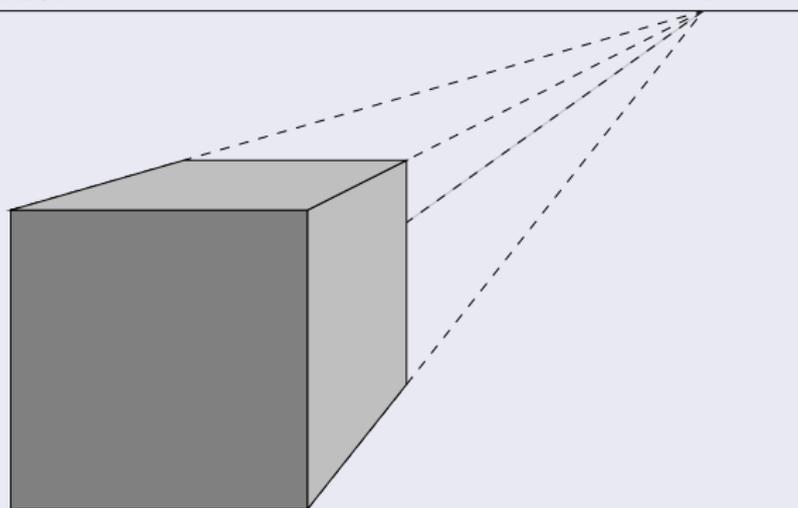
- Un point de fuite : c'est le cas où le plan de projection contient un plan du trièdre de référence. Donc seule une direction du trièdre a son point à l'infini représenté sur la carte constituée par le plan de projection.
- Deux points de fuite : le plan de projection contient une seule direction du trièdre de référence
- Trois points de fuite : le plan de projection ne contient aucune direction du trièdre de référence

Cube en perspective

Un point de fuite

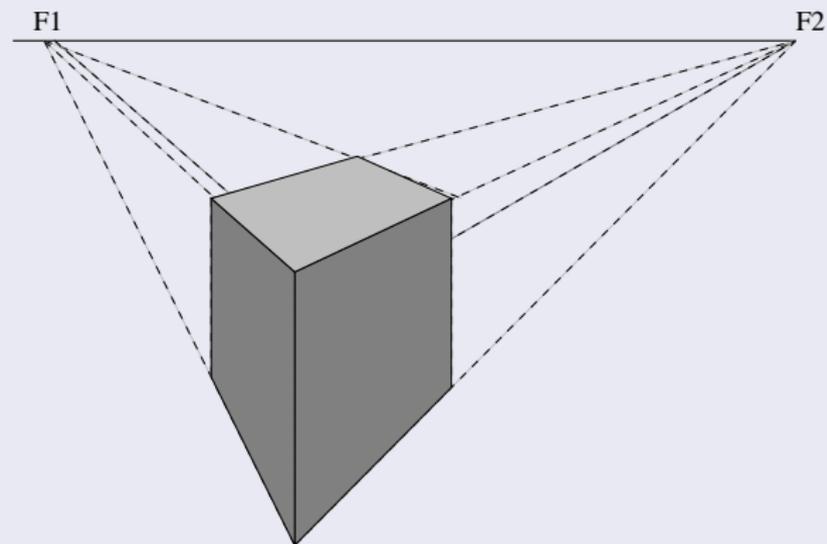
Horizon

F



Cube en perspective

Deux points de fuite



Plan

- 1 Les diverses représentations
 - Principes et difficultés
 - Les projections parallèles
 - Les projections centrales
- 2 Travail sur les projections centrales
 - Remarque d'ordre général
 - Cas d'un point de fuite
 - Cas de deux points de fuite
 - œil de l'observateur
 - Apprenons à additionner

On se restreint à projeter un plan sur un plan

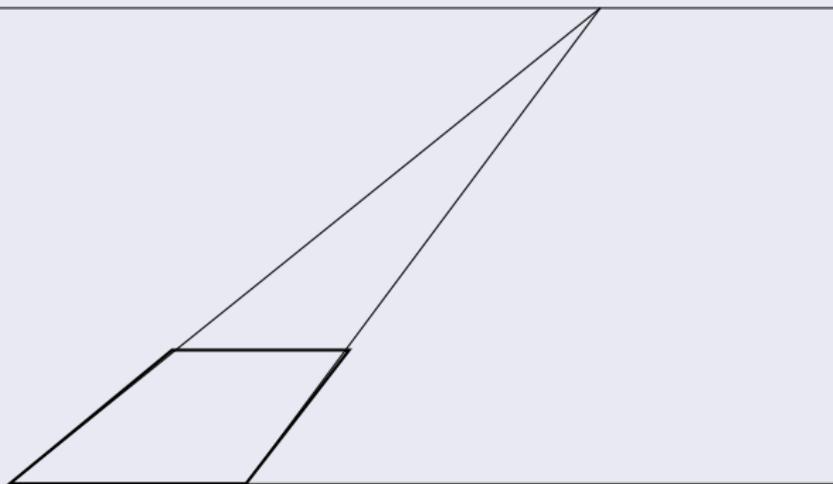
Les faces du cube de référence sont primordiales, aussi une bonne façon de faire est de traiter face par face si bien qu'à chaque fois on se restreint à représenter des motifs d'un plan sur le plan de projection. Dans la suite nous allons regarder ce qui se passe sur le sol et nous poser des problèmes à partir du tracé d'un carrelage.

Plan

- 1 Les diverses représentations
 - Principes et difficultés
 - Les projections parallèles
 - Les projections centrales
- 2 Travail sur les projections centrales
 - Remarque d'ordre général
 - **Cas d'un point de fuite**
 - Cas de deux points de fuite
 - œil de l'observateur
 - Apprenons à additionner

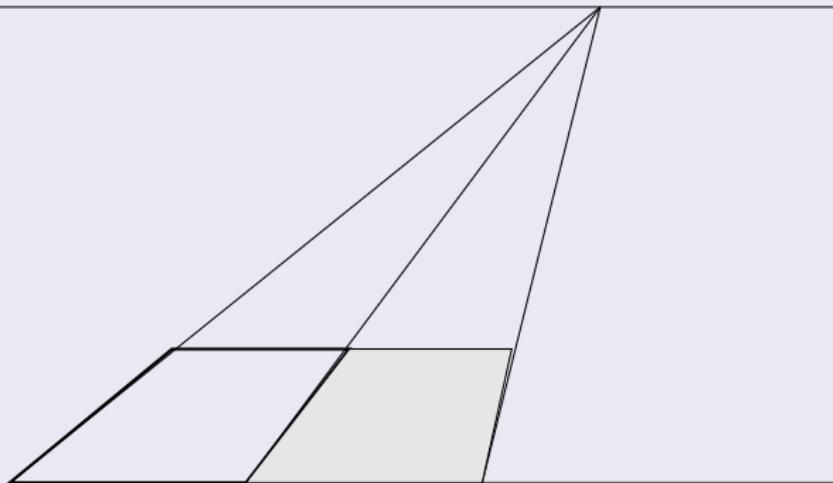
Construction d'un carrelage à partir d'un carreau

carreau de référence



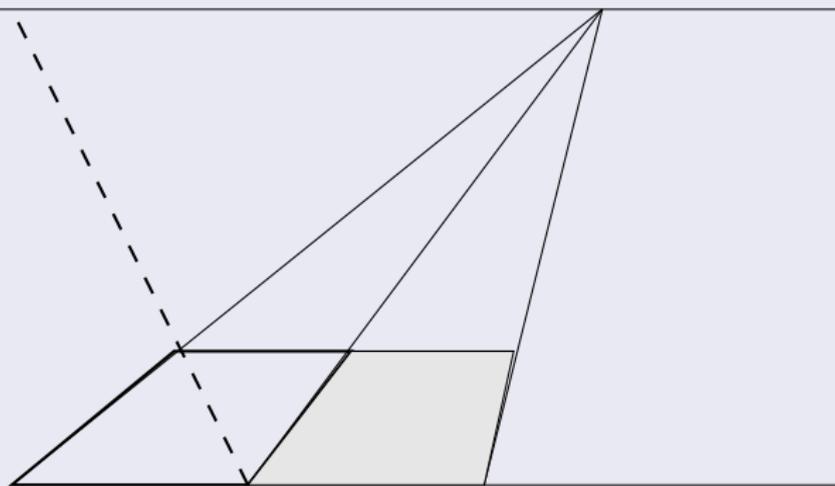
Construction d'un carrelage à partir d'un carreau

carreau à droite



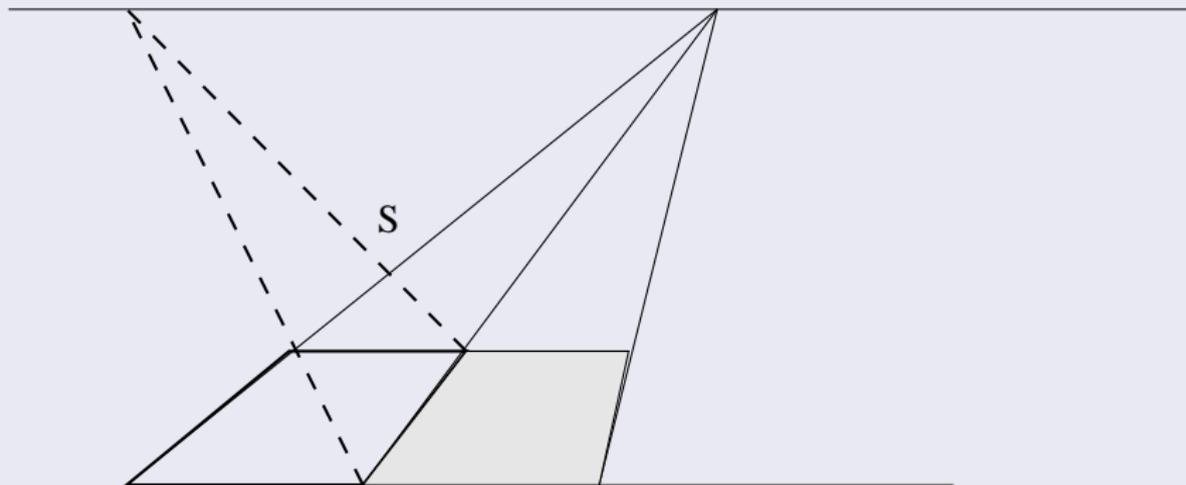
Construction d'un carrelage à partir d'un carreau

carreau en arrière phase 1 (diagonale du carreau de référence)



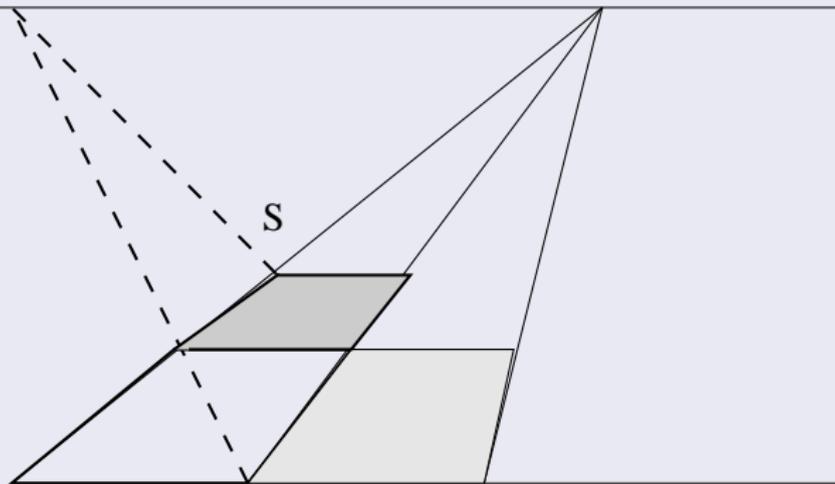
Construction d'un carrelage à partir d'un carreau

carreau en arrière phase 2 (diagonale du carreau arrière)



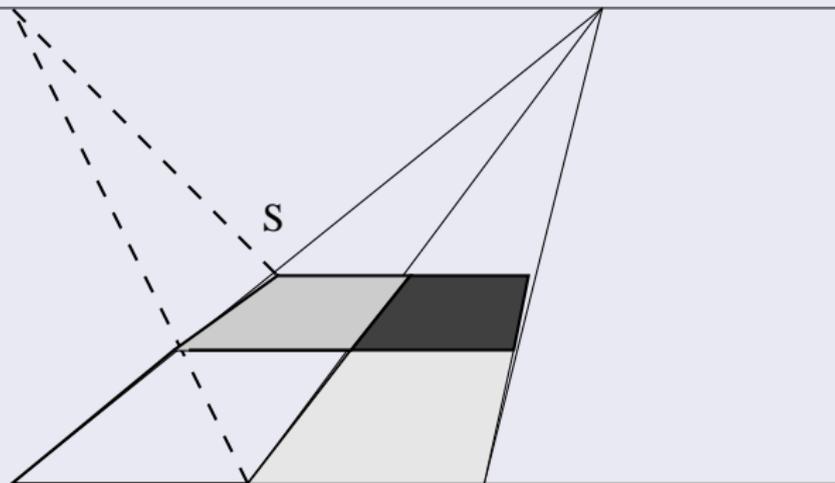
Construction d'un carrelage à partir d'un carreau

carreau arrière complet



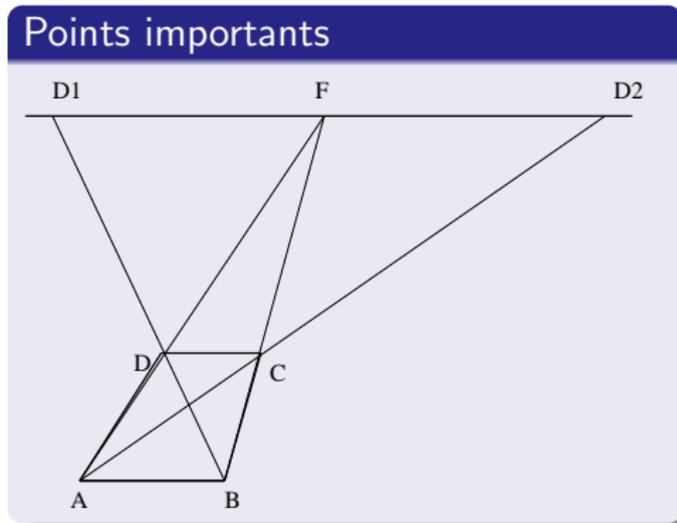
Construction d'un carrelage à partir d'un carreau

Bloc de carreaux



Points mis en jeu

F est le point de fuite principal.
 $D1$ est un point de distance.
 $D2$ est l'autre point de distance.
 La droite contenant F , $D1$, $D2$ est la droite de l'infini (appelée aussi ligne d'horizon en dessin d'art).



Plan

- 1 Les diverses représentations
 - Principes et difficultés
 - Les projections parallèles
 - Les projections centrales
- 2 Travail sur les projections centrales
 - Remarque d'ordre général
 - Cas d'un point de fuite
 - **Cas de deux points de fuite**
 - œil de l'observateur
 - Apprenons à additionner

Remarques préliminaires

En géométrie projective la droite à l'infini peut être dessinée n'importe où. Cependant si nous voulons représenter un paysage terrestre et que nous sommes debout, bien plantés sur nos deux pieds et si nous regardons droit devant nous, la droite à l'infini, qui est la ligne d'horizon, sera dessinée horizontalement. Comme on le verra, sa position est liée à la hauteur de l'œil de l'observateur. Les deux points de fuite seront bien entendu sur cette droite.

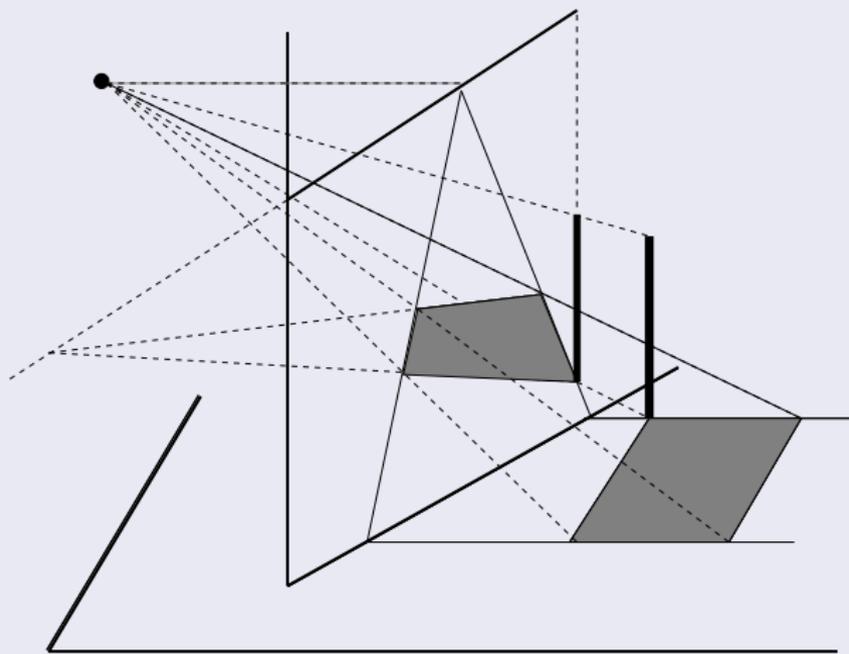
Plan

- 1 Les diverses représentations
 - Principes et difficultés
 - Les projections parallèles
 - Les projections centrales
- 2 Travail sur les projections centrales
 - Remarque d'ordre général
 - Cas d'un point de fuite
 - Cas de deux points de fuite
 - œil de l'observateur
 - Apprenons à additionner

Le plan qui passe par l'œil de l'observateur et qui est parallèle au sol coupe le plan de projection suivant la ligne d'horizon. Ceci nous permet de mesurer les hauteurs connaissant la hauteur de l'œil de l'observateur.

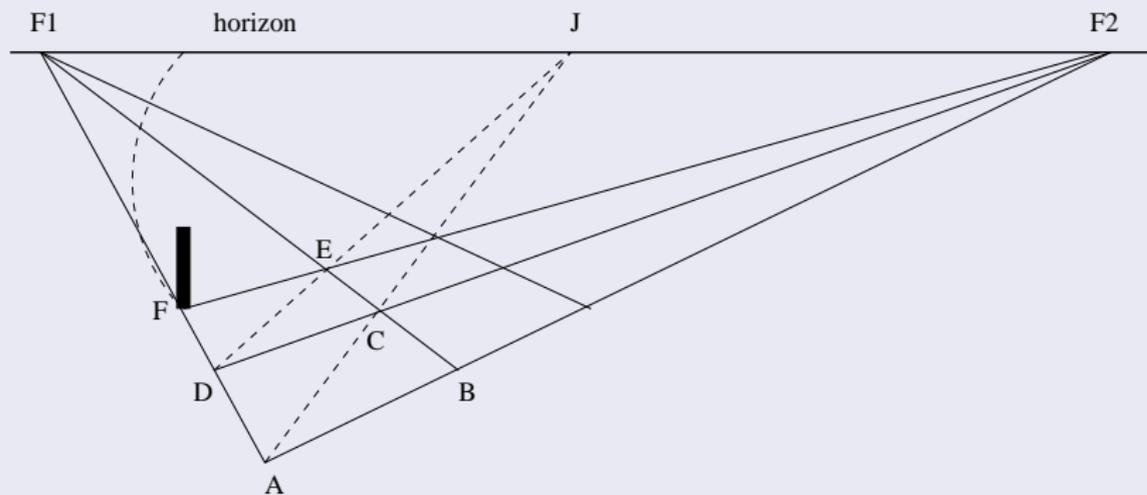
Vision 3D

Bon pied bon œil



Hauteur d'un piquet

Quelle est la hauteur du piquet ?



Plan

- 1 Les diverses représentations
 - Principes et difficultés
 - Les projections parallèles
 - Les projections centrales
- 2 Travail sur les projections centrales
 - Remarque d'ordre général
 - Cas d'un point de fuite
 - Cas de deux points de fuite
 - œil de l'observateur
 - Apprenons à additionner

Problème de l'addition

On fixe sur une ligne de fuite dont on connaît le point à l'infini F l'origine A et deux points X et Y , il s'agit de déterminer le point $Z = X + Y$.

Remarque : il n'est pas utile de connaître la position du point unité (pourquoi?). Le spectateur pourra-t-il construire le point d'ordonnée produit de celle de X par celle de Y ? (nous le saurons dans le prochaine épisode à voir dans toutes les bonnes salles).

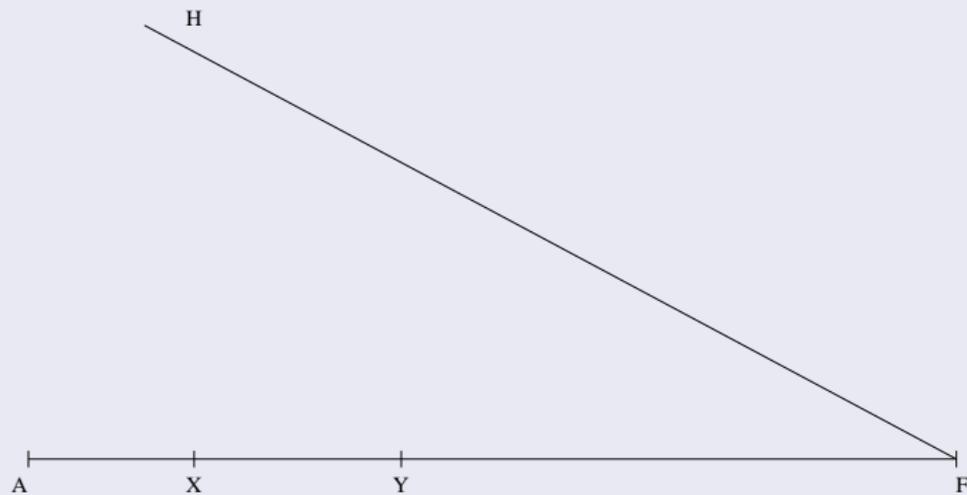
Addition sur une ligne de fuite

Le challenge



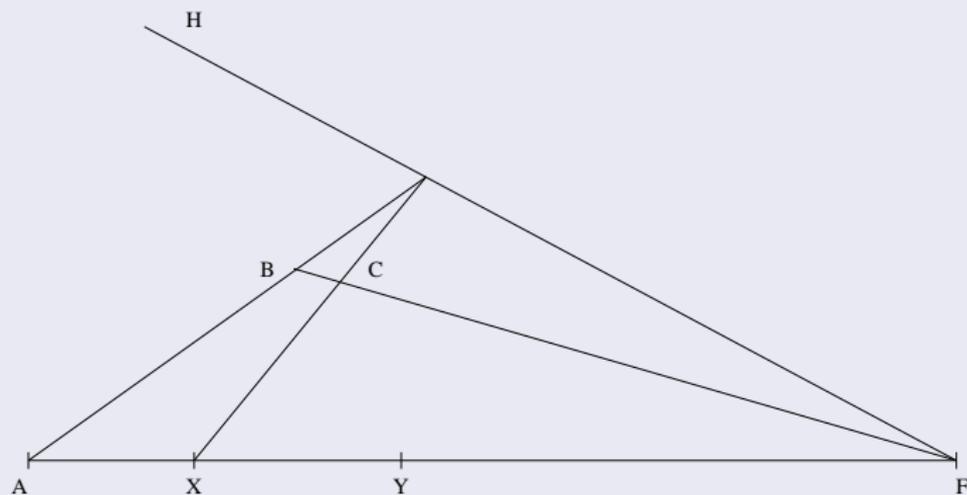
Addition sur une ligne de fuite

Fixons un horizon



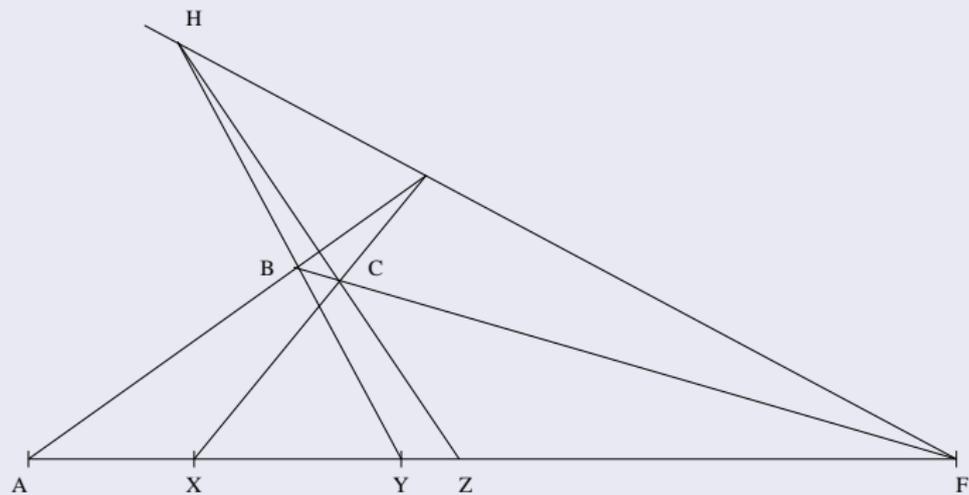
Addition sur une ligne de fuite

Un parallélogramme



Addition sur une ligne de fuite

La somme cherchée



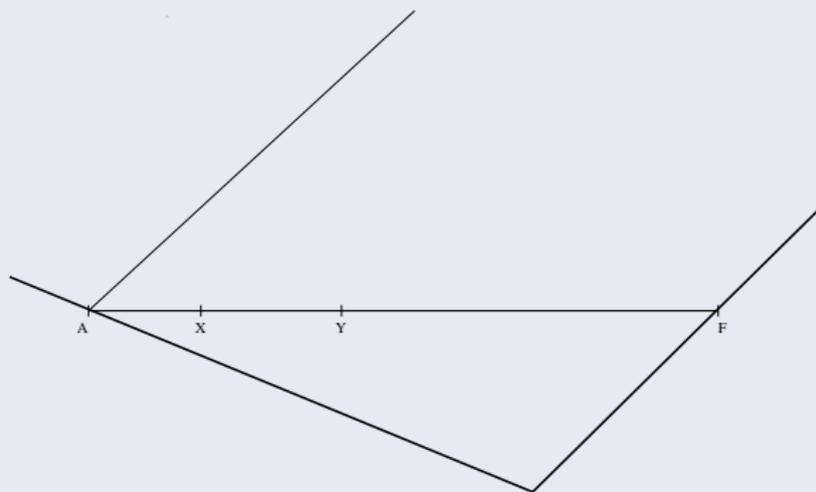
On recommence autrement

Le challenge



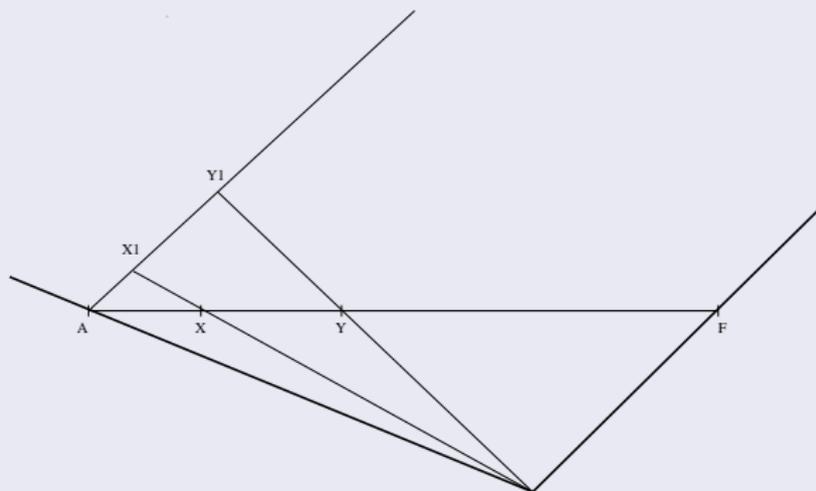
On recommence autrement

Modèle affine de la ligne de fuite



On recommence autrement

Retranscription du challenge sur le modèle affine



Fin de partie

La somme cherchée

