

Géométrie projective

Robert Rolland

Table des matières

1	Bases de la géométrie projective	5
1.1	Introduction	5
1.2	Espace projectif	6
1.2.1	Construction vectorielle	6
1.2.2	Sous-espaces projectifs	8
1.2.3	Les coordonnées homogènes	10
1.2.4	Repère projectif	12
1.2.5	Dessins. Les diverses cartes	14
1.3	Applications projectives	15
1.3.1	Construction à partir des applications linéaires	15
1.3.2	Structure de groupe des homographies d'un espace projectif	17
1.3.3	Expression à l'aide d'un repère projectif	18
1.3.4	Trace sur une carte affine d'une transformation projective	21
2	Le fonctionnement de la géométrie projective	23
2.1	Les théorèmes fondamentaux de la géométrie projective	23
2.1.1	Le théorème de Desargues	23
2.1.2	Le théorème de Pappus	24
2.1.3	Opérations algébriques sur une droite projective	26
2.2	Géométrie projective sur la droite projective	29
2.2.1	Quotient des coordonnées projectives d'un point	29
2.2.2	Le birapport de quatre points alignés	32
2.2.3	Un exemple important : les perspectives	33
2.2.4	Construction des images d'une homographie	37
2.2.5	Les involutions de la droite projective	39
2.2.6	Exemple concernant la division harmonique	42
2.3	La dualité	43

2.3.1	Espace projectif dual	43
2.3.2	Exemples de situations duales	45
2.4	Exemples d'espaces projectifs et de transformations projectives	47
2.4.1	Espaces d'hyperplans	47
2.4.2	Espaces de cercles	48
2.4.3	Espaces de coniques	49
2.4.4	Un peu d'optique	50
3	Les coniques en géométrie projective	53
3.1	Les coniques projectives	53
3.1.1	Avertissement sur les courbes algébriques	53
3.1.2	La dualité revisitée	55
3.2	La structure projective d'une conique	62
3.2.1	Définition de la structure	62
3.2.2	Birapport	66
3.2.3	Théorème de Pascal et de Brianchon	66
3.2.4	Constructions de points et de tangentes	69
3.2.5	Conique à structure projective plongée dans le plan . .	72

Chapitre 1

Bases de la géométrie projective

1.1 Introduction

La géométrie projective est une partie très ancienne des mathématiques dont on trouve trace dans les travaux d'Apollonius (-190) (sections coniques), de Pappus (fin du 3^e siècle) puis plus tard à la Renaissance avec la notion de perspective et surtout à partir de 1600 avec Gérard Desargues (1591-1661), Blaise Pascal (1623-1662), Philippe de La Hire (1640-1718). Nous renvoyons au livre de M. Kline ([6], ch. 4, ch. 5, ch. 14) pour un historique détaillé des débuts de la géométrie projective.

Cette partie des mathématiques s'est développée avec, en particulier, les problèmes posés par l'astronomie, la perspective en dessin, l'optique.

Actuellement les espaces projectifs offrent le cadre naturel de travail pour divers domaines en plein essor. On peut citer par exemple la géométrie algébrique.

De plus des applications récentes en font un usage important. Le domaine du graphisme sur ordinateur en est une illustration parmi d'autres. Le domaine des codes correcteurs d'erreurs utilise aussi largement la géométrie projective sur des corps finis.

Ce cours essaie de présenter les objets et les méthodes de la géométrie projective, en éclairant des résultats souvent anciens grâce à des outils mathématiques plus récents comme l'algèbre linéaire, les formes quadratiques, les groupes.

J'ai utilisé comme documentation les excellents livres de M. Berger ([1] et

[2]) et de P. Samuel ([8] ou [9]). Le lecteur pourra se référer à ces livres pour une étude plus approfondie que celle présentée ici.

Le livre de N. Éfimov [5] fournit un intéressant point de vue qui concerne les liens entre géométrie projective et géométries non euclidiennes.

On trouvera dans [4] un exposé un peu plus ancien.

Enfin les articles [3] et [7] trouvés sur le web donnent une présentation intéressante, adaptée aux problèmes de l'imagerie informatique.

Je remercie Patrick Soubeyrand, qui a lu les premières versions de ce document, et m'a suggéré de nombreuses corrections.

1.2 Espace projectif

1.2.1 Construction vectorielle

Soit E_{n+1} un espace vectoriel de dimension $n + 1$ sur le corps K (où K est \mathbb{R} ou \mathbb{C}).

On définit sur $E_{n+1} \setminus \{0\}$ la relation $x\mathcal{R}y$ si et seulement s'il existe un scalaire $\lambda \neq 0$ tel que $y = \lambda x$.

Cette relation est une relation d'équivalence, c'est-à-dire que pour tout x , tout y et tout z on a

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}x, \\ x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x \\ (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z. \end{aligned}$$

Les classes d'équivalence sont donc les **directions** de E_{n+1} .

L'ensemble des classes d'équivalence est appelé **espace projectif** de dimension n construit à partir de E_{n+1} , et sera noté $\mathbb{P}(E_{n+1})$. C'est donc l'ensemble des directions, ou si on veut aussi l'ensemble des droites vectorielles de E_{n+1} .

Remarque : Comme E_{n+1} est isomorphe en tant qu'espace vectoriel à K^{n+1} on pourra considérer dans de nombreux cas qu'on travaille en fait sur ce dernier espace, auquel cas l'espace projectif correspondant est noté $\mathbb{P}_n(K)$.

Remarque : Dans de nombreux problèmes, en particulier les problèmes d'intersection, on a intérêt à supposer que $K = \mathbb{C}$. Si le problème traité doit envisager que $K = \mathbb{R}$, alors on peut commencer par regarder ce qu'il se passe

pour $K = \mathbb{C}$ afin de bien comprendre la situation, puis étudier les conclusions que l'on peut en tirer lorsque le corps de base est restreint à \mathbb{R} .

Remarque : Si $n = 0$ alors $\mathbb{P}(E_{n+1})$ ne contient qu'un point.

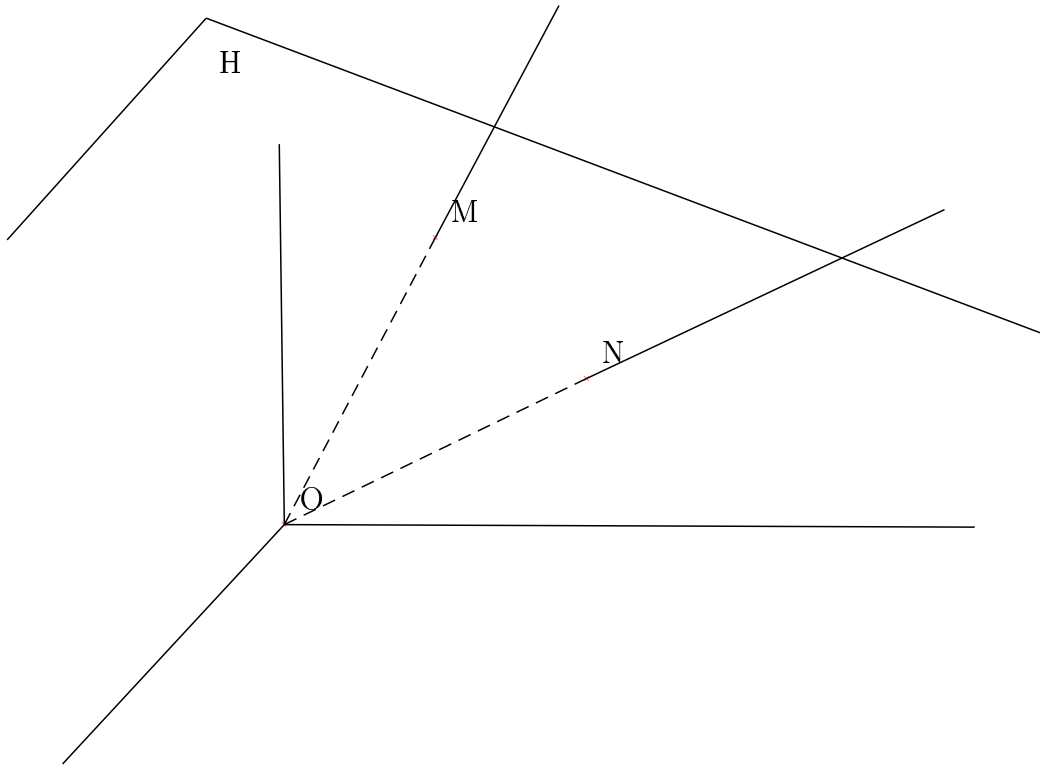


FIG. 1.1 – Espace affine, espace projectif

Supposons $n \geq 1$. Soit H un hyperplan de E_{n+1} qui ne passe pas par l'origine (cf. figure 1.1), alors on obtient une représentation partielle de l'espace projectif en prenant les intersections des droites vectorielles de l'espace E_{n+1} avec l'hyperplan H . Ceci donne une **carte** de $\mathbb{P}(E_{n+1})$, à ceci près que les points de l'espace projectif correspondant aux directions parallèles à H ne

sont pas représentés sur cette carte. Ainsi l'espace projectif $\mathbb{P}(E_{n+1})$ apparaît maintenant comme l'espace affine H (qui est bien de dimension n) auquel se rajoutent les points correspondant aux directions parallèles à H , appelés **points à l'infini** de H . Nous allons voir dans le paragraphe suivant quelle structure on peut donner aux points à l'infini.

Remarque : La notion de point à l'infini est affine. Dans l'espace projectif lui-même tous les points ont le même statut, et il n'existe pas de points spéciaux. Il n'y a de notion de point à l'infini que par rapport à une carte. Ces points se dessinent alors à distance finie sur une autre carte.

1.2.2 Sous-espaces projectifs

Soit π l'application de $E_{n+1} \setminus \{0\}$ sur $\mathbb{P}(E_{n+1})$ qui à un vecteur non nul fait correspondre sa classe. Si F est un sous-espace de E_{n+1} de dimension $1 \leq k \leq n + 1$ alors on vérifie immédiatement que $\pi(F \setminus \{0\})$ n'est rien d'autre que l'espace projectif $\mathbb{P}(F)$. Ce sera par définition le **sous-espace projectif** de $\mathbb{P}(E_{n+1})$ associé au sous-espace vectoriel F . Sa dimension est $k - 1$. Si F est de dimension 1 (c'est-à-dire si F est une droite vectorielle) alors le sous-espace projectif associé est un point, si F est de dimension n alors le sous-espace projectif associé est de dimension $n - 1$, on dit alors que c'est un **hyperplan projectif**.

Lorsque deux sous-espaces F_1 et F_2 de E_{n+1} ont une intersection qui n'est pas réduite au vecteur nul, alors on peut associer un sous-espace projectif à $F_1 \cap F_2$.

Nous dirons qu'une famille de points est **projectivement indépendante**, ou encore **projectivement libre**, si c'est l'image par π d'une famille de vecteurs linéairement indépendants.

Revenons à la section précédente où nous avons représenté les points de l'espace projectif comme les points de l'hyperplan affine H auquel il faut rajouter les points à l'infini de H qui correspondent aux directions parallèles à H . Les points à l'infini de H sont donc associés au sous-espace vectoriel F dont H est le translaté. En conséquence les points à l'infini de H sont les points d'un sous-espace projectif de dimension $n - 1$ (rappelons que nous sommes dans le cas où $n \geq 1$).

Ainsi nous pouvons écrire :

- Si E_{n+1} est une droite vectorielle (cas $n = 0$), alors l'espace projectif correspondant est un point.

- Si E_{n+1} est un plan vectoriel (cas $n = 1$), alors l'espace projectif correspondant est une droite projective qui se décompose en une droite affine à laquelle on ajoute un point à l'infini (cf. figure 1.2).
- Si E_{n+1} est un espace vectoriel de dimension 3 (cas $n = 2$), alors l'espace projectif correspondant est un plan projectif qui se décompose en un plan affine auquel on ajoute une droite projective à l'infini, c'est-à-dire une droite affine plus un point à l'infini.
- Plus généralement on peut écrire qu'un espace projectif de dimension $n \geq 1$ peut se représenter comme la réunion d'un espace affine de dimension n et d'un espace projectif de dimension $n - 1$ (c'est-à-dire un hyperplan projectif).

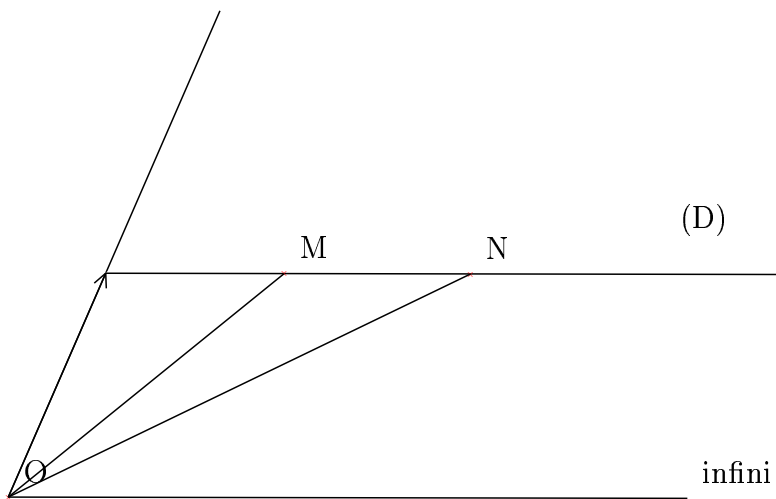


FIG. 1.2 – Droite affine, droite projective

1.2.3 Les coordonnées homogènes

Système de coordonnées projectives

Nous allons définir sur un espace projectif un **système de coordonnées homogènes** par le processus suivant. Puisque nous avons construit un espace projectif à partir d'un espace vectoriel, nous allons choisir une base de cet espace vectoriel et regarder comment nous pouvons repérer les points de l'espace projectif.

Soit donc (e_1, \dots, e_{n+1}) une base de E_{n+1} . Soit x un vecteur non nul de E_{n+1} , ses coordonnées sont (x_1, \dots, x_{n+1}) où les x_i sont non tous nuls.

Le point correspondant M de l'espace projectif est la classe des points dont les coordonnées sont de la forme $(\lambda x_1, \dots, \lambda x_{n+1})$ où $\lambda \neq 0$. On peut donc, de la même façon que pour les vecteurs, définir une relation d'équivalence sur les uples de coordonnées. On notera $(x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1})$ la classe de (x_1, \dots, x_{n+1}) et on dira que ce sont les **coordonnées homogènes** ou encore les **coordonnées projectives** du point M . Ainsi par exemple $(1 : 0 : 1) = (2 : 0 : 2)$ et représentent le même point. Remarquons que $(0 : 0 : 0)$ n'existe pas. Le qualificatif "**homogène**" fait référence à l'égalité

$$(\lambda x_1 : \dots : \lambda x_{n+1}) = (x_1 : \dots : x_{n+1}).$$

Remarque : Si on était parti de la base $(\lambda e_1, \dots, \lambda e_{n+1})$ au lieu de la base (e_1, \dots, e_{n+1}) , on aurait obtenu le même système de coordonnées homogènes. Au contraire, si deux bases ne sont pas proportionnelles, alors il existe des points de l'espace projectif qui n'ont pas les mêmes coordonnées homogènes dans les deux repères. Donc les deux systèmes sont distincts.

Soit

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_{n+1} X_{n+1} = 0,$$

l'équation d'un hyperplan dans E_{n+1} muni de la base choisie. Si

$$(X_1, X_2, \dots, X_{n+1})$$

est un point de cet hyperplan, il en est de même de

$$(\lambda X_1, \lambda X_2, \dots, \lambda X_{n+1}).$$

On peut donc dire que

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_{n+1} X_{n+1} = 0,$$

est l'équation d'un sous-espace projectif de dimension $n - 1$.
Par exemple si $n = 2$, l'équation d'une droite est de la forme

$$aX + bY + cZ = 0.$$

La droite projective en question est l'ensemble des points $(X : Y : Z)$ tels que l'équation précédente soit vérifiée.

Coordonnées homogènes, coordonnées affines

Regardons ce qu'il se passe en introduisant comme précédemment un espace affine. Considérons l'espace affine H défini par l'équation

$$X_{n+1} = 1.$$

Choisissons dans H le repère affine suivant : l'origine est l'intersection de H avec la droite portée par le vecteur e_{n+1} et les vecteurs de base sont définis par (e_1, \dots, e_n) . Ainsi à tout point $(X_1 : X_2 : \dots : X_{n+1})$ de l'espace projectif tel que $X_{n+1} \neq 0$ on fait correspondre le point de coordonnées

$$\left(\frac{X_1}{X_{n+1}}, \frac{X_2}{X_{n+1}}, \dots, \frac{X_n}{X_{n+1}} \right),$$

de l'espace affine H , muni du repère indiqué. Les points pour lesquels $X_{n+1} = 0$ sont les points à l'infini.

Cas des équations polynômiales

Soit $P(X_1, X_2, \dots, X_{n+1})$ un polynôme homogène à $n+1$ variables et à coefficients dans K . Compte tenu de l'homogénéité du polynôme on peut parler de l'ensemble des points de l'espace projectif tels que $P(X_1, X_2, \dots, X_{n+1}) = 0$.

En introduisant comme dans la section précédente l'espace affine H , l'ensemble des points tels que $P(X_1, X_2, \dots, X_{n+1}) = 0$ est constitué des points de l'espace affine H tels que $Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ où Q est obtenu à partir de P en prenant $X_{n+1} = 1$, et des points à l'infini $R(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0$, où R est obtenu à partir de P en prenant $X_{n+1} = 0$. Par exemple la conique projective

$$X^2 - XT - Y^2 - T^2 = 0,$$

devient la conique affine

$$x^2 - x - y^2 - 1 = 0,$$

et une partie à l'infini

$$X^2 - Y^2 = 0,$$

c'est-à-dire les deux points $(1 : 1 : 0)$ et $(1 : -1 : 0)$.

Réciproquement, si on a une équation affine $Q(x_1, \dots, x_n) = 0$, on peut considérer que la partie affine définie par cette équation n'est qu'un morceau d'un ensemble plus grand qui contient en plus des points à l'infini. Le tout étant obtenu à partir du polynôme P , homogénéisé de Q , grâce à l'équation $P(X) = 0$. Par exemple si on considère

$$x^2 + xy + y^3 - 2 = 0,$$

on homogénéise

$$X^2T + XYT + Y^3 - 2T^3 = 0,$$

la partie à l'infini étant alors obtenue avec $T = 0$, et donc $Y^3 = 0$. On a un seul point à l'infini $(1 : 0 : 0)$.

1.2.4 Repère projectif

Si on veut repérer les points d'un espace projectif par rapport à des points fixés dans cet espace projectif, c'est-à-dire introduire une notion de **repère projectif**, que faut-il faire? Jusqu'à présent on a défini les coordonnées homogènes en utilisant une base de l'espace vectoriel dont on est parti. Ici on voudrait une définition plus intrinsèque. Regardons pour commencer ce qu'il se passe dans le cas $n = 2$. Si on considère 3 points projectivement indépendants, ces trois points sont 3 directions de E_3 . Si on prend une base formée d'un vecteur non nul de chaque direction (e_1, e_2, e_3) on a par rapport à cette base pour tout point M des coordonnées homogènes $(X : Y : T)$. Prenons maintenant la base $(2e_1, e_2, e_3)$. Ces vecteurs de base correspondent exactement aux mêmes points de l'espace projectif que les précédents. Pourtant maintenant les coordonnées projectives de ce même point M ne sont plus proportionnelles aux précédentes. Ceci montre **qu'il n'est pas suffisant** de se donner $n + 1$ points projectivement indépendants dans un espace projectif de dimension n pour avoir un repère projectif. Il faut en fait rajouter une information, par exemple la position du point $(1 : 1 : \dots : 1)$, qu'on appelle **point unité**.

Théorème 1.2.1 Soit un espace projectif $\mathbb{P}(E_{n+1})$ de dimension n . Considérons une famille $\mathcal{R} = (M_1, M_2, \dots, M_{n+2})$ ayant $n + 2$ points, et telle que toutes ses sous-familles constituées de $n + 1$ points soient projectivement libres. Alors, il existe un système de coordonnées projectives et un seul sur $\mathbb{P}(E_{n+1})$ tel que les $n + 2$ points de la famille \mathcal{R} aient pour coordonnées homogènes respectives $(1 : 0 : \dots : 0)$, $(0 : 1 : 0 : \dots : 0)$, \dots , $(0 : \dots : 0, 1)$, $(1 : 1 : \dots : 1)$.

Preuve. Essayons de reconstruire dans l'espace vectoriel E_{n+1} une base de telle sorte que les $n + 2$ points donnés aient pour coordonnées projectives les valeurs indiquées.

On obtient ainsi $n + 1$ directions imposées pour les $n + 1$ vecteurs de base cherchés. Prenons sur chaque direction un vecteur quelconque non nul ϵ_i . Soit alors un vecteur m_{n+2} représentant le point M_{n+2} . Ce vecteur se décompose sur la base $(\epsilon_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ de la façon suivante :

$$m_{n+2} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \epsilon_i.$$

La condition requise sur les coordonnées homogènes du point M_{n+2} ne laisse plus qu'une seule possibilité (à une constante d'homogénéité près) : prendre $e_i = \lambda_i \epsilon_i$.

La base $(e_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ convient et elle est unique à une constante d'homogénéité près. \square

Définition 1.2.2 La famille \mathcal{R} sera appelée **repère projectif**.

Notation : Un repère projectif étant donné, le point M de coordonnées homogènes $(X_1 : \dots : X_{n+1})$ sera parfois noté

$$M = X_1 M_1 + X_2 M_2 + \dots + X_{n+1} M_{n+1}.$$

Ceci est cohérent avec les valeurs des coordonnées des M_i .

Exemple : Un repère projectif de la **droite projective** est donné par **trois points** : le point $A = (1 : 0)$ (point à l'infini), le point $B = (0 : 1)$ et le point $U = (1 : 1)$. Tout point M a des coordonnées projectives de la forme $(X : T)$ et peut aussi s'écrire :

$$M = XA + TB.$$

1.2.5 Dessins. Les diverses cartes

Pour dessiner ou représenter l'espace projectif, on a vu qu'on pouvait employer une carte affine. On a vu que pour cela on plaçait un hyperplan affine H qui ne passe pas par l'origine dans l'espace E_{n+1} . Le point de H représentant un point M de l'espace projectif est l'intersection de H (si elle existe) avec la droite vectorielle correspondant à M . Evidemment les points à l'infini de H (i.e. les directions parallèles à H) ne sont pas représentés sur cette carte. Mais on peut alors choisir une autre carte H_1 de telle sorte que les points à l'infini de H apparaissent sur H_1 . En particulier reprenons sur l'exemple simple du plan projectif la visualisation d'un repère projectif (A, B, C, D) où $A = (1 : 0 : 0)$, $B = (0 : 1 : 0)$, $C = (0 : 0 : 1)$, $D = (1 : 1 : 1)$. Si on choisit la carte définie par l'hyperplan affine $T = 1$ (cf. figure 1.3), alors la droite $T = 0$ est la droite à l'infini. Seuls les points C et D apparaissent sur la carte. Mais si on dessine le repère sur la carte définie par le plan affine $X + Y + T = 3$ (cf. figure 1.4), alors les 4 points du repère projectif sont dessinés sur la carte.

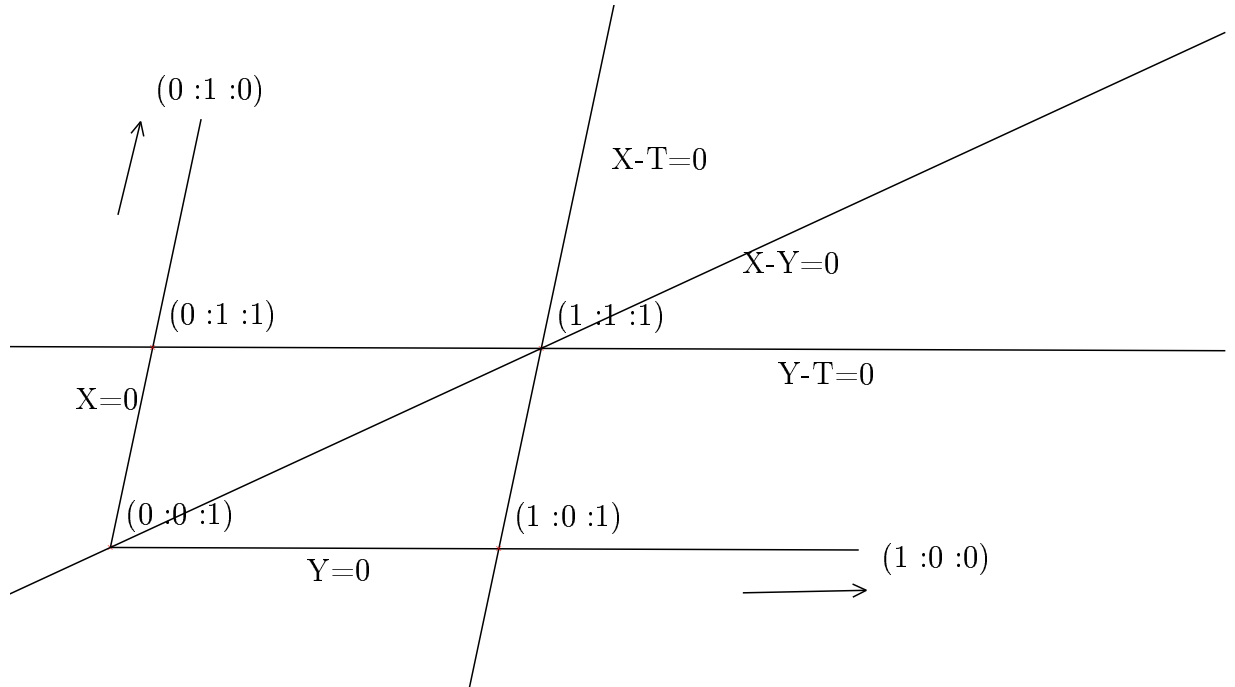


FIG. 1.3 – Un repère projectif dessiné dans un plan affine adapté

Considérons deux droites projectives D_1 et D_2 dans le plan projectif (cf. figure

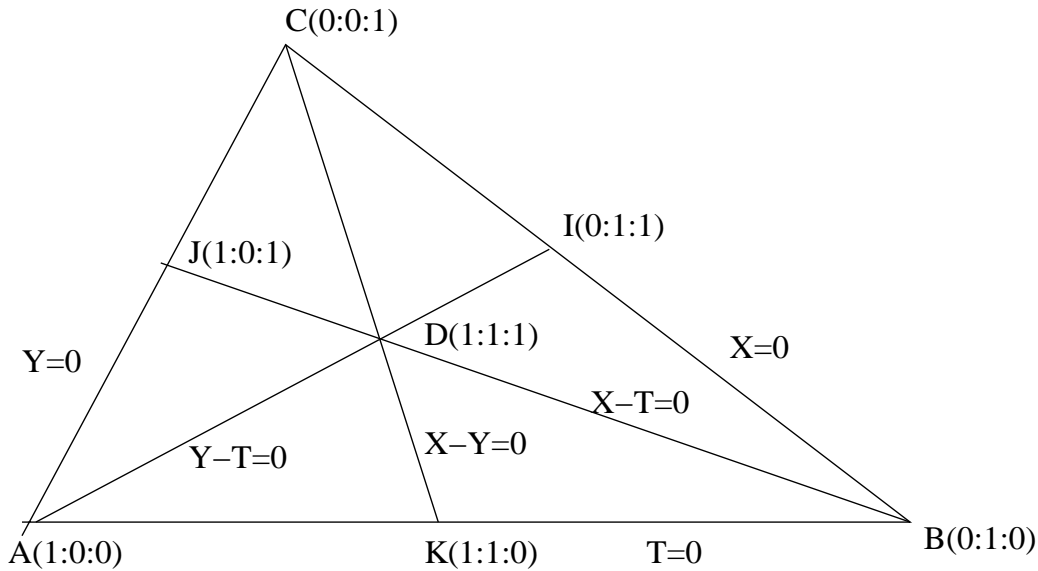


FIG. 1.4 – Un repère projectif dessiné dans le plan affine

1.5). Ces deux droites sont les ensembles des directions des droites vectorielles appartenant à deux plans vectoriels V_1 et V_2 qui se coupent suivant la droite vectorielle U . Si on considère la carte constituée par un plan affine H parallèle à U , alors les droites affines correspondant à D_1 et D_2 sont parallèles et U est le point à l'infini commun aux deux droites. Si au contraire on considère un plan affine H_1 qui coupe U en I alors sur ce plan affine les droites D_1 et D_2 se coupent en I qui représente U . Autrement dit, des droites projectives se coupent toujours, mais sur une carte affine elles peuvent être parallèles, auquel cas elles se coupent en un point à l'infini de la carte.

1.3 Applications projectives

1.3.1 Construction à partir des applications linéaires

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectives $m + 1$ et $n + 1$. Soit f une **application linéaire injective** de E dans F (donc $m \leq n$). L'image de toute **droite vectorielle épointée** (i.e. sans zéro) D de E est une droite vectorielle épointée D' de F . On définit donc grâce à f l'application $p(f)$ de $\mathbb{P}(E)$ dans $\mathbb{P}(F)$ qui au point M de $\mathbb{P}(E)$ donné par la direction

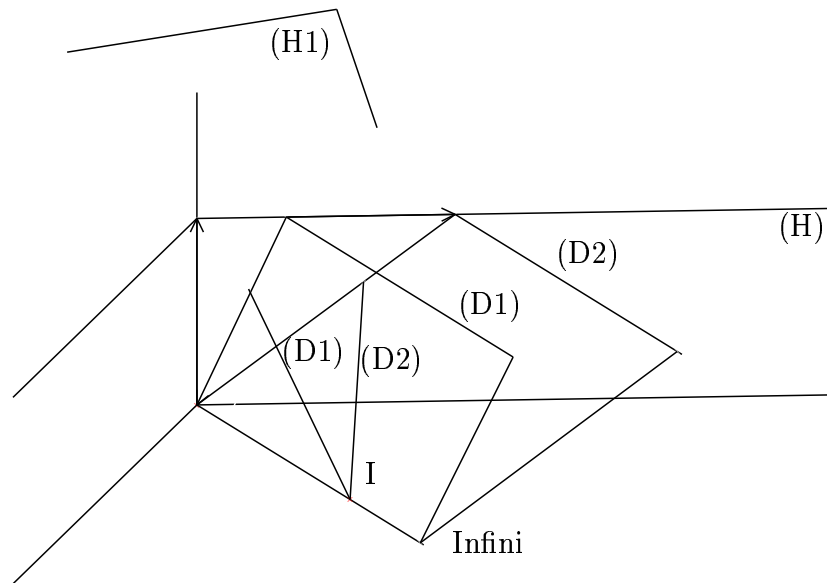


FIG. 1.5 – Des droites parallèles se coupent à l’infini

D fait correspondre le point M' de $\mathbb{P}(F)$ donné par la direction D' . Une telle application sera appelée **application projective**. Lorsque $m = n$, $p(f)$ est bijective, on dit dans ce cas qu'on a une **transformation projective** ou encore une **homographie**. Ce sont ces transformations que nous étudierons en priorité.

Notation : Dans toute la suite de ce cours nous noterons $p(f)$ l'homographie associée à l'application linéaire f .

Théorème 1.3.1 *Toute homographie transforme un sous-espace projectif en un sous-espace projectif de même dimension.*

Preuve. Par définition, ceci provient de la même propriété sur le comportement des applications linéaires bijectives vis à vis des sous-espaces vectoriels.

□

1.3.2 Structure de groupe des homographies d'un espace projectif

Soit E un espace vectoriel de dimension $n + 1$. Nous étudions maintenant les homographies de $\mathcal{P} = \mathbb{P}(E)$ dans lui-même.

Théorème 1.3.2 *Deux applications linéaires bijectives f et g de E dans lui-même définissent la même homographie si et seulement s'il existe un scalaire $\lambda \neq 0$ tel que $g = \lambda f$.*

Preuve. S'il existe un $\lambda \neq 0$ tel que $g = \lambda f$, il est visible que $p(f) = p(g)$. Réciproquement, pour $n = 0$ (espace projectif réduit à un point) c'est clair. Pour $n \geq 1$, soient x et y deux vecteurs linéairement indépendants, M_x et M_y les deux points projectifs correspondants. Si les transformations homographiques $p(f)$ et $p(g)$ sont égales alors $p(f)(M_x) = p(g)(M_x)$, ce qui signifie que $f(x)$ et $g(x)$ représentent le même point de l'espace projectif, c'est-à-dire, sont colinéaires. Donc $g(x) = \lambda_x f(x)$. De même, $g(y) = \lambda_y f(y)$. On peut écrire alors

$$g(x + y) = g(x) + g(y) = \lambda_x f(x) + \lambda_y f(y).$$

Mais on sait aussi que, pour les mêmes raisons que pour x et y , il existe λ_{x+y} tel que

$$g(x + y) = \lambda_{x+y} f(x + y).$$

Donc

$$\lambda_x f(x) + \lambda_y f(y) = \lambda_{x+y} f(x + y),$$

ce qui donne

$$\lambda_x f(x) + \lambda_y f(y) = \lambda_{x+y} f(x) + \lambda_{x+y} f(y),$$

et comme les vecteurs $f(x)$ et $f(y)$ sont linéairement indépendants on a

$$\lambda_x = \lambda_y = \lambda_{x+y}.$$

Notons λ cette valeur commune, on obtient alors $g = \lambda f$. \square

Remarque : De manière plus expéditive nous pouvons dire que $f^{-1} \circ g$ admet l'espace tout entier pour sous-espace propre. Donc cette application n'a qu'une valeur propre λ et en conséquence $g = \lambda f$.

Théorème 1.3.3 *Les homographies de $\mathcal{P} = \mathbb{P}(E)$ dans lui-même forment un groupe pour la composition des applications. Nous noterons $PGL(\mathcal{P})$ ce groupe. On l'appelle le **groupe projectif**.*

Preuve. La composée $\psi \circ \phi$ de $\phi = p(f)$ et de $\psi = p(g)$ est $p(g \circ f)$. Les propriétés de groupe des applications linéaires inversibles se transportent donc sur les homographies. \square

Compte tenu des résultats précédents, si on note $GL(E)$ le **groupe linéaire** de E , c'est-à-dire le groupe des applications linéaires inversibles de E dans lui-même, et si on note $H(E)$ le sous-groupe des **homothéties** (vectorielles) de E , alors

$$PGL(\mathcal{P}) = GL(E)/H(E) = GL(E)/K^*.$$

Ce groupe des homographies est le groupe associé à la géométrie projective. Il nous faudra donc en particulier en trouver des invariants.

Remarque : Soit $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel de toutes les applications linéaires f de E dans lui-même. Soit $\mathcal{P} = \mathbb{P}(\mathcal{L}(E))$ l'espace projectif qui lui est associé. Alors $PGL(\mathcal{P})$ est le complémentaire dans $\mathbb{P}(\mathcal{L}(E))$ de la variété algébrique définie par $\det(f) = 0$.

1.3.3 Expression à l'aide d'un repère projectif

Transformation d'un repère en un autre

Théorème 1.3.4 *Soient $(M_1, M_2, \dots, M_{n+2})$ et $(N_1, N_2, \dots, N_{n+2})$ deux repères projectifs de deux espaces projectifs \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 de dimension n sur le même corps de base. Il existe une homographie ϕ et une seule telle que $\phi(M_i) = N_i$ pour tout $1 \leq i \leq n + 2$.*

Preuve. Soient $(e_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ et $(\epsilon_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ deux bases des espaces vectoriels sous-jacents, qui sont associées respectivement aux deux repères projectifs. Si f est l'application linéaire qui transforme la base $(e_i)_i$ en la base $(\epsilon_i)_i$ alors l'homographie $p(f)$ convient. Rappelons que toute autre base de l'espace sous-jacent adaptée au repère projectif $(M_1, M_2, \dots, M_{n+2})$ est proportionnelle à la base $(e_i)_i$. De même toute autre base adaptée au repère $(N_1, N_2, \dots, N_{n+2})$ est proportionnelle à la base $(\epsilon_i)_i$. Donc toute application projective qui transforme le premier repère en le second provient d'une application linéaire proportionnelle à f . On en conclut qu'il n'y a qu'une seule telle homographie d'après le théorème 1.3.2. \square

Expression analytique d'une homographie

Soit $\phi = p(f)$ une homographie de $\mathcal{P} = \mathbb{P}(E)$, muni d'un repère projectif, dans lui-même. Désignons par

$$X = (X_1 : X_2 : \cdots : X_{n+1})$$

les coordonnées homogènes d'un point M et par

$$X' = (X'_1 : X'_2 : \cdots : X'_{n+1})$$

les coordonnées homogènes du point $N = \phi(M)$. Alors on dispose des $n + 1$ relations

$$X'_i = a_{i,1}X_1 + \cdots + a_{i,n+1}X_{n+1},$$

ce qu'on peut écrire aussi

$$X' = AX,$$

où A est la matrice carrée inversible de taille $(n + 1) \times (n + 1)$ dont les coefficients sont les $a_{i,j}$ (c'est la matrice de l'application linéaire f , dans une base associée au repère projectif choisi). Il découle du théorème 1.3.2 que la matrice λA convient aussi pour représenter la même transformation projective.

Les points qui sont envoyés sur l'hyperplan à l'infini V_∞ sont les points pour lesquels $X'_{n+1} = 0$, c'est-à-dire les points de l'hyperplan V défini par

$$a_{n+1,1}X_1 + \cdots + a_{n+1,n+1}X_{n+1} = 0.$$

Les points de l'hyperplan à l'infini sont envoyés sur les points de l'hyperplan

$$b_1X'_1 + b_2X'_2 + \cdots + b_{n+1}X'_{n+1} = 0,$$

où $(b_1, b_2, \cdots, b_{n+1})$ est une solution non triviale du système de n équations à $n + 1$ inconnues défini par

$$b_1a_{1,i} + b_2a_{2,i} + \cdots + b_{n+1}a_{n+1,i} = 0,$$

pour $1 \leq i \leq n$.

Preuve. On sait que l'image d'un hyperplan est un hyperplan. Donc les points de l'hyperplan à l'infini sont envoyés sur un hyperplan, dont on écrit

$$b_1X'_1 + b_2X'_2 + \cdots + b_{n+1}X'_{n+1} = 0 \quad (1.1)$$

l'équation. Supposons que les b_i soient solutions du système indiqué. On constate que si $X_{n+1} = 0$ et si les autres variables X_i sont quelconques, alors l'équation (1.1) est vérifiée (il suffit de remplacer les X'_i par leurs valeurs en fonction des X_i). \square

Soit H l'hyperplan affine $X_{n+1} = 1$. Alors l'homographie considérée envoie $H \setminus V$ dans H . Le point de $H \setminus V$ qui représente M , de coordonnées affines

$$x_1 = \frac{X_1}{X_{n+1}}, x_2 = \frac{X_2}{X_{n+1}}, \dots, x_n = \frac{X_n}{X_{n+1}},$$

s'envoie sur le point de H , qui représente $N = \phi(M)$, de coordonnées affines

$$x'_i = \frac{a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,n}x_n + a_{i,n+1}}{a_{n+1,1}x_1 + \dots + a_{n+1,n}x_n + a_{n+1,n+1}},$$

où $1 \leq i \leq n$.

Les points invariants d'une homographie

Soit $\mathcal{P} = \mathbb{P}(E)$ l'espace projectif associé à l'espace vectoriel E . Compte tenu de la définition d'une homographie, les points invariants d'une homographie $p(f) \in PGL(\mathcal{P})$ associée à l'application linéaire $f \in GL(E)$ sont les points de l'espace projectif associés aux vecteurs propres de l'application linéaire f . Donc dans le cas où le corps de base est \mathbb{C} , une homographie a toujours au moins un point invariant.

Si le corps de base est \mathbb{R} ceci n'est plus vrai. Considérons par exemple sur la droite projective réelle la transformation projective définie par

$$X' = \cos(\theta)X - \sin(\theta)T$$

$$T' = \sin(\theta)X + \cos(\theta)T,$$

où θ est tel que $0 < |\cos(\theta)| < 1$. Cette transformation n'a pas de point fixe.

Dans un espace projectif réel de **dimension paire** (par exemple un plan projectif), l'espace vectoriel sous-jacent est de dimension impaire, donc il y a au moins une valeur propre réelle, et donc au moins un vecteur propre. Dans ce cas il y a **au moins un point invariant**.

1.3.4 Trace sur une carte affine d'une transformation projective

Transformations homographiques, transformations affines

Afin de préciser les relations entre transformations projectives et transformations affines nous allons considérer deux situations.

- **On fixe un hyperplan affine** H de l'espace vectoriel E , ne passant pas par l'origine et on se sert de cet hyperplan comme carte, pour représenter en partie $\mathcal{P} = \mathbb{P}(E)$.

Théorème 1.3.5 *Pour que la "trace" sur la carte H d'une transformation homographique ϕ de \mathcal{P} soit une transformation affine de H , il faut et il suffit que ϕ transforme l'hyperplan à l'infini de H en lui-même.*

Preuve. Il suffit de se reporter aux formules établies dans la section 1.3.3 pour constater que si l'hyperplan à l'infini est envoyé sur lui-même, alors sur la carte affine choisie les formules obtenues donnent une transformation affine. En revanche si l'hyperplan à l'infini n'est pas envoyé sur l'hyperplan à l'infini, alors il existe des points de la carte affine qui n'ont pas d'image dans la carte affine. \square

Ainsi le groupe affine $GA(H)$ apparaît comme un sous-groupe de $PGL(\mathcal{P})$: **le sous-groupe des transformations projectives qui laissent invariant l'hyperplan à l'infini.**

- **On fixe une transformation projective** et on regarde s'il y a une carte affine pour laquelle la trace de cette transformation sur la carte est une transformation affine.

Théorème 1.3.6 *Soit $\phi = p(f)$ une transformation projective de l'espace projectif $\mathcal{P} = \mathbb{P}(E)$. Pour qu'il existe une carte affine sur laquelle cette transformation soit une transformation affine, il faut et il suffit que l'application linéaire f ait au moins une valeur propre dans le corps de base K .*

Preuve. Ceci est une conséquence du théorème précédent. \square

En ce qui concerne l'expression analytique, les équations affines de la transformation affine

$$\begin{aligned}
 x'_1 &= a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n + a_{1,n+1} \\
 \cdots &= \cdots + \cdots + \cdots + \cdots \\
 x'_n &= a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,n}x_n + a_{n,n+1}
 \end{aligned}$$

donnent les équations projectives suivantes pour la transformation projective correspondante

$$\begin{aligned}
 X'_1 &= a_{1,1}X_1 + \cdots + a_{1,n+1}X_{n+1} \\
 \cdots &= \cdots + \cdots + \cdots \\
 X'_n &= a_{n,1}X_1 + \cdots + a_{n,n+1}X_{n+1} \\
 X'_{n+1} &= X_{n+1}
 \end{aligned}$$

où pour $1 \leq i \leq n$ on a les relations $x_i = \frac{X_i}{X_{n+1}}$ et $x'_i = \frac{X'_i}{X'_{n+1}}$.

Chapitre 2

Le fonctionnement de la géométrie projective

2.1 Les théorèmes fondamentaux de la géométrie projective

2.1.1 Le théorème de Desargues

Théorème 2.1.1 (Desargues) *Dans un espace projectif \mathcal{P} de dimension ≥ 2 considérons trois droites deux à deux distinctes $\mathcal{D}, \mathcal{D}', \mathcal{D}''$, concourantes en un point C . On note A, B (respectivement A', B' et A'', B'') deux points distincts et distincts de C , de la droite \mathcal{D} (respectivement de la droite \mathcal{D}' et de la droite \mathcal{D}''). Notons I le point d'intersection de la droite AA' et de la droite BB' , J le point d'intersection de la droite AA'' et de la droite BB'' et K le point d'intersection de la droite $A'A''$ avec la droite $B'B''$. Alors les points I, J, K sont alignés.*

Preuve. Remarquons tout d'abord qu'on peut travailler dans le sous-espace engendré par les trois droites $\mathcal{D}, \mathcal{D}', \mathcal{D}''$. Donc on se ramènera toujours à $n = 2$ (cas où les trois droites sont coplanaires) ou $n = 3$ (cas où les trois droites ne sont pas coplanaires).

Remarquons maintenant que si on est dans le cas où les points A, A', A'' (ou bien les points B, B', B'') sont alignés, alors I, J, K sont aussi sur cette droite et le problème est résolu.

On se placera donc désormais hors de ce cas, ce qui implique en particulier que I, J, K sont deux à deux distincts.

Considérons une carte pour laquelle l'hyperplan à l'infini contient I et J . Si $n = 2$ alors on peut affirmer que A et B ne sont pas à l'infini (sinon A, I, J ou B, I, J seraient alignés et donc A, A', A'' ou B, B', B'' seraient alignés). Si $n = 3$ on choisit un plan à l'infini qui contient IJ mais ni A ni B . On peut donc toujours considérer qu'on a choisi une carte H pour laquelle les points I et J sont à l'infini, les points A et B sont dans H et en conséquence que A', B', A'', B'' sont aussi dans H .

Alors AA' est parallèle à BB' et AA'' parallèle à BB'' . On en conclut que $A'A''$ est parallèle à $B'B''$. Donc le point K est aussi à l'infini.

Si $n = 2$, les seuls points à l'infini sont sur une même droite et donc le théorème est démontré. Si $n = 3$ alors les plans $AA'A''$ et $BB'B''$ sont parallèles et se coupent sur la droite à l'infini IJ . Le point K qui appartient à ces deux plans est donc aussi sur la droite IJ . \square

2.1.2 Le théorème de Pappus

Théorème 2.1.2 (Pappus) *Soient deux droites distinctes \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 d'un plan projectif \mathcal{P} . On donne trois points A, B, C (respectivement A', B', C') sur \mathcal{D}_1 (respectivement sur \mathcal{D}_2). On note C'', B'', A'' les intersections $AB' \cap BA'$, $AC' \cap CA'$, $BC' \cap CB'$. Alors, les points A'', B'', C'' sont alignés.*

Preuve. Supposons que les points A, B (respectivement A', B') soient distincts et distincts de l'intersection U de \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 . Les autres cas donnent des configurations particulières où le résultat est trivial.

Prenons pour repère projectif le point C'' ($0 : 0 : 1$) le point C ($1 : 0 : 0$), le point C' ($0 : 1 : 0$) et enfin le point U ($1 : 1 : 1$) intersection de la droite \mathcal{D}_1 avec la droite \mathcal{D}_2 . Plaçons-nous alors dans le plan affine H d'équation $T = 1$ (les points C et C' sont à l'infini). Dans ce plan il est facile de calculer les diverses coordonnées des points qui interviennent :

$A(a, 1), B(b, 1), A'(1, 1/b), B'(1, 1/a), A''(b, 1/a), B''(a, 1/b)$. On constate que A'', B'', C'' sont alignés. \square

Remarque : En fait les 3 triplets de points $(A, B, C), (A', B', C'), (A'', B'', C'')$ jouent exactement le même rôle dans la figure construite.

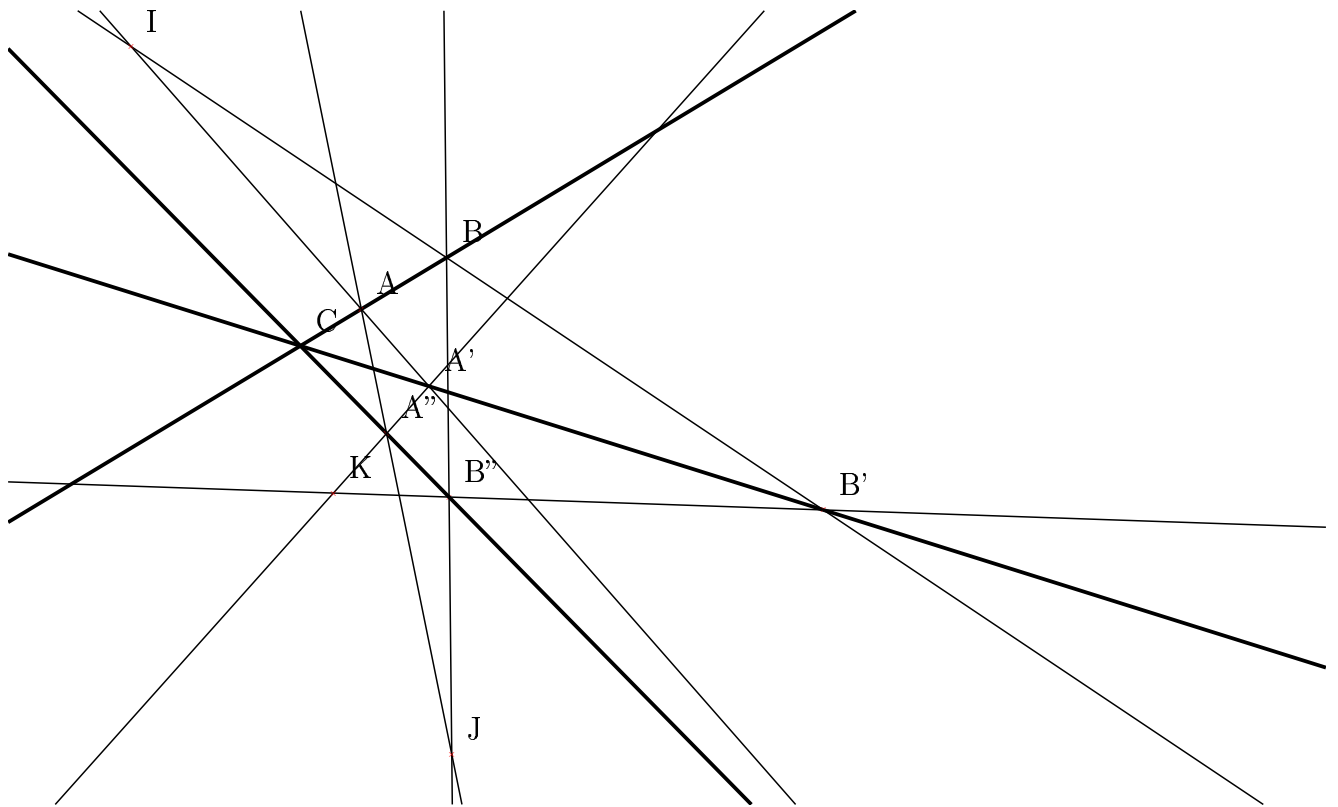


FIG. 2.1 – Théorème de Desargues

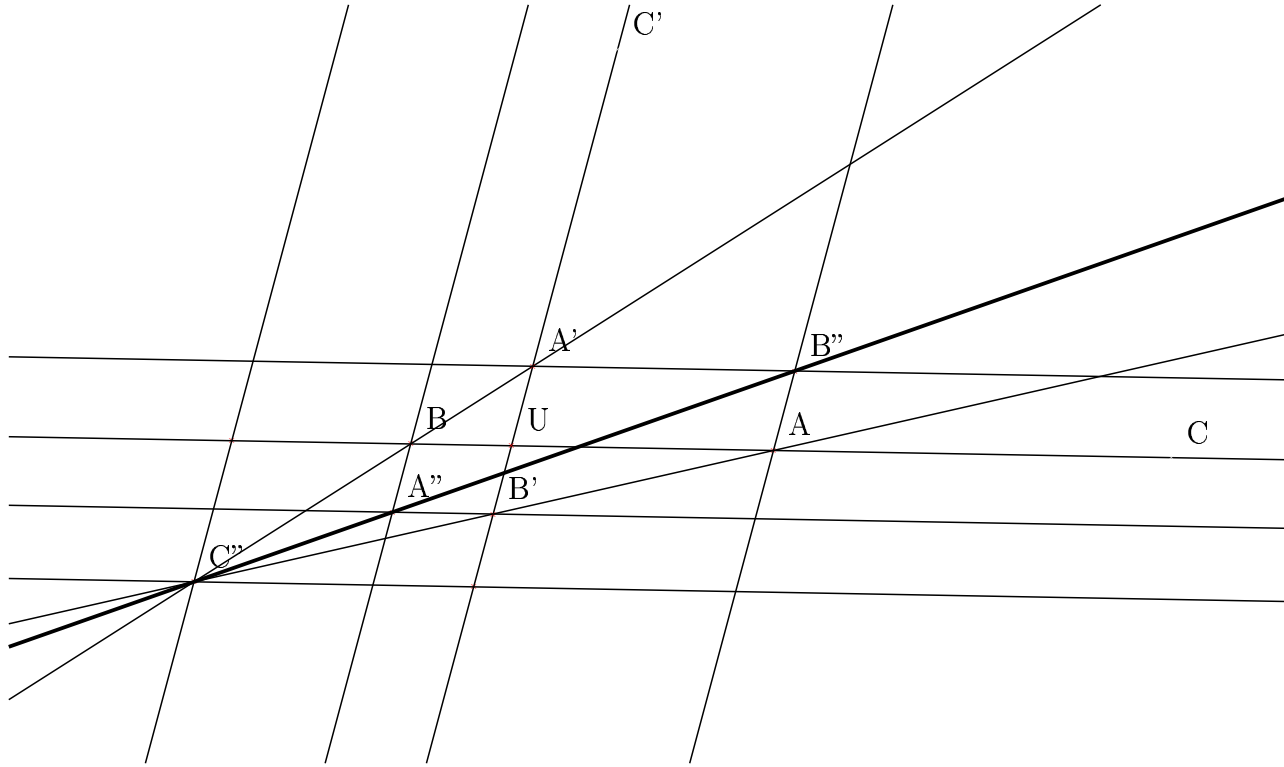


FIG. 2.2 – Théorème de Pappus

Cette construction est liée à la construction, sur une droite projective dont on a fixé un repère projectif, du point de coordonnées $(XY : 1)$, connaissant les points de coordonnées $(X : 1)$ et $(Y : 1)$ (cf 2.1.3).

2.1.3 Opérations algébriques sur une droite projective

Considérons une droite projective \mathcal{D} dans un plan projectif \mathcal{P} . Un repère projectif (O, P_∞, U) de \mathcal{D} est fixé (O a pour coordonnées $(0 : 1)$, P_∞ a pour coordonnées $(1 : 0)$ et U a pour coordonnées $(1 : 1)$).

L'addition

Nous avons deux points A et B de \mathcal{D} de coordonnées respectives $(a : 1)$ et $(b : 1)$. Il s'agit de construire le point M de coordonnées $(a + b : 1)$.

Pour cela on se place dans le plan projectif et on peut finir de choisir un repère

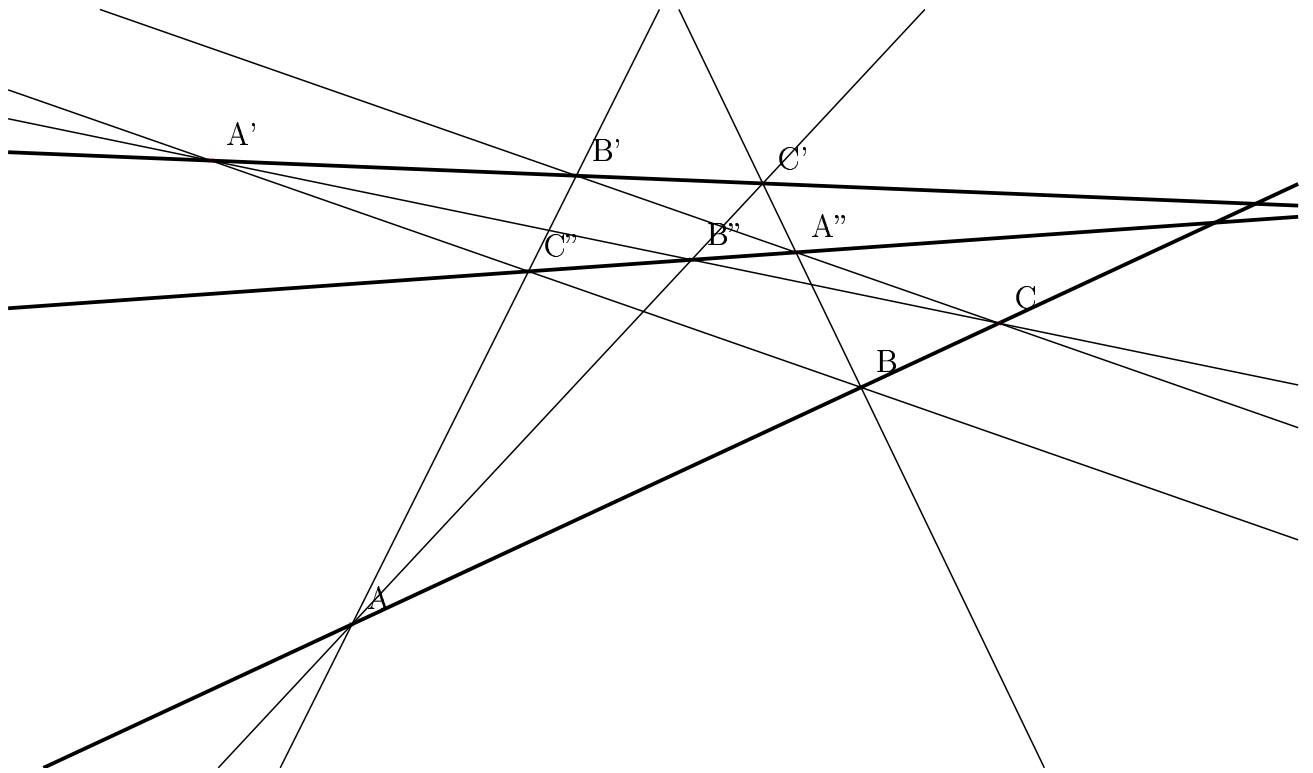


FIG. 2.3 – Théorème de Pappus

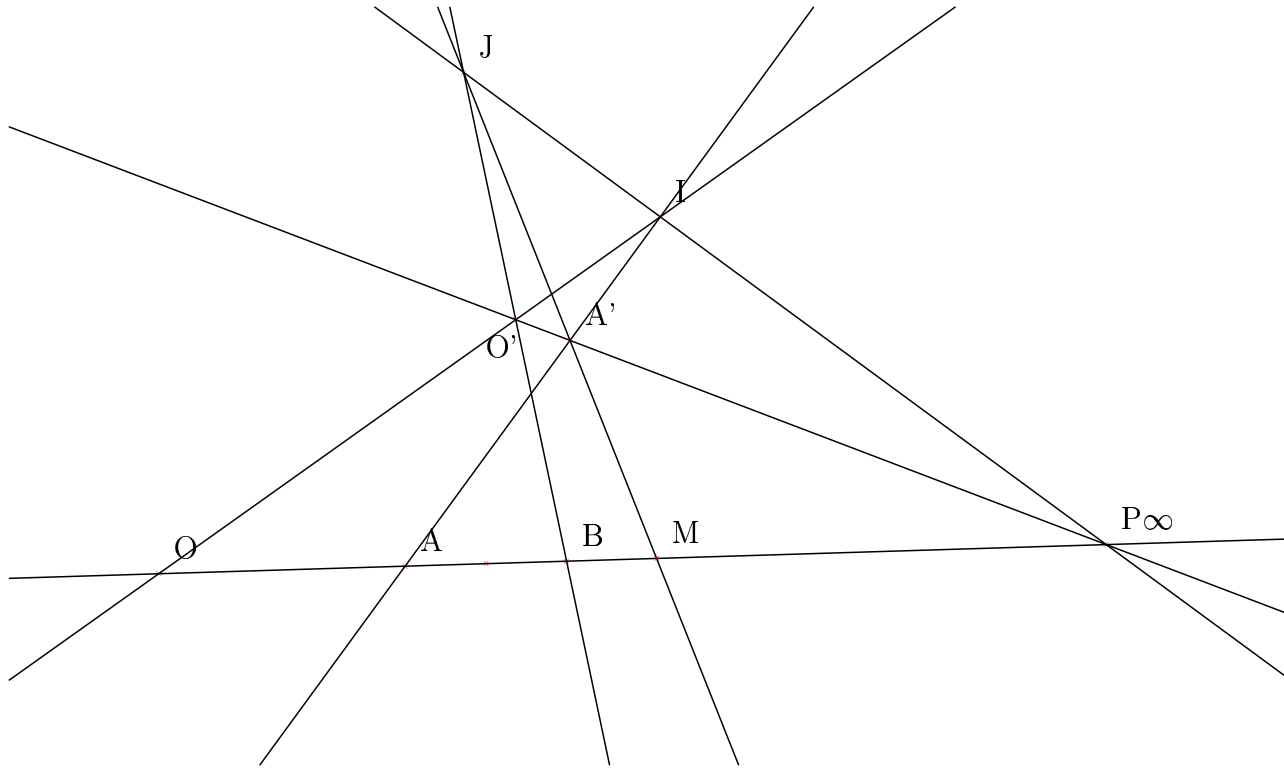


FIG. 2.4 – Addition sur la droite

projectif du plan en complétant le repère projectif fixé sur la droite \mathcal{D} . Soit \mathcal{D}_∞ la droite à l'infini d'équation $T = 0$. Elle passe bien par P_∞ . Traçons par ailleurs une droite \mathcal{D}' distincte de \mathcal{D} , passant par P_∞ , donc parallèle à \mathcal{D} .

Soit I un point de \mathcal{D}_∞ . Les droites OI et AI sont parallèles. Notons O' l'intersection de OI avec \mathcal{D}' et A' l'intersection de AI avec \mathcal{D}' . Le quadrilatère $OO'A'A$ est un parallélogramme. Soit J l'intersection de \mathcal{D}_∞ avec BO' et soit M l'intersection de JA' avec \mathcal{D} . Alors $BO'A'M$ est aussi un parallélogramme. On en déduit que dans un plan affine adapté on a $\overline{OA} = \overline{O'A'} = \overline{BM} = a$ et donc que $\overline{OM} = \overline{OB} + \overline{BM} = a + b$.

La multiplication

Nous avons deux points A et B de \mathcal{D} de coordonnées respectives $(a : 1)$ et $(b : 1)$. Il s'agit de construire le point C de coordonnées $(ab : 1)$.

Pour cela on se place dans le plan projectif et on peut finir de choisir un

repère projectif du plan en complétant le repère projectif fixé sur la droite \mathcal{D} . Soit \mathcal{D}_∞ la droite à l'infini d'équation $T = 0$. Elle passe bien par P_∞ . Traçons par ailleurs une droite \mathcal{D}' distincte de \mathcal{D} , passant par O . Soit C' un point de \mathcal{D}_∞ . Les droites (parallèles) AC' et UC' coupent la droite \mathcal{D}' respectivement en B'' et C'' . La droite BC'' coupe \mathcal{D}_∞ en A' , et la droite $A'B''$ coupe la droite \mathcal{D} en C .

Alors du fait que les triangles $OB''A$ et $OC''U$ sont semblables on a

$$\frac{\overline{OB''}}{\overline{OC''}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OU}},$$

et du fait que les triangles $OB''C$ et $OC''B$ sont aussi semblables on a

$$\frac{\overline{OB''}}{\overline{OC''}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}},$$

donc

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OU}},$$

et comme $\overline{OU} = 1$ on obtient

$$\overline{OC} = \overline{OB} \times \overline{OA} = ab.$$

Remarque : Pour faire la construction du point C nous sommes partis du point A et avons construit B'' et C'' . Nous aurions pu partir du point B et aurions construit alors les points A'' et C'' . Comme $ab = ba$ nous aurions obtenu le même point C . Si nous faisons les deux constructions (cf. figure 2.5), nous introduisons 3 triplets de points : (A, B, C) , (A', B', C') , (A'', B'', C'') . On reconnaît une configuration illustrant le théorème de Pappus. En fait on peut montrer à partir de là que le théorème de Pappus est équivalent à la commutativité du corps sur lequel on travaille (cf. [8] ou [9]).

2.2 Géométrie projective sur la droite projective

2.2.1 Quotient des coordonnées projectives d'un point

Nous allons mettre en évidence un invariant très important de la géométrie projective : le **birapport** de quatre points alignés.

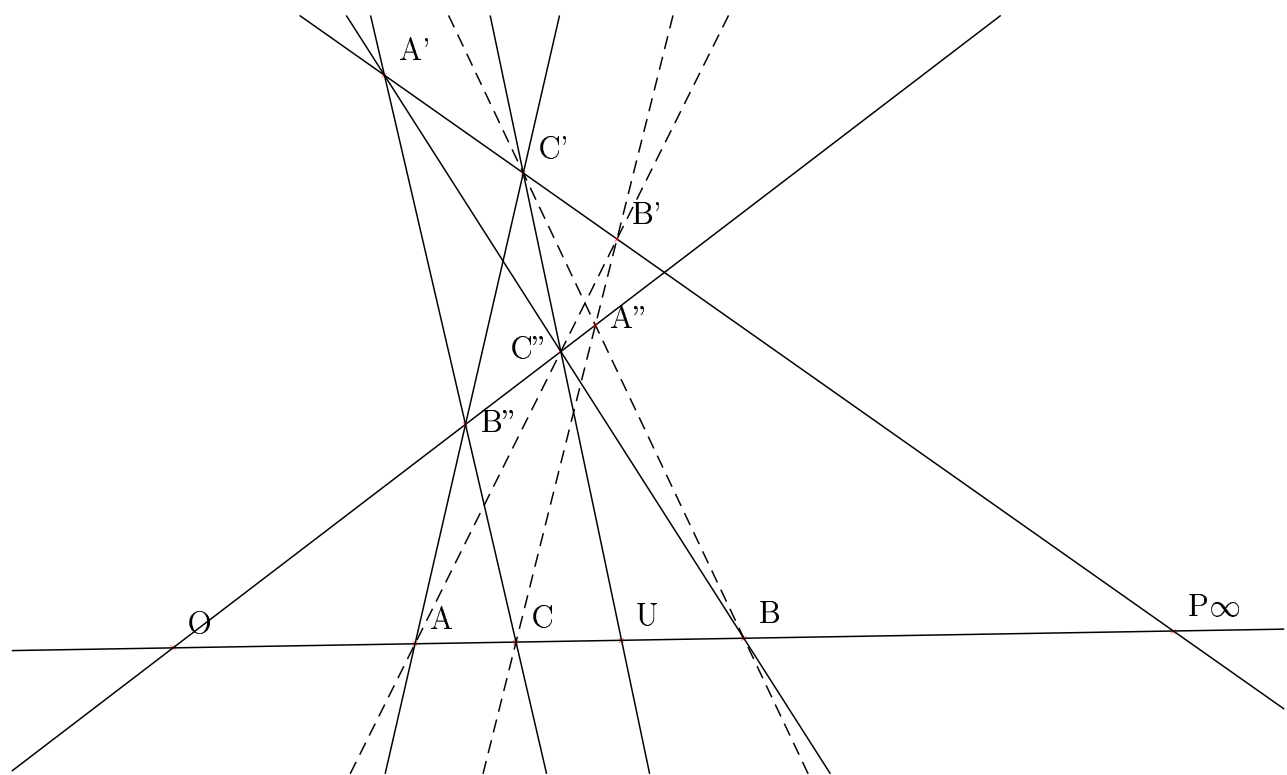


FIG. 2.5 – Multiplication sur la droite

Dans un premier temps nous allons **associer à tout point d'une droite projective un nombre** (éventuellement ∞). Soit \mathcal{D} une droite projective munie d'un repère projectif (A, B, C) . Le point A est donc de coordonnées projectives $(1 : 0)$ le point B est de coordonnées projectives $(0 : 1)$ et le point C de coordonnées projectives $(1 : 1)$. Ainsi que nous l'avons déjà vu **nous pouvons considérer la carte affine** $T = 1$, ce qui nous permet en fait de définir une bijection Φ de \mathcal{D} sur $\widehat{K} = K \cup \{\infty\}$ par

$$x = \Phi(X : T) = \begin{cases} \frac{X}{T} & \text{si } T \neq 0 \\ \infty & \text{si } T = 0. \end{cases}$$

La **droite projective standard** est \widehat{K} , muni de la structure donnée par $\mathbb{P}_1(K)$ grâce à la bijection qui vient d'être définie. Le repère projectif standard de cette droite est $(\infty, 0, 1)$.

La représentation de la droite projective par les éléments de \widehat{K} que nous venons d'obtenir est très importante. Elle nous permet d'avoir une deuxième façon de considérer la droite projective. Soit la droite projective est représentée par ses coordonnées homogènes $(X : T)$, soit elle est représentée par un élément de \widehat{K} (en fait l'élément $x = X/T$, qui peut valoir ∞ quand $T = 0$). Ces deux façons de voir sont complémentaires et peuvent servir simultanément dans un calcul. Elles correspondent à deux approches de la droite projective : la droite projective vue comme ensemble des directions d'un plan, ou la droite projective vue comme la droite affine à laquelle on ajoute un point à l'infini.

Remarque : on sait que tout point M s'écrit

$$M = XA + TB.$$

On pourra désormais écrire aussi

$$M = xA + B,$$

avec $x \in \widehat{K}$, sachant que lorsque $x = \infty$ alors $M = A$ (cas où $T = 0$).

Remarque : si h est une transformation projective de la droite \mathcal{D} sur elle-même alors les coordonnées projectives $(X' : T')$ du transformé M' du point $M = (X : T)$ vérifient

$$X' = aX + bT,$$

$$T' = cX + dT,$$

avec $ad - bc \neq 0$. En utilisant la bijection Φ de \mathcal{D} sur \widehat{K} qu'on vient de définir, on obtient en prenant $x = \Phi(X : T)$ et $x' = \Phi(X' : T')$:

$$x' = \frac{ax + b}{cx + d},$$

où les calculs se font dans \widehat{K} suivant les conventions habituelles. Cette formule est tout à fait analogue à celle introduite en 1.3.3, si ce n'est qu'à présent elle est donnée dans \widehat{K} .

2.2.2 Le birapport de quatre points alignés

Définition 2.2.1 Soient A, B, C, D quatre points d'une droite projective \mathcal{D} , les trois premiers constituant un repère projectif. Soit Φ la bijection de \mathcal{D} dans \widehat{K} définie précédemment. Alors $\Phi(D)$ est le **birapport** des points A, B, C, D et il sera noté (A, B, C, D) .

Théorème 2.2.2 Soient \mathcal{D} et \mathcal{D}' deux droites projectives. Soient A, B, C, D quatre points de \mathcal{D} et A', B', C', D' quatre points de \mathcal{D}' . On suppose que A, B, C (resp. A', B', C') sont deux à deux distincts. Pour qu'il existe une transformation projective qui transforme A, B, C, D respectivement en A', B', C', D' , il faut et il suffit que les birapports (A, B, C, D) et (A', B', C', D') soient égaux.

Preuve. Supposons l'existence d'une transformation projective ϕ qui transforme A, B, C, D respectivement en A', B', C', D' . Introduisons les applications Φ et Φ' précédentes qui envoient respectivement A, B, C sur $\infty, 0, 1$ et A', B', C' sur $\infty, 0, 1$. Alors $\Phi' \circ \phi \circ \Phi^{-1}$ est une transformation projective qui transforme le repère $(\infty, 0, 1)$ de \widehat{K} en lui-même. C'est donc l'identité. Par suite $\Phi' \circ \phi = \Phi$, donc $\Phi'(D') = \Phi(D)$ et les birapports considérés sont égaux. Réciproquement supposons les birapports égaux. Soit ϕ l'unique transformation projective qui transforme le repère (A, B, C) en le repère $(A', B', C)'$. Alors on sait d'après le calcul précédent que $\Phi' \circ \phi(D) = \Phi(D)$ et on sait par hypothèse que $\Phi'(D') = \Phi(D)$. Donc $\Phi'(D') = \Phi'(\Phi(D))$, et par suite $D' = \phi(D)$. \square

Théorème 2.2.3 *Si a, b, c, d sont quatre points de \widehat{K} où a, b, c sont deux à deux distincts, alors*

$$(a, b, c, d) = \frac{\left(\frac{c-a}{c-b}\right)}{\left(\frac{d-a}{d-b}\right)} = \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)}.$$

Preuve. La transformation projective ϕ qui envoie a, b, c sur $\infty, 0, 1$ a la forme d'une fonction homographique qui admet a pour pôle et b pour zéro. Elle s'écrit donc

$$\phi(x) = \lambda \frac{x-b}{x-a}.$$

La valeur de λ est déterminée par le fait que $\phi(c) = 1$. On obtient

$$\lambda = \frac{c-a}{c-b}.$$

Par suite

$$(a, b, c, d) = \phi(d) = \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)}. \quad \square$$

Corollaire 2.2.4 *Si A, B, C, D sont quatre points d'une droite projective (les trois premiers étant deux à deux distincts), dont les coordonnées homogènes sont $(X_1 : T_1), (X_2 : T_2), (X_3 : T_3), (X_4 : T_4)$, alors le birapport de ces quatre points est*

$$\frac{\Delta_{31}}{\Delta_{32}} \times \frac{\Delta_{42}}{\Delta_{41}},$$

où

$$\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} X_i & X_j \\ T_i & T_j \end{vmatrix}$$

Corollaire 2.2.5 *Soit A, B, C trois points deux à deux distincts d'une droite projective. L'application qui à tout point M de la droite associe le birapport (A, B, C, M) est une application projective.*

2.2.3 Un exemple important : les perspectives

Soit \mathcal{P} un plan projectif, \mathcal{D} et \mathcal{D}' deux droites projectives de \mathcal{P} . Soit U un point fixé dans \mathcal{P} hors des deux droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' . Alors l'application qui à tout point M de \mathcal{D} fait correspondre l'intersection M' de \mathcal{D}' avec UM est une transformation projective.

En effet, remarquons tout d'abord que l'application considérée est bijective. Ensuite, considérons un repère projectif $(A, B, C, U) = ((1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1), (1 : 1 : 1))$ du plan projectif \mathcal{P} tel que BC soit la droite \mathcal{D} et AB la droite \mathcal{D}' . Ainsi \mathcal{D} a pour équation $X = 0$ et \mathcal{D}' a pour équation $T = 0$.

Soit M un point de la droite \mathcal{D} , ses coordonnées sont $(0 : Y : T)$. Son transformé est M' de coordonnées $(X' : Y' : 0)$. Les points U, M, M' sont alignés, donc

$$\begin{vmatrix} 0 & X' & 1 \\ Y & Y' & 1 \\ T & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

$$X'(Y - T) + Y'T = 0.$$

Ainsi

$$X' = -T, Y' = Y - T.$$

La transformation est bijective et a une représentation linéaire, c'est donc une homographie de \mathcal{D} sur \mathcal{D}' (voir figure 2.6).

Définition 2.2.6 *Toute homographie d'une droite \mathcal{D} sur une droite \mathcal{D}' obtenue de cette façon est appelée une **perspective**.*

Si on prend 4 points M_1, M_2, M_3, M_4 dont on peut définir le birapport sur \mathcal{D} , les quatre points transformés M'_1, M'_2, M'_3, M'_4 ont le même birapport, d'après le théorème 2.2.2. Si on trace la figure sur une carte affine (plan affine) où ni \mathcal{D} ni \mathcal{D}' ne sont la droite à l'infini alors on a une notion de mesure algébrique sur chaque droite et on a l'égalité

$$\frac{\overline{M_3 M_1}}{\overline{M_3 M_2}} \times \frac{\overline{M_4 M_2}}{\overline{M_4 M_1}} = \frac{\overline{M'_3 M'_1}}{\overline{M'_3 M'_2}} \times \frac{\overline{M'_4 M'_2}}{\overline{M'_4 M'_1}}.$$

On a ainsi une notion de birapport de quatre droites concourantes coplanaires. Nous reverrons cette notion plus loin, dans un autre cadre.

Remarque : les opérations d'addition et de multiplication qu'on a considérées dans la section 2.1.3 correspondent à l'addition et à la multiplication des birapports (P_∞, O, U, A) et (P_∞, O, U, B) .

Remarque : l'idée de la notion de birapport est de représenter le quatrième point intervenant dans le birapport dans le repère projectif formé par les trois

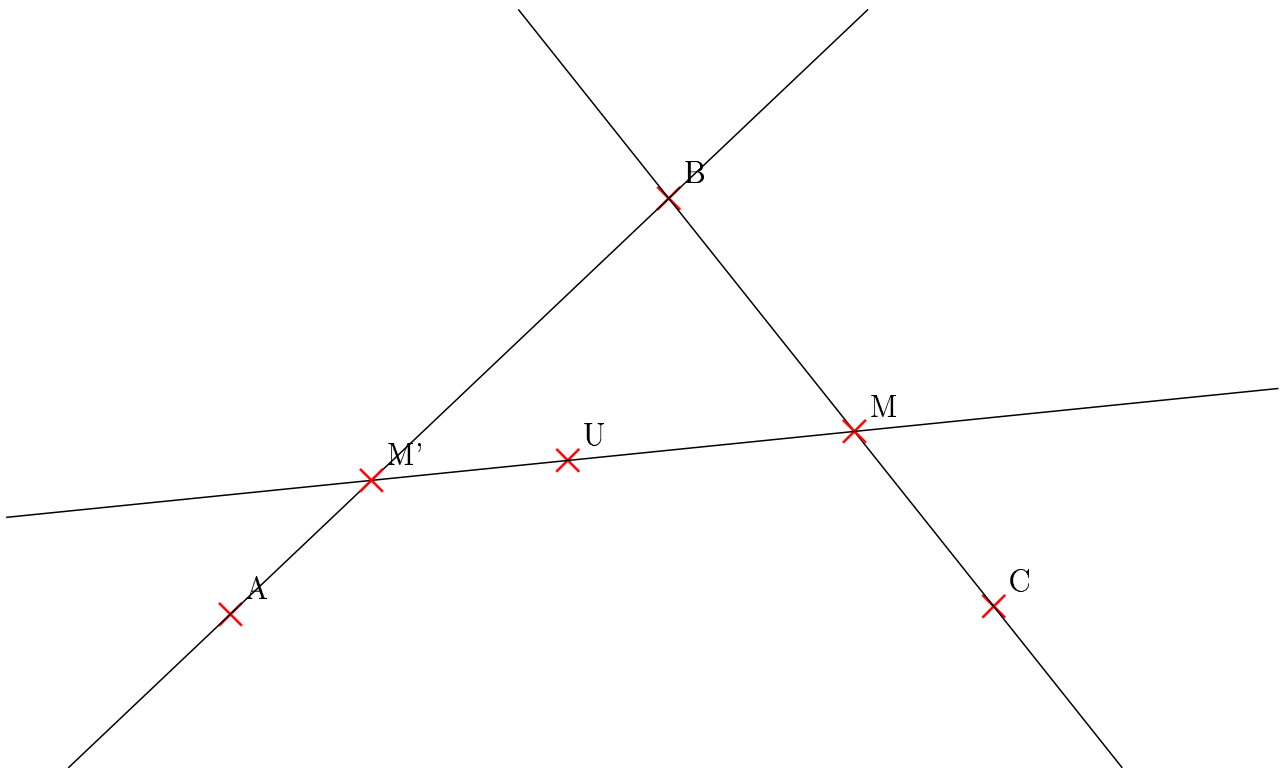


FIG. 2.6 – Une transformation projective

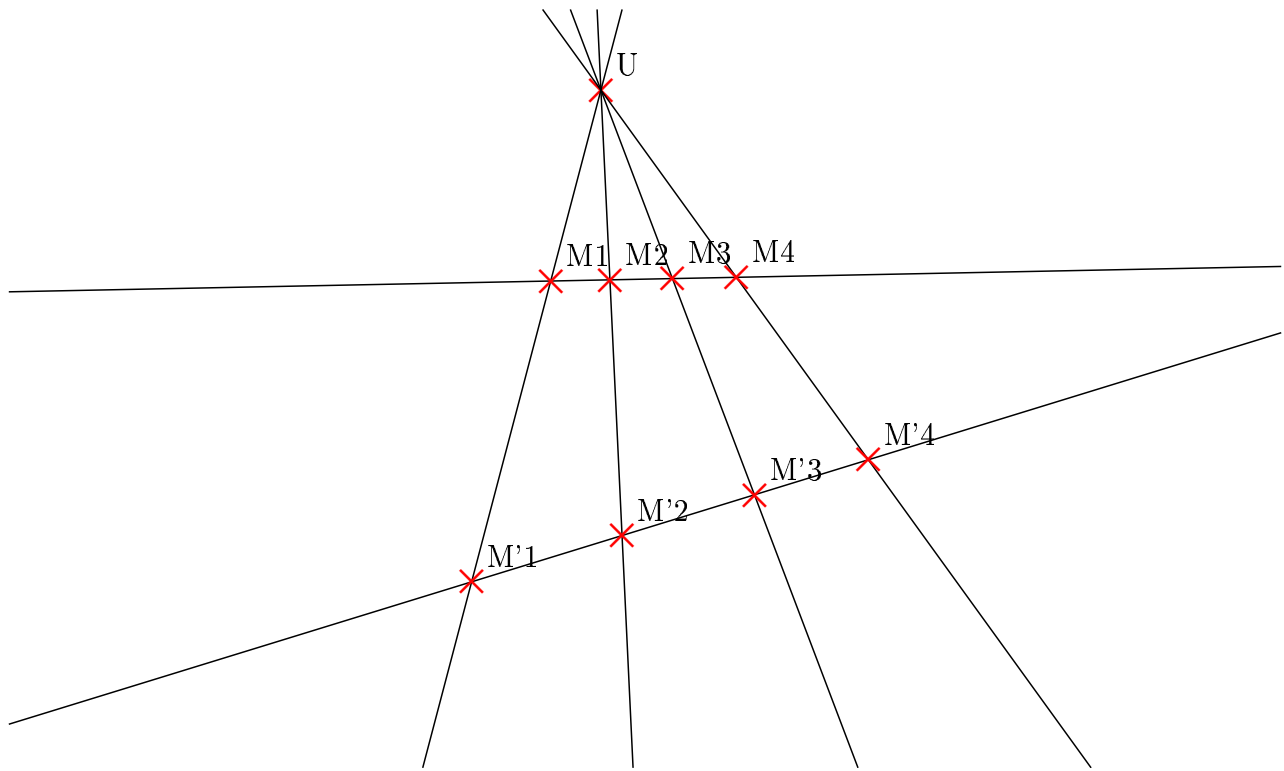


FIG. 2.7 – Birapport de 4 droites

premiers. Pour cela on remplace les coordonnées homogènes du quatrième point par leur rapport (quitte à compléter K par le point ∞).

Le théorème suivant va nous permettre de **caractériser les perspectives** parmi les transformations homographiques d'une droite sur une autre.

Théorème 2.2.7 *Soient \mathcal{D} et \mathcal{D}' deux droites distinctes qui se coupent en un point B . Pour qu'une homographie ϕ de \mathcal{D} sur \mathcal{D}' soit une perspective, il faut et il suffit qu'elle transforme le point B en lui-même.*

Preuve. Compte tenu de la définition d'une perspective, la condition est clairement nécessaire.

Réciproquement, soient deux points M_1 et M_2 de \mathcal{D} , distincts et distincts de B . Soient M'_1 et M'_2 leurs images respectives sur \mathcal{D}' . Les droites $M_1M'_1$ et $M_2M'_2$ se coupent en un point U . Considérons alors la perspective de centre U . C'est une homographie qui transforme B en B , M_1 en M'_1 , M_2 en M'_2 . Donc elle est égale à ϕ . \square

2.2.4 Construction des images d'une homographie

Soient \mathcal{D} et \mathcal{D}' deux droites distinctes. Soient trois points M_1, M_2, M_3 (respectivement M'_1, M'_2, M'_3) de la droite \mathcal{D} (respectivement \mathcal{D}'), distincts deux à deux. On sait qu'il existe une homographie ϕ et une seule de \mathcal{D} sur \mathcal{D}' qui transforme M_1 en M'_1 , M_2 en M'_2 et M_3 en M'_3 . Soit M un autre point de \mathcal{D} . Le problème est de construire $M' = \phi(M)$.

On peut toujours supposer que M_1 n'est pas le point d'intersection des deux droites (sinon on prend M_2). Sur la droite $M_1M'_1$ on prend deux points S et S' distincts et distincts de M_1 et M'_1 . Les droites SM_2 et $S'M'_2$ se coupent en I . Les droites SM_3 et $S'M'_3$ se coupent en J distinct de I . La droite IJ coupe SS' en L . Soit M un point quelconque de \mathcal{D} et $M' = \phi(M)$. Alors les droites SM et $S'M'$ se coupent sur la droite IJ en un point noté K . En effet

$$(M_1, M_2, M_3, M) = (M'_1, M'_2, M'_3, M') = (L, I, J, K). \quad \square$$

Que peut-on faire si ϕ est une homographie de la droite \mathcal{D} sur elle-même ? Il suffit alors de composer ϕ par une perspective sur une droite auxiliaire \mathcal{D}' . On est ramené au problème précédent.

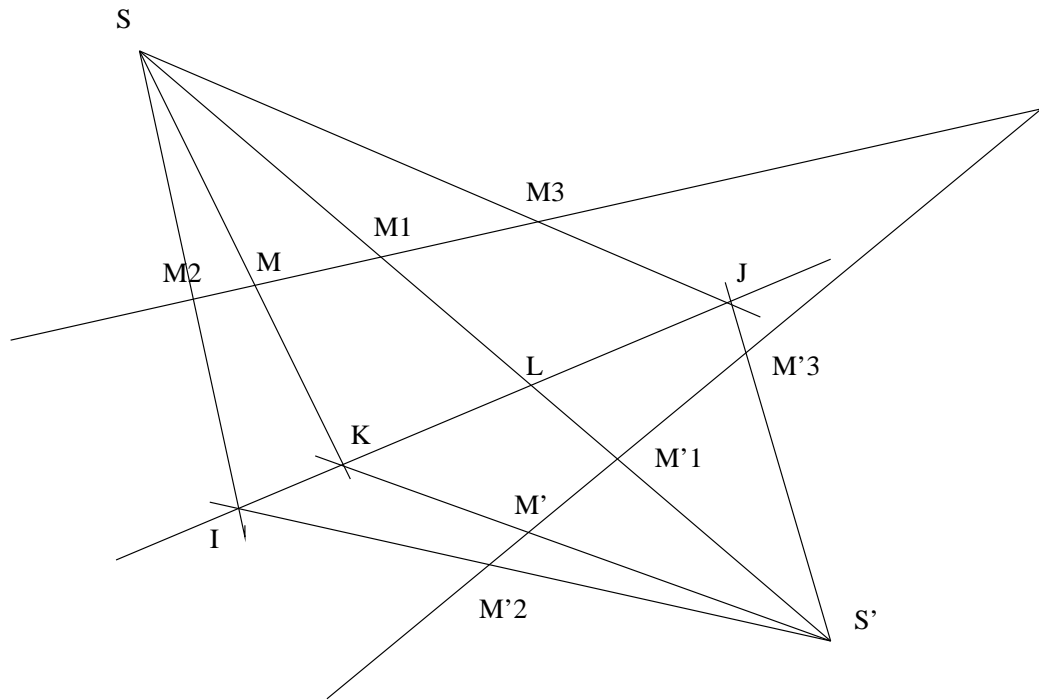


FIG. 2.8 – Construction d'une image

2.2.5 Les involutions de la droite projective

Soit ϕ une homographie de la droite projective qui n'est pas l'identité. Nous avons vu que

- Si $K = \mathbb{C}$, h a un ou deux points fixes.
- Si $K = \mathbb{R}$, h a zéro, un ou deux points fixes.

Pour une **homographie distincte de l'identité**, nous obtenons les situations suivantes

- **deux points fixes** : la matrice associée a donc deux sous-espaces propres de dimension 1 (qui correspondent aux deux points fixes). Elle est donc, dans un repère adapté (c'est à dire tout repère utilisant la première direction propre comme point à l'infini $(1 : 0)$ et la deuxième comme point origine $(0 : 1)$, et ceci indépendamment de tout choix du point unité), de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

où les valeurs propres sont toutes deux non nulles (l'application est inversible) et distinctes (l'application n'est pas l'application identique). Si bien que $X' = \lambda_1 X$, $T' = \lambda_2 T$ et $x' = (\lambda_1/\lambda_2)x$. Ceci montre qu'on a affaire à une **homothétie** sur une carte affine bien choisie, le **rapport d'homothétie** étant le **quotient des valeurs propres** de la matrice A (ce quotient est bien indépendant de la matrice A choisie pour représenter l'homographie, puisque si on multiplie la matrice A par un facteur λ ce quotient ne change pas, et que si on fait un changement de base, les valeurs propres restent les mêmes).

- **un point fixe** : la matrice associée a donc un seul sous-espace propre, et il est de dimension 1. Elle est donc dans un repère adapté de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

avec $\lambda \neq 0$. Si bien que $X' = \lambda X + T$, $T' = \lambda T$ et $x' = x + \frac{1}{\lambda}$, ce qui montre qu'on a affaire à une **translation** sur une carte affine bien choisie.

- **aucun point fixe** : ce cas ne se produit pas si $K = \mathbb{C}$. Pour $K = \mathbb{R}$ la matrice associée se met sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Dans ce cas la transformation, quelle que soit la carte affine choisie, ne transforme pas le point à l'infini en lui-même, et ne définit donc pas sur cette carte affine une transformation affine.

Définition 2.2.8 Une involution de la droite projective est une homographie ϕ de la droite projective, distincte de l'identité et telle que $\phi^{-1} = \phi$.

Théorème 2.2.9 Soit $\phi = p(f)$ une homographie de la droite projective. Alors les conditions suivantes sont équivalentes

- a) ϕ est une involution.
- b) La trace de f est nulle.
- c) Il existe un point M tel que $\phi(M) \neq M$ et $\phi^2(M) = M$.

Preuve. Dans un repère projectif, on a pour matrice d'une homographie

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

ce qui donne, avec les notations habituelles, la relation

$$c x x' + d x' - a x - b = 0.$$

Donc ϕ est une involution si et seulement si $d = -a$, c'est-à-dire si et seulement si $Tr(A) = 0$. Donc la condition a) est équivalente à la condition b). Il est clair que la condition a) implique la condition c). Supposons maintenant qu'on ait la condition c). Prenons pour point à l'infini le point M et pour origine le point $\phi(M)$. La matrice A s'écrit alors

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix},$$

donc la trace de A est nulle, ce qui achève la démonstration. \square

Théorème 2.2.10 Soient (M_1, M'_1) , (M_2, M'_2) deux couples de points vérifiant $M_1 \neq M'_1$, $M_1 \neq M_2$, $M'_1 \neq M_2$, $M'_1 \neq M'_2$, $M_1 \neq M'_2$. Alors il existe une involution et une seule qui transforme M_1 en M'_1 et M_2 en M'_2 .

Preuve. D'après le théorème 1.3.4, il existe une unique homographie qui transforme M_1 en M'_1 , M_2 en M'_2 et M'_1 en M_1 . D'après la condition c) du théorème précédent, cette homographie est une involution. \square

Ainsi une involution est entièrement déterminée par deux couples de points homologues.

Théorème 2.2.11 *Une involution de la droite projective a deux points fixes ou aucun point fixe.*

Preuve. Si la transformation a un seul point fixe alors en prenant ce point pour point à l'infini, sur la carte affine correspondante, la transformation est une translation et donc ne peut être involutive. \square

Théorème 2.2.12 *Soit ϕ une homographie qui a deux points fixes M_1 et M_2 . Alors le birapport $k = (M_1, M_2, M, \phi(M))$ est indépendant de M . Cette homographie est une involution si et seulement si $k = -1$.*

Preuve. Exploitions les résultats du début de cette section. Soit une carte affine où M_1 est le point à l'infini, M_2 l'origine. Alors quel que soit le point unité M , on sait que sur la carte affine l'homographie s'écrit

$$x' = kx,$$

où k est le rapport des valeurs propres d'une matrice de la transformation projective. Donc si l'abscisse de M est 1, l'abscisse de $\phi(M)$ est k et donc cette abscisse ne dépend pas de M . Or l'abscisse de $\phi(M)$ est la valeur du birapport $(M_1, M_2, M, \phi(M))$. Remarquons que la transformation est une homothétie de rapport k . Comme on suppose que ce n'est pas l'identité, alors $k \neq 1$. Pour que la transformation soit une involution il faut et il suffit que $k = -1$. \square

Remarque : si une involution sur une droite a deux points fixes, alors il existe une carte affine sur laquelle **elle donne une symétrie**. Plus précisément, si M_1 et M_2 sont les points fixes de l'involution, alors en prenant une carte affine où M_1 est le point à l'infini et M_2 l'origine, le point M et son image $\phi(M)$ sont symétriques par rapport à l'origine.

Définition 2.2.13 *Lorsque le birapport de quatre points est égal à -1 on dit que ces points constituent une **division harmonique**.*

Le théorème précédent permet donc de dire que **si une involution a deux points fixes**, alors, ces deux points fixes, un point quelconque et l'image de ce point, constituent une **division harmonique**.

Théorème 2.2.14 *Toute homographie de la droite est la composée d'au plus deux involutions.*

Preuve. Supposons que l'homographie ϕ ait au moins un point fixe. Prenons une carte affine qui envoie ce point fixe à l'infini. Sur la carte affine la transformation est, soit une translation (cas d'un seul point fixe à l'infini) et alors on peut l'écrire comme produit de deux symétries qui proviennent de deux transformations projectives involutives, soit une homothétie de rapport λ (cas de deux points fixes distincts qui sont le centre de l'homothétie et le point à l'infini) et dans ce cas on écrit $\phi = \theta \circ \eta$ où $\eta(x) = 1/x$ et $\theta(x) = \lambda/x$. Donc si l'homographie a un point fixe, on peut toujours l'écrire, si elle-même n'est pas une involution, comme composée de deux involutions.

Etudions maintenant le cas où $K = \mathbb{R}$ et où ϕ n'a aucun point fixe. Notons E l'espace vectoriel de dimension 2 qui définit la droite projective considérée. La transformation homographique considérée provient d'une application linéaire f dont la matrice A dans une base (e_1, e_2) bien choisie est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Si on met sur E une structure euclidienne pour laquelle la base (e_1, e_2) est orthonormée, alors f est une rotation. On peut l'écrire comme un produit de deux symétries axiales g et h . Les transformations projectives $p(g)$ et $p(h)$ sont deux involutions dont le produit est ϕ . \square

Remarque : la preuve dans le cas où ϕ n'a pas de point fixe revient à écrire

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

la première matrice intervenant dans le produit étant la matrice de la symétrie par rapport à l'axe faisant un angle de $\theta/2$ par rapport à l'axe des abscisses, la deuxième matrice étant la matrice de la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

2.2.6 Exemple concernant la division harmonique

Il s'agit de l'étude du **quadrilatère complet**. Considérons deux points distincts A et B du plan projectif. On considère deux droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 distinctes (respectivement $\mathcal{D}'_1, \mathcal{D}'_2$) passant par A (respectivement passant par B). On note $C = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}'_1$, $D = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}'_2$, $E = \mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}'_2$, $F = \mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}'_1$. On note I le point d'intersection de EC avec DF . La droite AI coupe \mathcal{D}'_1 en L et \mathcal{D}'_2 en K . Alors la division (A, I, K, L) est harmonique.

Pour le voir il suffit d'envoyer les points A et B à l'infini. Alors $EFCD$ est un parallélogramme dont I est le centre. En particulier le point I est le milieu de KL , et comme A est le point à l'infini, on a bien le résultat indiqué (cf. figure 2.9).

2.3 La dualité

2.3.1 Espace projectif dual

Considérons l'espace projectif $\mathbb{P}(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension $n + 1$ sur le corps K ($K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$). Le dual algébrique E^* est aussi un espace vectoriel de dimension $n + 1$ et l'espace projectif $\mathbb{P}(E^*)$ a donc la même dimension que $\mathbb{P}(E)$.

Une forme linéaire sera considérée comme un point de E^* et donc comme un représentant d'un point de $\mathbb{P}(E^*)$, mais aussi comme un objet géométrique plus complexe dans $\mathbb{P}(E)$. Associons à chaque forme linéaire non nulle x^* son noyau, qui on le sait est un hyperplan vectoriel. Comme le noyau caractérise non pas exactement x^* , mais l'ensemble des formes linéaires λx^* , on a exactement ce qu'il faut, c'est-à-dire que l'espace projectif $\mathbb{P}(E^*)$ est exactement l'espace des hyperplans vectoriels de E ou ce qui revient au même l'espace des hyperplans de $\mathbb{P}(E)$. Le but de ce paragraphe est de relier des propriétés de points de $\mathbb{P}(E^*)$ avec des comportements géométriques des hyperplans correspondants dans $\mathbb{P}(E)$.

Pour bien comprendre ce qu'il se passe, plaçons-nous dans le cas d'un plan projectif. Nous prendrons E de dimension 3, que nous munirons d'une base (e_1, e_2, e_3) . Nous noterons \mathcal{P} le plan projectif $\mathbb{P}(E)$. Nous prendrons pour base du dual E^* de E la base duale (e_1^*, e_2^*, e_3^*) de la base (e_1, e_2, e_3) . Cette base est définie par

$$e_i^*(e_j) = \delta_{i,j} = 1 \text{ si } i = j, \text{ et } 0 \text{ si } i \neq j.$$

Nous noterons \mathcal{P}^* l'espace projectif $\mathbb{P}(E^*)$. Si m est un point de $\mathbb{P}(E^*)$, notons H_m la droite de \mathcal{P} associée

$$H_m = \{(X : Y : T) \mid m(X, Y, T) = 0\}.$$

Si les coordonnées homogènes de m sont $(u : v : w)$ alors l'équation de la droite H_m s'écrit

$$uX + vY + wT = 0.$$

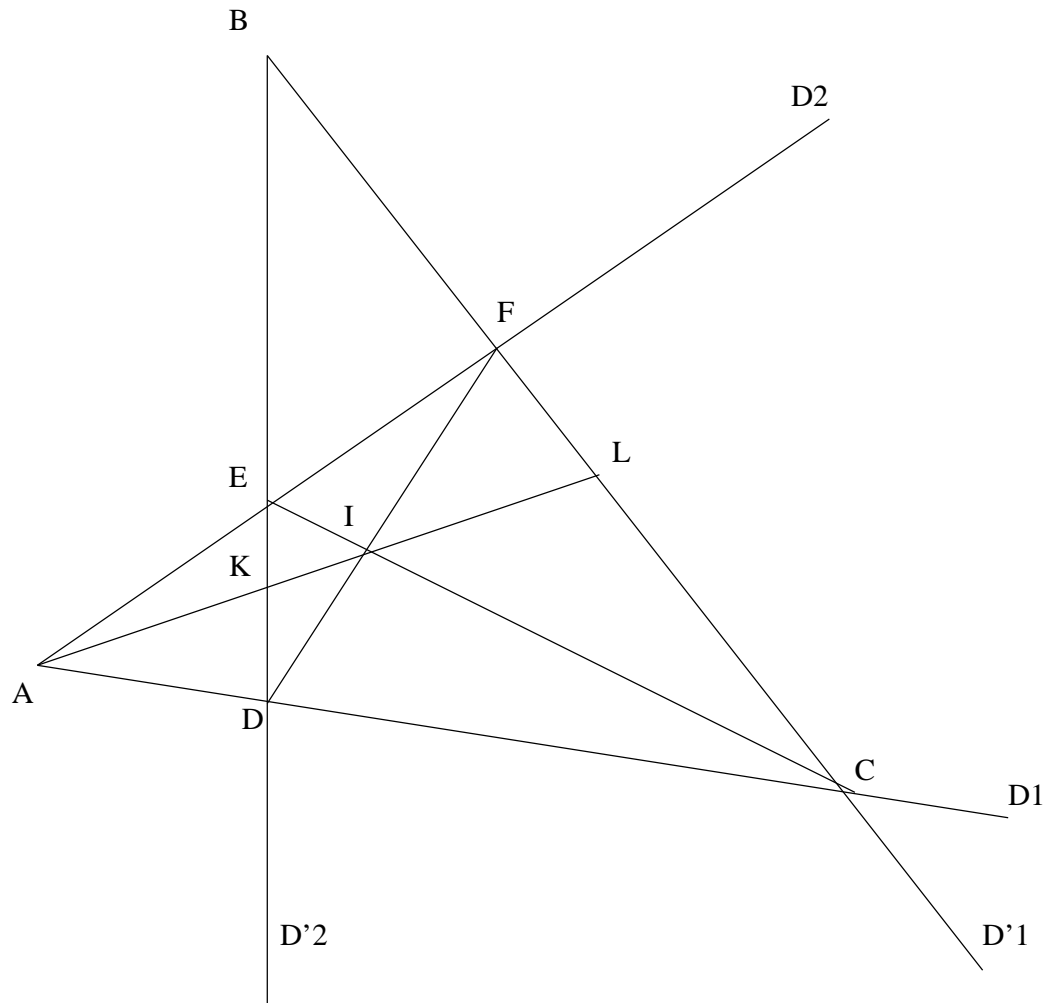


FIG. 2.9 – Quadrilatère complet

Si m_1 et m_2 sont deux points distincts de \mathcal{P}^* , ils définissent les deux équations $m_1(X, Y, T) = 0$ et $m_2(X, Y, T) = 0$ qui déterminent deux droites dans \mathcal{P} . Les points m de la droite de \mathcal{P}^* qui passe par m_1 et m_2 sont de la forme $\lambda m_1 + \mu m_2$ et sont donc associés aux équations $\lambda m_1(X, Y, T) + \mu m_2(X, Y, T) = 0$ qui sont aussi des équations de droites de \mathcal{P} . On voit bien que toutes ces droites de \mathcal{P} passent par le point d'intersection des deux droites de \mathcal{P} correspondant à m_1 et m_2 .

À partir de là, on peut construire le dictionnaire suivant entre les objets de \mathcal{P} et ceux de \mathcal{P}^* .

- Un point m de \mathcal{P}^* est caractérisé par une droite H_m de \mathcal{P} .
- Trois points distincts m_1, m_2, m_3 du plan \mathcal{P}^* sont **alignés** si et seulement si les droites $H_{m_1}, H_{m_2}, H_{m_3}$ du plan \mathcal{P} sont trois droites distinctes **concourantes**.
- Une **droite** d de \mathcal{P}^* correspond à la famille des droites de \mathcal{P} passant par un même point, et donc peut se caractériser dans \mathcal{P} par ce **point** commun qu'on notera M_d . La famille de droites passant par M_d sera appelée **faisceau de droites de point de base** M_d .
- La figure formée dans \mathcal{P}^* par une droite d passant par deux points m_1 et m_2 correspond aux deux droites H_{m_1}, H_{m_2} qui se coupent au point M_d .

Remarque : On a un plongement naturel π de l'espace vectoriel E dans son **bidual** E^{**} en posant pour tout $M \in E$ et tout $m \in E^*$

$$\pi(M)(m) = m(M).$$

Ainsi M , par l'intermédiaire de son plongement $\pi(M)$, s'interprète comme une forme linéaire sur E^* . Le noyau de cette forme linéaire est un hyperplan de E^* . Tout ceci "passe" aux espaces projectifs correspondants. On peut donc préciser le dictionnaire. L'espace $\mathbb{P}(E)$ s'identifie à $\mathbb{P}(E^{**})$. Un point $\pi(M)$ de $\mathbb{P}(E^{**})$ donne, grâce à son noyau, un hyperplan de $\mathbb{P}(E^*)$. On retrouve bien l'hyperplan qui était associé précédemment au point M .

2.3.2 Exemples de situations duales

Compte tenu de ce dictionnaire on peut écrire des **théorèmes duaux** de théorèmes déjà établis. Par exemple pour le théorème de Desargues et le théorème de Pappus, on obtient les théorèmes duaux suivants :

Théorème 2.3.1 (Dual du théorème de Desargues dans le plan)

Dans un plan projectif P considérons trois points A, B, C deux à deux dis-

tincts alignés sur une droite \mathcal{D} . On note \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 (respectivement \mathcal{D}'_1 et \mathcal{D}'_2 , \mathcal{D}''_1 et \mathcal{D}''_2) deux droites distinctes et distinctes de \mathcal{D} , passant par A (respectivement par B , par C). Soit d_1 la droite joignant l'intersection de \mathcal{D}_1 et de \mathcal{D}'_1 à l'intersection de \mathcal{D}_2 et de \mathcal{D}'_2 . Soit d_2 la droite joignant l'intersection de \mathcal{D}_1 et de \mathcal{D}''_1 à l'intersection de \mathcal{D}_2 et de \mathcal{D}''_2 . Enfin soit d_3 la droite joignant l'intersection de \mathcal{D}'_1 et de \mathcal{D}''_1 à l'intersection de \mathcal{D}'_2 et de \mathcal{D}''_2 . Alors les trois droites d_1, d_2, d_3 sont concourantes.

Théorème 2.3.2 (Dual du théorème de Pappus) *Soient deux points distincts A et B d'un plan projectif. On se donne trois droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ (respectivement $\mathcal{D}'_1, \mathcal{D}'_2, \mathcal{D}'_3$) passant par A (respectivement passant par B). Soit d_1 (respectivement d_2, d_3) la droite joignant l'intersection de \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}'_2 à l'intersection de \mathcal{D}_2 avec \mathcal{D}'_1 (respectivement la droite joignant l'intersection de \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}'_3 à l'intersection de \mathcal{D}_3 avec \mathcal{D}'_1 , la droite joignant l'intersection de \mathcal{D}_2 avec \mathcal{D}'_3 à l'intersection de \mathcal{D}_3 avec \mathcal{D}'_2). Alors les trois droites d_1, d_2, d_3 sont concourantes.*

Regardons comment s'exprime la notion de perspective lorsqu'on utilise la dualité. On part donc de deux droites distinctes d_1 et d_2 de $\mathbb{P}(E^*)$, c'est-à-dire de deux faisceaux de droites concourantes, F_A (faisceau de droites concourantes en A) et F_B (faisceau de droites concourantes en B), dans $\mathbb{P}(E)$. On prend un point U de $\mathbb{P}(E^*)$ hors des droites d_1 et d_2 , c'est à dire une droite \mathcal{D}_U dans $\mathbb{P}(E)$ qui n'appartient ni au faisceau F_A ni au faisceau F_B . Si M est un point de d_1 , c'est-à-dire si \mathcal{D}_M est une droite du faisceau F_A , on lui fait correspondre M' de d_2 , c'est-à-dire la droite $\mathcal{D}_{M'}$ du faisceau F_B , tel que U, M, M' soient alignés, c'est-à-dire que \mathcal{D}_M et $\mathcal{D}_{M'}$ se coupent sur la droite \mathcal{D}_U .

On caractérise alors une transformation perspective d'un faisceau sur un autre par le théorème :

Théorème 2.3.3 *Pour qu'une transformation projective d'un faisceau F_A sur un faisceau F_B distinct de F_A soit une perspective, il faut et il suffit que la droite AB du faisceau F_A soit transformée en elle-même.*

2.4 Exemples d'espaces projectifs et de transformations projectives

2.4.1 Espaces d'hyperplans

Nous venons de voir ces espaces lors de l'étude de la dualité. Regardons le cas particulier du plan projectif \mathcal{P} . On a vu qu'une droite de points de l'espace projectif dual \mathcal{P}^* s'interprète dans le plan \mathcal{P} comme un faisceau de droites concourantes. Soient alors 4 points m_1, m_2, m_3, m_4 d'une droite d de \mathcal{P}^* . Les droites correspondantes $H_{m_1}, H_{m_2}, H_{m_3}, H_{m_4}$ sont concourantes.

Théorème 2.4.1 *Soit \mathcal{D} une droite quelconque du plan \mathcal{P} , qui coupe $H_{m_1}, H_{m_2}, H_{m_3}, H_{m_4}$ respectivement en M_1, M_2, M_3, M_4 . Alors*

$$(m_1, m_2, m_3, m_4) = (M_1, M_2, M_3, M_4).$$

Preuve. Nous avons déjà vu que le birapport découpé par les 4 droites $H_{m_1}, H_{m_2}, H_{m_3}, H_{m_4}$, sur la droite \mathcal{D} , ne dépendait pas de cette droite. Il nous faut montrer que ce birapport est celui des points m_1, m_2, m_3, m_4 de la droite d du plan \mathcal{P}^* . Plaçons-nous dans deux repères duaux pour \mathcal{P} et \mathcal{P}^* . Notons $(u_i : v_i : w_i)$ les coordonnées projectives de m_i dans \mathcal{P}^* . Ainsi la droite H_{m_i} de \mathcal{P} a pour équation $u_i X + v_i Y + w_i T = 0$. Prenons pour droite \mathcal{D} (dans \mathcal{P}) la droite à l'infini $T = 0$. Alors le point M_i a pour coordonnées projectives $(X_i : Y_i : T_i)$ avec $X_i = -v_i, Y_i = u_i, T_i = 0$. On voit ainsi que les points M_1, M_2, M_3, M_4 sont les images respectives des points m_1, m_2, m_3, m_4 par l'homographie de d sur \mathcal{D} définie par

$$X = -v, Y = u, T = 0.$$

Donc le birapport est conservé. \square

Nous venons au passage, par l'introduction de l'homographie de la droite d de $\mathbb{P}(E^*)$ sur la droite à l'infini de $\mathbb{P}(E)$, définie par

$$X = -v, Y = u, T = 0,$$

de montrer le résultat suivant :

Théorème 2.4.2 *Soit d une droite de $\mathbb{P}(E^*)$ et \mathcal{D} une droite de $\mathbb{P}(E)$ qui ne passe pas par le point de concours du faisceau linéaire de droites, donné par d . L'application de d sur \mathcal{D} , qui à tout $m \in d$ fait correspondre le point M , intersection de \mathcal{D} avec la droite H_m du faisceau linéaire de droites donné par d , est une homographie.*

2.4.2 Espaces de cercles

On considère les polynômes homogènes en 3 variables, à coefficients dans \mathbb{R} , de la forme

$$f(X, Y, T) = a(X^2 + Y^2) + 2bXT + 2cYT + dT^2.$$

C'est un espace vectoriel E de dimension 4. L'espace projectif $\mathbb{P}(E)$ est de dimension 3. Tout point F de $\mathbb{P}(E)$ est représenté par un polynôme tel que $f(X, Y, T)$, où $(a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0)$. Par ailleurs les objets de cet espace projectif ont une signification géométrique. Chaque équation $f(X, Y, T) = 0$ définit un ensemble de points de $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ appelé cercle (sauf cas particulier). Comme deux équations proportionnelles (avec un facteur non nul) définissent le même cercle, on a ce qu'il nous faut : chaque point F de $\mathbb{P}(E)$ est en correspondance bijective avec un cercle C_F de $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Remarquons que pour $a = 0$, $f(X, Y, T) = T(2bX + 2cY + dT)$, donc le cercle correspondant dégénère en deux droites : la droite à l'infini $T = 0$ et la droite $2bX + 2cY + dT = 0$. Si $a \neq 0$ alors les points à l'infini du cercle C_F sont les points de l'espace projectif $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ vérifiant $T = 0$ et $X^2 + Y^2 = 0$. On obtient deux points de coordonnées homogènes $(1 : i : 0)$ et $(1 : -i : 0)$. Ce sont les **points cycliques**.

Théorème 2.4.3 *Les cercles (éventuellement dégénérés) sont les courbes définies par un polynôme homogène de degré 2, qui passent par les points cycliques. On peut dire aussi : les cercles sont les coniques passant par les points cycliques.*

Preuve. Nous venons de voir que tous les cercles passent par les points cycliques. Soit maintenant une conique qui, dans le repère projectif donné, passe par les points cycliques. Son équation générale est

$$aX^2 + bY^2 + cXY + dXT + eYT + fT^2 = 0,$$

avec $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Les points à l'infini vérifient donc

$$aX^2 + bY^2 + cXY = 0.$$

Puisqu'elle passe par les points cycliques on a

$$a - b - ci = 0,$$

$$a - b + ic = 0.$$

On en conclut que $a = b$ et $c = 0$. La conique est donc bien un cercle.

Remarque : La notion de "cercle géométrique" dépend de l'interprétation géométrique qu'on fait d'un polynôme homogène "équation d'un cercle". C'est donc une notion qui dépend d'un repère choisi et qui ne persiste pas si on effectue un changement de repère ou une homographie. La notion de cercle géométrique n'est pas une "notion projective". En revanche la notion de "conique géométrique" est une notion projective.

On définit des sous-espaces de l'espace projectif des cercles qui, rappelons-le, est de dimension 3. On parlera en particulier de **faisceaux de cercles** pour les sous-espaces de dimension 1.

2.4.3 Espaces de coniques

L'espace des coniques se construit comme celui des cercles. Cette fois-ci on considère les polynômes homogènes en 3 variables, à coefficients dans \mathbb{R} , de la forme

$$f(X, Y, T) = aX^2 + bY^2 + 2cXY + 2dXT + 2eYT + fT^2.$$

C'est un espace vectoriel E de dimension 6. L'espace projectif $\mathbb{P}(E)$ est de dimension 5. Tout point F de $\mathbb{P}(E)$ est représenté par un polynôme tel que $f(X, Y, T)$, où $(a, b, c, d, e, f) \neq (0, 0, 0, 0, 0, 0)$.

Chaque équation $f(X, Y, T) = 0$ définit un ensemble de points de $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ appelé conique (sauf cas particulier). Comme deux équations proportionnelles (avec un facteur non nul) définissent la même conique, on a : chaque point F de $\mathbb{P}(E)$ est en correspondance bijective avec une conique C_F de $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$.

Là encore on s'intéresse à certains sous-espaces de l'espace des coniques. En particulier les sous-espaces de dimension 1 que nous appellerons **faisceaux de coniques**.

Remarque : une conique est déterminée par 5 conditions (l'espace est de dimension 5). Cela peut être 5 points, 5 tangentes, une combinaison de ces conditions, ou d'autres encore. En particulier, si on sait que la conique est un cercle, cela équivaut à la donnée de deux conditions (la conique passe par les deux points cycliques). Il suffit alors de 3 autres conditions pour déterminer entièrement le cercle.

2.4.4 Un peu d'optique

On s'intéresse à l'image d'un point M à travers une lentille de foyers F_1 et F_2 . Si M est hors de l'axe optique on construit la droite passant par M , parallèle à l'axe optique, qui coupe la lentille en J . Puis on considère la droite issue de M qui passe par F_1 . Elle coupe la lentille en I . La droite JF_2 et la droite issue de I , parallèle à l'axe optique, se coupent en M' image de M .

Si le point est en M_1 sur l'axe optique on construit son image de la manière suivante. On trace un segment M_1M parallèle à la lentille, on construit M' , on trace la droite passant par M' parallèle à la lentille; cette droite coupe l'axe optique en M'_1 .

Prenons comme repère projectif le point à l'infini $P_\infty = (1 : 0 : 0)$ de l'axe optique, le point à l'infini $L_\infty = (0 : 1 : 0)$ de la droite qui matérialise la lentille, le point $O = (0 : 0 : 1)$ et enfin le point unité de manière à respecter les unités de mesure. Le point F_2 aura les coordonnées $(f : 0 : 1)$, et F_1 les coordonnées $(-f : 0 : 1)$. Si le point M a pour coordonnées projectives $(X : Y : T)$ un calcul simple montre que l'image M' a pour coordonnées $(X' : Y' : T')$ avec

$$X' = fX$$

$$Y' = fY$$

$$T' = X + fT.$$

On a donc une transformation homographique de matrice

$$A = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 1 & 0 & f \end{pmatrix}.$$

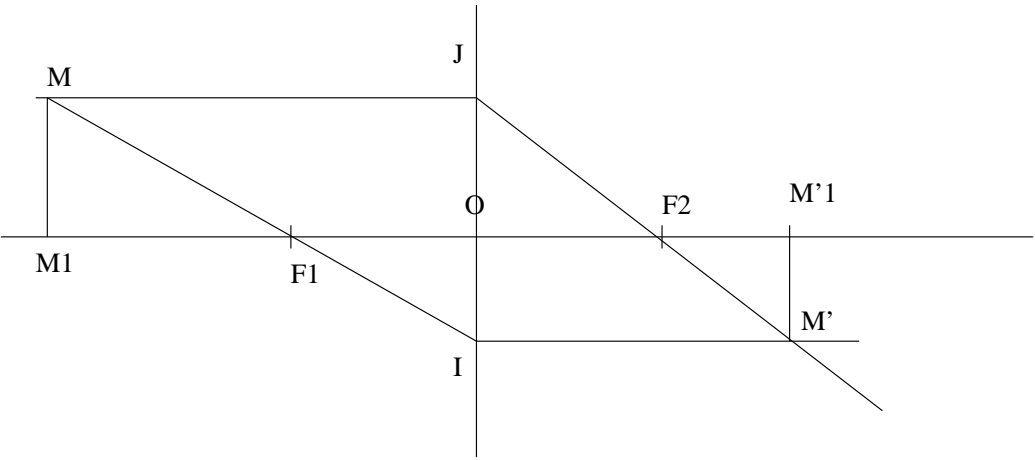


FIG. 2.10 – Lentille mince

Chapitre 3

Les coniques en géométrie projective

3.1 Les coniques projectives

3.1.1 Avertissement sur les courbes algébriques

Travailler avec des objets géométriques tels que droites, cercles, coniques, peut se ramener à étudier leurs représentations analytiques, c'est-à-dire leurs équations. On s'intéresse alors aux racines communes pour les questions d'intersection.

Ces équations sont des équations algébriques (données par des polynômes). Dans ce cours nous nous contenterons des équations de degré 1 (hyperplans), ou de degré 2 (quadriques). Ceci correspond dans le plan aux **droites** et aux **coniques**.

Ce point de vue des équations nous permet de comprendre les diverses extensions qu'on est amené à faire à la théorie vectorielle ou affine classique de la géométrie réelle.

Les trois extensions indispensables

Plaçons-nous par exemple en géométrie plane. Nous avons déjà vu la première extension : il s'agit de masquer le cas particulier de droites qui ne se coupent pas, en faisant en sorte que deux droites distinctes se coupent toujours. Cela fait intervenir la structure projective. Grâce à cette structure on "rajoute"

les points à l'infini. En ce qui concerne la géométrie des droites on a là ce qu'il nous faut.

Dès qu'on fait intervenir des polynômes de degré > 1 , d'autres problèmes se posent. Par exemple une droite et un cercle **ne se coupent pas toujours** dans le plan réel. L'équation $x^2 + y^2 = -1$ est indistinguable de par exemple $x^4 + y^2 = -1$ du point de vue de l'ensemble des points du plan réel (ici vide) défini par ces équations. Pour résoudre ces problèmes, bien qu'on travaille sur des courbes **définies sur \mathbb{R}** , on considère, en plus des points à coordonnées réelles, les points de la courbe (i.e. vérifiant la ou les équations de la courbe) à coordonnées complexes. On obtient alors ce qu'on appelle la **courbe complète**. Désormais une droite et une conique, sauf cas de tangence, se coupent toujours en 2 points, deux coniques se coupent, sauf encore cas particuliers de tangence, en 4 points.

Il reste encore à régler le cas des contacts. Une droite tangente à une conique ne la coupe qu'en un seul point. Cependant du point de vue algébrique on voit bien que dans ce cas certaines équations ont des racines multiples. Là encore si on veut essayer de rendre la théorie agréable à dérouler, il convient d'introduire la notion de **multiplicité** d'un point d'intersection.

Ainsi les trois extensions suivantes vont être utilisées :

- **Espace projectif** (ajout de points à l'infini).
- **Points complexes d'une courbe définie sur \mathbb{R}** .
- **Multiplicité des intersections**.

Transformations homographiques et similitudes

Supposons maintenant que l'espace E soit un espace vectoriel euclidien réel. L'hyperplan affine H qui va servir de carte a donc lui-même une structure euclidienne. Peut-on caractériser les **similitudes** de H à l'aide des transformations projectives de $\mathcal{P} = \mathbb{P}(E)$?

Théorème 3.1.1 *Soit E un espace euclidien réel de dimension $n + 1$ où $n \geq 2$. Soit H un hyperplan affine de E ne passant pas par l'origine. Notons \mathcal{P} l'espace projectif $\mathbb{P}(E)$, de dimension n . Pour qu'une transformation projective ait pour "trace" sur la carte H une similitude, il faut et il suffit qu'elle laisse invariante la sphère à l'infini (avec ses points complexes).*

Preuve. Si sur la carte H on a une similitude, en particulier on a une transformation affine. Donc l'hyperplan à l'infini est transformé en lui-même.

Comme les sphères de H sont transformées en des sphères, l'intersection de l'hyperplan à l'infini avec une sphère est globalement invariante. C'est-à-dire que la sphère à l'infini est globalement invariante.

Réciproquement si la sphère à l'infini est globalement invariante il en est de même de l'hyperplan contenant cette sphère, c'est-à-dire l'hyperplan à l'infini. Donc l'application est une transformation affine. Comme la sphère à l'infini est globalement invariante, l'image d'une sphère est une sphère et donc l'application est une similitude.

Remarque : En particulier si on prend $n = 2$ (cas du plan projectif), pour qu'une transformation projective ait pour "trace" sur la carte H une similitude, il faut et il suffit qu'elle laisse globalement invariant l'ensemble formé des deux points cycliques.

3.1.2 La dualité revisitée

La mise en place des notions de base

Nous avons déjà vu une première approche de la dualité, basée sur la notion de dual algébrique, qui consiste à étudier simultanément $\mathbb{P}(E)$ et $\mathbb{P}(E^*)$. Alors les propriétés de configurations de points dans $\mathbb{P}(E^*)$ s'interprètent avec des propriétés de configurations d'hyperplans dans $\mathbb{P}(E)$, et réciproquement. Cependant les objets de $\mathbb{P}(E)$ et $\mathbb{P}(E^*)$ restent dans des espaces différents.

Pour bien comprendre ce que nous allons faire maintenant, **plaçons-nous dans le cas simple d'un plan projectif** $\mathbb{P}(E)$. Nous allons supposer que nous disposons d'une **conique projective** \mathcal{C} non dégénérée dans $\mathbb{P}(E)$ (c'est-à-dire d'une forme quadratique non dégénérée de E). Du coup cette conique va permettre une identification du dual $\mathbb{P}(E^*)$ avec l'espace $\mathbb{P}(E)$, et tous les objets introduits : les points de $\mathbb{P}(E^*)$, les droites correspondantes de $\mathbb{P}(E)$, les droites de $\mathbb{P}(E^*)$, les points correspondants de $\mathbb{P}(E)$, la conique \mathcal{C} vont se retrouver sur le même dessin. Le but de cette partie est de regarder comment tous ces objets se mettent en place.

La conique \mathcal{C} a comme équation

$$Q(X, Y, T) = 0,$$

où

$$Q(X, Y, T) = aX^2 + bY^2 + 2cXY + 2dXT + 2eYT + fT^2.$$

À tout point M_1 dans $\mathbb{P}(E)$, de coordonnées projectives $(X_1 : Y_1 : T_1)$ associons le point m_1 du dual $\mathbb{P}(E^*)$ défini par

$$m_1(X : Y : T) = aX_1X + bY_1Y + c(X_1Y + Y_1X) + d(X_1T + T_1X) + e(Y_1T + T_1Y) + fT_1T,$$

ce qui donne encore

$$m_1(X : Y : T) = (aX_1 + cY_1 + dT_1)X + (cX_1 + bY_1 + eT_1)Y + (dX_1 + eY_1 + fT_1)T.$$

Introduisons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & c & d \\ c & b & e \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$m_1(X : Y : T) = (X_1 \ Y_1 \ T_1)A \begin{pmatrix} X \\ Y \\ T \end{pmatrix}.$$

Définition 3.1.2 *La droite d'équation*

$$(aX_1 + cY_1 + dT_1)X + (cX_1 + bY_1 + eT_1)Y + (dX_1 + eY_1 + fT_1)T = 0$$

est appelée la polaire du point M_1 par rapport à la conique \mathcal{C} .

Remarque : Le calcul que nous avons fait n'est rien d'autre que l'introduction de la **forme bilinéaire symétrique** B associée à la forme quadratique Q . Ainsi

$$B((X_1, Y_1, T_1), (X, Y, T)) = m_1(X : Y : T).$$

Résumons la situation : à partir de la forme quadratique Q , nous construisons la forme bilinéaire B (obtenue en pratique comme indiqué précédemment par la règle dite du **dédoublément des termes**). Cette forme bilinéaire nous permet de définir une bijection de E dans E^* et aussi de $\mathbb{P}(E)$ dans $\mathbb{P}(E^*)$. Un point M de $\mathbb{P}(E)$ étant donné on lui fait correspondre un point $m = s(M)$ de $\mathbb{P}(E^*)$. Ce point m définit une classe de formes linéaires ayant toutes le même noyau : une droite \mathcal{D} dans $\mathbb{P}(E)$:

$$m(N) = B(M, N),$$

$$\mathcal{D} = \{N \mid m(N) = 0\} = \{N \mid B(M, N) = 0\}.$$

Réciproquement, partons d'une droite \mathcal{D} de $\mathbb{P}(E)$, cette droite est le noyau d'une classe de formes linéaires donnant un point m de $\mathbb{P}(E^*)$. Comme l'application de E dans E^* ou de $\mathbb{P}(E)$ dans $\mathbb{P}(E^*)$ définie par B est bijective, on sait qu'il existe un point M et un seul tel que pour tout point N on ait $B(M, N) = m(N)$.

Définition 3.1.3 *Le point M ainsi trouvé est appelé le **pôle** de la droite \mathcal{D} par rapport à la conique \mathcal{C} .*

Rappelons aussi la définition suivante qui concerne les formes bilinéaires.

Définition 3.1.4 *Deux points M_1 et M_2 de $\mathbb{P}(E)$ sont dits **conjugués** par rapport à \mathcal{C} si*

$$B(M_1, M_2) = 0.$$

Ainsi les définitions impliquent que la polaire de M_1 par rapport à \mathcal{C} est l'ensemble des points conjugués de M_1 par rapport à \mathcal{C} .

Théorème 3.1.5 *Si la polaire de A passe par B , la polaire de B passe par A .*

Preuve. Si la polaire de A passe par B , les points A et B sont conjugués. Donc la polaire de B passe par A . \square

Equation tangentielle

Théorème 3.1.6 *Soit M_1 un point du plan $\mathbb{P}(E)$. Alors M_1 est un point de la conique \mathcal{C} si et seulement si la polaire de M_1 par rapport à \mathcal{C} est tangente à \mathcal{C} . Dans ce cas elle est tangente à \mathcal{C} en M_1 .*

Preuve. Supposons que M_1 soit sur la courbe \mathcal{C} . Le point M_1 est lui-même sur la polaire puisque

$$B(M_1, M_1) = Q(M_1) = 0.$$

Soit M_2 un autre point de cette polaire qui n'est pas sur \mathcal{C} . Alors tout point de la polaire autre que M_2 s'écrit $M = M_1 + \lambda M_2$. Cherchons quels sont parmi ces points, ceux qui sont sur \mathcal{C} (intersection de la polaire avec \mathcal{C}). Pour cela on écrit

$$Q(M_1 + \lambda M_2) = 0.$$

On obtient alors

$$Q(M_1) + 2\lambda B(M_1, M_2) + \lambda^2 Q(M_2) = 0.$$

Mais $Q(M_1)$ et $B(M_1, M_2)$ sont nuls, tandis que $Q(M_2) \neq 0$. On en conclut que λ est solution double. La polaire de M_1 coupe \mathcal{C} en deux points confondus en M_1 .

Réciproquement supposons que la polaire H_1 de M_1 soit tangente à \mathcal{C} . Alors grâce à la partie directe on voit que le point M' de \mathcal{C} où H est tangente à \mathcal{C} a aussi pour polaire H . Donc $M_1 = M'$. \square

Remarque : On aurait pu dire aussi que les coefficients de la tangente en M_1 à \mathcal{C} sont

$$\frac{\partial Q}{\partial X}(X_1, Y_1, T_1), \frac{\partial Q}{\partial Y}(X_1, Y_1, T_1), \frac{\partial Q}{\partial T}(X_1, Y_1, T_1).$$

On constate alors qu'on obtient pour tangente la polaire de M_1 .

Notons q la bijection de E sur son dual E^* que nous avons déjà utilisée et qui consiste à faire correspondre à tout x de E la forme linéaire $q(x)$ définie par $q(x)(y) = B(x, y)$. Nous continuerons à noter aussi par q , l'application correspondante de $\mathbb{P}(E)$ sur $\mathbb{P}(E^*)$. Définissons alors sur E^* la forme quadratique Q^* définie par

$$Q^*(u) = Q(q^{-1}(u)).$$

Nous noterons B^* la forme bilinéaire associée. La matrice A^* de cette forme quadratique est l'inverse de la matrice A de la forme quadratique Q .

Soit M un point quelconque de \mathcal{C} et $m = q(M)$. La condition $M \in \mathcal{C}$ est équivalente à $Q(M) = 0$, donc aussi à $Q^*(m) = 0$. Mais on a vu précédemment que $M \in \mathcal{C}$ si et seulement si la polaire de M est tangente à \mathcal{C} , c'est-à-dire si la droite associée à m est tangente à \mathcal{C} . Donc en conclusion :

Théorème 3.1.7 *La droite associée à la forme linéaire m est tangente à \mathcal{C} si et seulement si $Q^*(m) = 0$.*

Ceci s'exprime analytiquement, en faisant intervenir les coordonnées homogènes de m dans $\mathbb{P}(E^*)$, sous la forme :

La droite de $\mathbb{P}(E)$ d'équation

$$UX + VY + WT = 0$$

est tangente à \mathcal{C} si et seulement si

$$Q^*(U, V, T) = 0.$$

Définition 3.1.8 *L'équation*

$$Q^*(U, V, T) = 0$$

est appelée équation tangentielle de la conique \mathcal{C}

Remarque : le passage des coordonnées projectives $(X : Y : T)$ du point $M \in \mathbb{P}(E)$ aux coefficients $(U : V : W)$ de sa polaire (qui sont les coordonnées projectives du point m de $\mathbb{P}(E^*)$), se fait grâce à la matrice A

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \\ T \end{pmatrix}.$$

La détermination du pôle d'une droite, dont les coefficients sont donnés, se fait grâce à la matrice inverse

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ T \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix}.$$

Pôles et polaires

Le problème qui se pose maintenant est de placer sur un même dessin la conique \mathcal{C} , un point, sa polaire, et de donner des méthodes géométriques concrètes pour construire la polaire d'un point, ou réciproquement, le pôle d'une droite.

Faisons une première remarque. Soit A un point du plan projectif $\mathbb{P}(E)$. Soit H une tangente à \mathcal{C} passant par A . Appelons B le point de tangence. Alors B est un conjugué de A . En effet la polaire de B est, d'après ce que nous avons vu, la tangente H , et passe par A . Donc la polaire de A passe par B .

Théorème 3.1.9 *Soit A un point du plan projectif $\mathbb{P}(E)$ qui n'est pas sur la conique \mathcal{C} . Soit H une droite issue de A qui coupe la conique \mathcal{C} en deux points distincts I et J . Alors il existe sur H un conjugué de A et un seul. C'est le point B de H défini par $(A, B, I, J) = -1$.*

Preuve. Soit D la polaire de A . Comme A n'est pas sur \mathcal{C} , D ne passe pas par A . Par suite D et H ne sont pas confondues et ont donc un point et un seul d'intersection B . C'est donc le seul point conjugué de A qui soit sur H . Considérons maintenant que A soit le point origine de la droite H et B le point à l'infini. Tout point M de la droite H , excepté B , s'écrit $M = A + \lambda B$. Cherchons les paramètres λ_I et λ_J des points I et J . Pour cela écrivons qu'ils sont sur la conique, c'est-à-dire

$$Q(A + \lambda B) = 0.$$

Cette égalité donne encore, en introduisant la forme bilinéaire symétrique R associée à la forme quadratique Q ,

$$Q(A) + 2\lambda R(A, B) + \lambda^2 Q(B) = 0,$$

$$Q(A) + \lambda^2 Q(B) = 0.$$

On trouve donc $\lambda_I = -\lambda_J$. Si on choisit I pour point unité, alors $\lambda_I = 1$, et donc $(A, B, I, J) = \lambda_J = -1$. \square

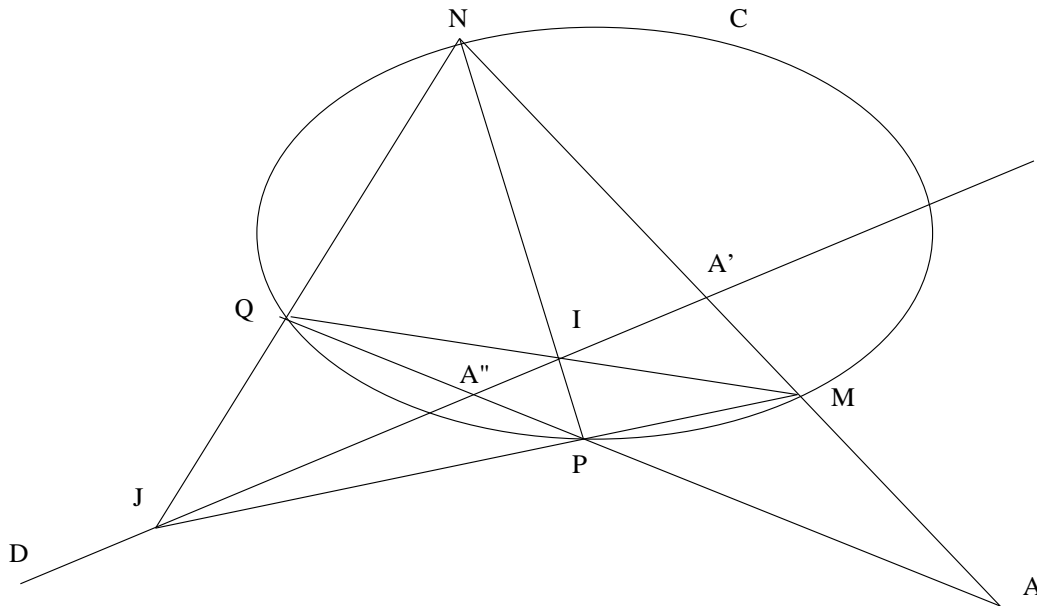
Compte tenu du théorème 3.1.9 et de l'exemple développé en 2.2.6 sur le quadrilatère complet, pour construire la polaire d'un point A , on peut procéder comme suit : on trace deux sécantes issues de A à la conique, qui la coupent respectivement en PQ et MN ; les droites PN et QM se coupent en I , les droites PM et QN se coupent en J ; la droite IJ est la polaire cherchée (cf. figure 3.1).

Droites conjuguées

Définition 3.1.10 Soient deux droites H_1 et H_2 du plan projectif $\mathbb{P}(E)$. Ces deux droites correspondent à deux points m_1 et m_2 du plan $\mathbb{P}(E^*)$. Nous dirons que ces deux droites sont conjuguées par rapport à la conique \mathcal{C} si $R^*(m_1, m_2) = 0$, où R^* est la forme bilinéaire symétrique associée à Q^* .

Remarque : compte tenu de la définition de Q^* on voit que deux droites sont conjuguées, si leurs pôles sont conjugués. Autrement dit, si M_1 et M_2 sont les pôles respectifs de H_1 et H_2 , alors on a aussi $B(M_1, M_2) = 0$.

Soit H_1 une droite fixée dans $\mathbb{P}(E)$. Notons M_1 son pôle. Les droites H qui sont conjuguées de H_1 forment un espace de dimension 1 : c'est le faisceau linéaire des droites passant par M_1 .

FIG. 3.1 – Point A et sa Polaire D

Suite du dictionnaire, transformation par polaires réciproques

Nous complétons maintenant le dictionnaire commencé dans la section 2.3.1, en tenant compte de la coexistence dans le même espace $\mathbb{P}(E)$, des éléments de $\mathbb{P}(E)$ et de ceux de $\mathbb{P}(E^*)$ ramenés dans $\mathbb{P}(E)$ par conjugaison.

Donnons un exemple. Un point M de $\mathbb{P}(E)$ est aussi une droite d de $\mathbb{P}(E^*)$ (droite correspondant au faisceau de droites de $\mathbb{P}(E)$ passant par M). Cette droite d de $\mathbb{P}(E^*)$, est ramenée dans $\mathbb{P}(E)$ grâce au produit scalaire. Elle est représentée par conjugaison, par une droite \mathcal{D} de $\mathbb{P}(E)$, la polaire de M .

Remarquons que la conique \mathcal{C} associée à la forme quadratique Q , dans $\mathbb{P}(E)$, donne la conique \mathcal{C}' , associée à la forme quadratique Q^* , dans $\mathbb{P}(E^*)$. Par conjugaison par rapport à Q , on retrouve la conique \mathcal{C} elle-même. Un point de la conique \mathcal{C} est dans $\mathbb{P}(E^*)$ une droite tangente à \mathcal{C}' . Par conjugaison on trouve la tangente à \mathcal{C} en M (en fait la polaire du point M).

On donne parfois le nom de **transformation par polaires réciproques** à la transformation qui à une droite ou un point de $\mathbb{P}(E)$ fait correspondre son élément polaire. Cette définition peut être améliorée en disant qu'en fait la transformation porte sur les éléments de contact (couple formé d'une droite

et d'un point sur la droite), et qu'elle transforme un élément de contact en un élément de contact. On peut alors transformer une courbe qui en tout point admet une tangente en transformant les éléments de contact de la courbe (formés d'un point de la courbe et de la tangente à la courbe en ce point). Ce que nous venons de dire précédemment signifie que la conique par rapport à laquelle nous prenons la conjugaison, est invariante par cette transformation d'éléments de contact.

Remarque : conjugaison et homographies

On peut définir, grâce à la conjugaison par rapport à une conique, diverses applications : application de $\mathbb{P}(E)$ sur $\mathbb{P}(E^*)$, application de $\mathbb{P}(E)$ sur l'ensemble des droites de $\mathbb{P}(E)$, application d'une droite de $\mathbb{P}(E)$ sur un faisceau de droites de $\mathbb{P}(E)$ etc. Toutes ces applications sont projectives, et ceci découle principalement de la remarque immédiate suivante : l'application q de $\mathbb{P}(E)$ dans $\mathbb{P}(E^*)$, introduite au début, et qui à un point M_1 fait correspondre le point m_1 de $\mathbb{P}(E^*)$, tel que $m_1(M) = B(M_1, M)$, est une application projective.

3.2 La structure projective d'une conique

3.2.1 Définition de la structure

Dans cette partie nous nous plaçons dans le **plan projectif sur \mathbb{R}** et nous fixons une conique \mathcal{C} non dégénérée de ce plan que nous étudions en tant **qu'objet isolé** et non en tant que point d'un certain espace de coniques comme nous l'avons fait dans d'autres parties.

La conique \mathcal{C} a pour équation $Q(X, Y, T) = 0$ où Q est un polynôme à coefficients réels homogène absolument irréductible de degré 2.

Fixons un point A sur \mathcal{C} . On sait que le faisceau de droites passant par A , qu'on notera F_A , a une structure d'espace projectif. Chaque droite H passant par A coupe la conique \mathcal{C} en un deuxième point $c_A(H)$ qui peut être éventuellement A lui-même dans le cas particulier de la tangente à \mathcal{C} passant par A . L'application c_A est une bijection de F_A sur \mathcal{C} qui permet de transporter sur \mathcal{C} la structure projective du faisceau de droites passant par A .

Le théorème suivant montre **l'indépendance de cette structure** transportée sur la conique, par rapport au point A choisi.

Théorème 3.2.1 (Steiner) *Si A et B sont deux points distincts de \mathcal{C} , l'application ϕ de F_A sur F_B définie par*

$$\phi = c_B^{-1} \circ c_A,$$

est une homographie de F_A sur F_B .

Preuve. Fixons un repère projectif tel que $A = (1 : 0 : 0)$, $B = (0 : 1 : 0)$. Supposons de plus que le point $C = (0 : 0 : 1)$ soit aussi sur la conique et le point unité où on veut. Alors si nous écrivons l'équation générale d'une conique sous la forme

$$aX^2 + bY^2 + cXY + dXT + eYT + fT^2 = 0,$$

en écrivant que les points A , B , C sont sur la conique, on voit que $a = b = f = 0$. Donc l'équation de la conique est

$$cXY + dXT + eYT = 0.$$

Les droites (à l'exception de la droite $T = 0$) du faisceau F_A ont pour équations

$$Y - \alpha T = 0.$$

Cherchons les coordonnées $(U : V : W)$ du deuxième point d'intersection de la droite de paramètre α avec la conique. On obtient

$$\frac{U}{W} = -\frac{e\alpha}{c\alpha + d},$$

$$\frac{V}{W} = \alpha.$$

Si on refait le même calcul à partir du faisceau F_B alors

$$\frac{U}{W} = \alpha',$$

$$\frac{V}{W} = -\frac{d\alpha'}{c\alpha' + e}.$$

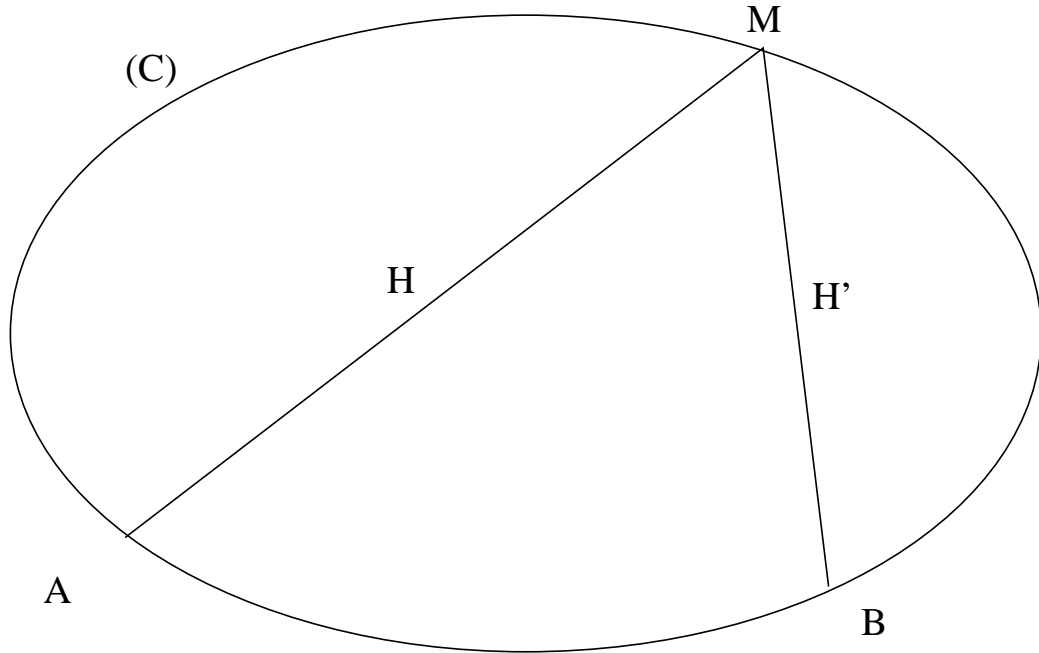


FIG. 3.2 – Théorème de Steiner

Par suite

$$\alpha' = -\frac{e\alpha}{c\alpha + d}.$$

On a bien une relation homographique entre α et α' . \square

Remarque : le cas particulier de la droite $T = 0$ correspond à $\alpha = \infty$ auquel cas la transformée est la droite tangente en B à la conique (on vérifie facilement que c'est bien le cas).

Remarque : le cas d'une conique dégénérée peut aussi se traiter, pourvu que la conique soit réunion de deux droites, dont l'une est AB et dont l'autre ne passe ni par A ni par B (sinon la transformation n'est pas bijective).

Théorème 3.2.2 (Réciproque du théorème de Steiner) *Si ϕ est une homographie du faisceau F_A sur le faisceau F_B alors l'intersection d'une droite H du faisceau F_A avec la droite $\phi(H)$ du faisceau F_B engendre une conique (éventuellement dégénérée) qui contient A et B . Si la droite AB qui appartient aux deux faisceaux est transformée en elle-même, alors la conique est dégénérée en deux droites dont l'une est AB . Dans tous les autres cas la conique est non dégénérée.*

Preuve. Si on a une homographie de F_A sur F_B alors on a une relation homographique de la forme

$$\alpha' = \frac{u\alpha + v}{w\alpha + t}.$$

En composant par une homographie bien choisie on peut se ramener à une homographie du type

$$\alpha' = -\frac{e\alpha}{c\alpha + d}.$$

Le calcul du théorème précédent montre que le point d'intersection d'une droite de F_A avec son homologue de F_B décrit une conique contenant A et B . La conique $cXY + dXT + eYT = 0$ est dégénérée si et seulement si l'un des coefficients est nul. Dans ce cas, la conique dégénère en deux droites. La droite AB doit être l'une de ces deux droites, sinon les deux droites passent l'une par A , l'autre par B , et la transformation n'est pas bijective. Donc forcément l'une des deux est AB et l'autre une droite qui ne passe ni par A ni par B . Il est alors facile de voir que la droite AB est transformée en elle-même. \square

Remarque : Le cas où la conique est dégénérée correspond à une perspective du faisceau F_A sur le faisceau F_B . C'est le seul cas où la conique dégénère.

Regardons la situation duale :

Théorème 3.2.3 *Soient D_A et D_B deux droites distinctes, tangentes à une conique non dégénérée \mathcal{C} . Soit M_H un point de D_A . On mène depuis M_H l'autre tangente (sauf cas particulier de tangente double) à la conique, qui coupe la droite D_B en M'_H . Alors la transformation qui à M_H fait correspondre M'_H est une homographie de la droite D_A sur la droite D_B .*

Preuve. C'est le théorème dual du théorème 3.2.1. \square

Théorème 3.2.4 *Si on a une homographie ϕ d'une droite D_A sur une autre droite D_B , alors les droites qui joignent les points homologues enveloppent une conique (qui peut être dégénérée : cas où le point d'intersection des deux droites D_A et D_B est transformé en lui-même) qui est tangente à D_A et D_B .*

Preuve. C'est le théorème dual du théorème 3.2.2. \square

3.2.2 Birapport

Nous venons de voir qu'on peut mettre sur une conique une structure de **droite projective**. On peut donc parler du birapport de quatre points de la conique, et plus généralement, de toutes les notions introduites sur la droite projective.

Soient M_1, M_2, M_3, M_4 quatre points d'une conique propre \mathcal{C} . On suppose que les 3 premiers sont distincts deux à deux. Fixons un point A de \mathcal{C} . Alors le birapport est, compte tenu de la définition de la structure projective de la conique, le birapport des quatre droites AM_1, AM_2, AM_3, AM_4 . Nous avons vu que ce birapport est indépendant du point A choisi.

3.2.3 Théorème de Pascal et de Brianchon

Théorème 3.2.5 (Pascal) *Sur une conique non dégénérée \mathcal{C} on prend 6 points deux à deux distincts C, N, D, A, M, B qui donnent un hexagone. On numérote les côtés de 1 à 6 dans l'ordre CN, ND, DA, AM, MB, BC . Et on considère les intersections des côtés opposés $1 - 4, 2 - 5, 3 - 6$. Ces intersections sont alignées. Ainsi les points $U = CN \cap AM, V = ND \cap MB, O = DA \cap BC$ sont alignés.*

Preuve. Supposons le point N variable. L'application qui à la droite CN du faisceau issu du point C fait correspondre la droite DN du faisceau issu de D est projective en vertu du théorème de Steiner. Soit U le point d'intersection de CN avec AM et V le point d'intersection de DN avec BM . L'application de la droite AM sur la droite BM qui à U fait correspondre V est homographique. En effet l'application qui à U donne CN est une homographie d'après le théorème 2.4.2, l'application qui à CN associe DN est aussi une homographie ainsi qu'on vient de le voir, et enfin, de nouveau en vertu du théorème 2.4.2, l'application qui à DN associe V est une homographie. De plus, si U est au point M (cas où N est en M) alors V est aussi en M . Donc la transformation qui à U fait correspondre V est une perspective. En prenant les cas particuliers où N est en A puis où N est en B , on voit que le centre de cette perspective est au point O , intersection de DA et BC . On en conclut que U, V et O sont alignés.

Le théorème de Pascal peut aussi s'appliquer à un **pentagone**. On considère par exemple que le point M est en A , auquel cas on remplace la droite AM par la **tangente** en A à la conique.

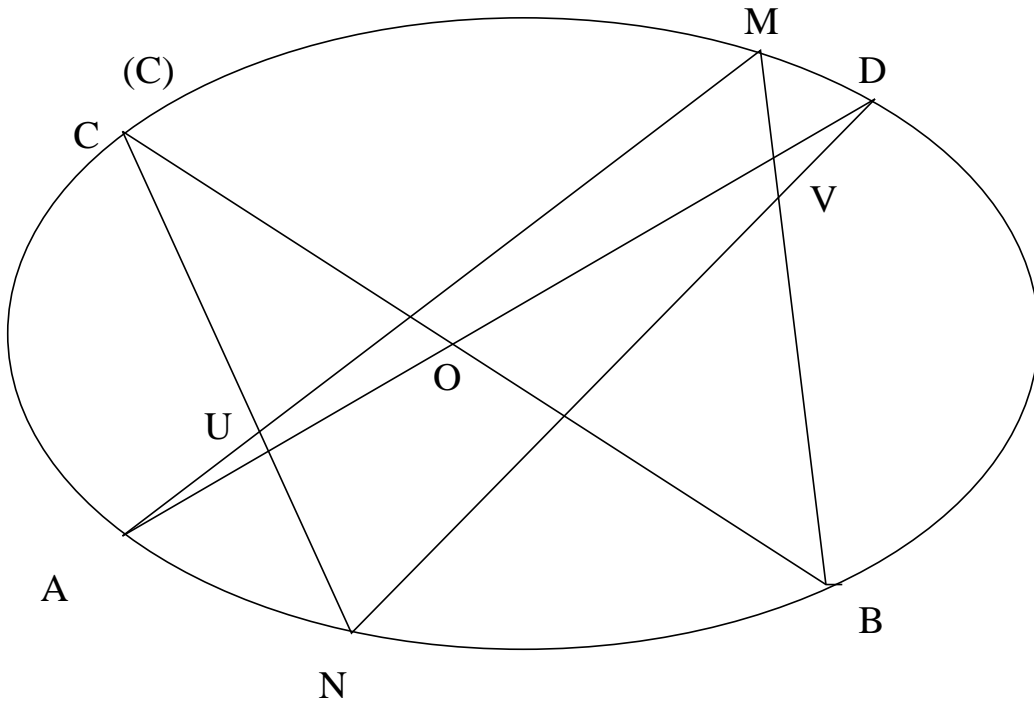


FIG. 3.3 – Théorème de Pascal

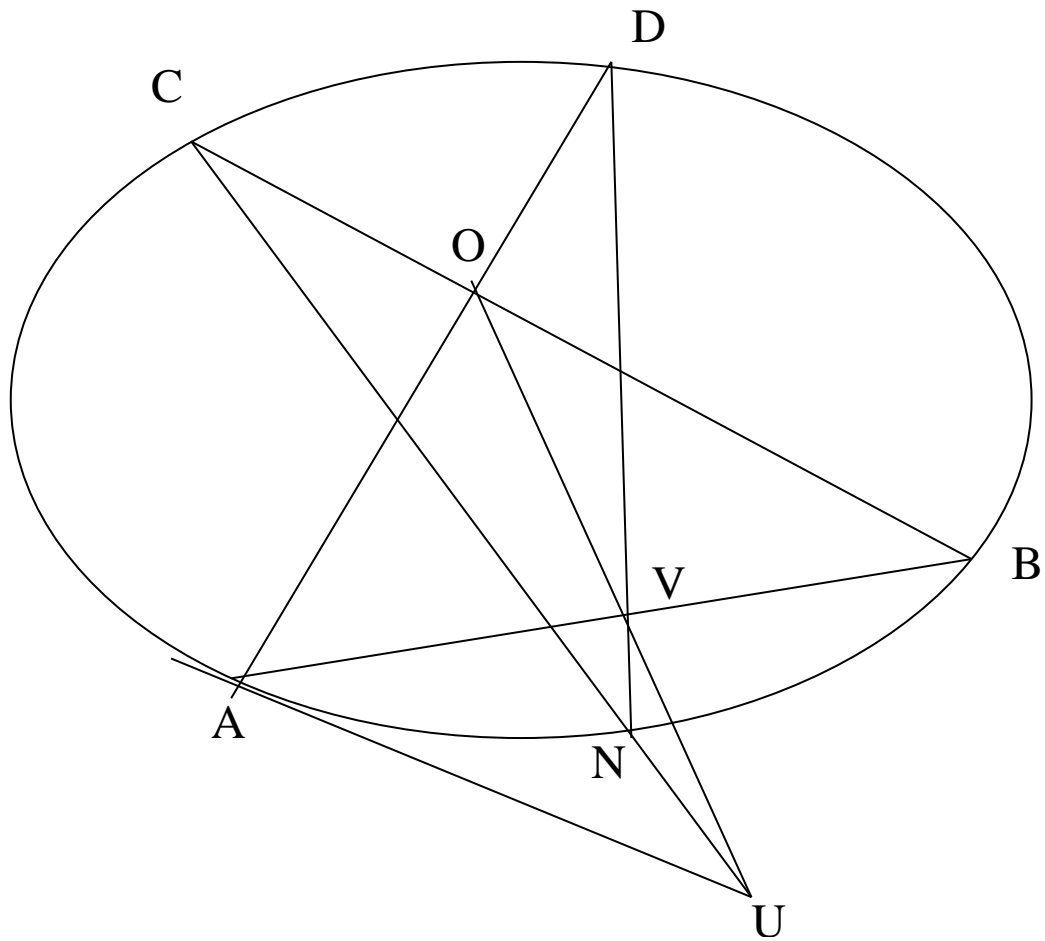


FIG. 3.4 – Théorème de Pascal pour un pentagone

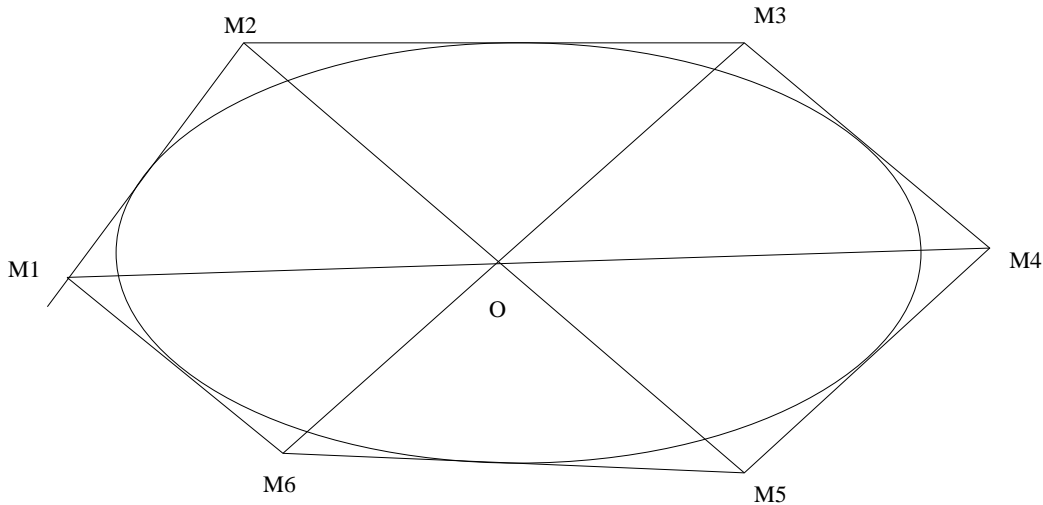


FIG. 3.5 – Théorème de Brianchon

Le théorème de Pascal admet aussi un théorème dual appelé théorème de Brianchon.

Théorème 3.2.6 (Brianchon) *Soit une conique non dégénérée \mathcal{C} . On considère 6 tangentes deux à deux distinctes qui forment les côtés d'un hexagone $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$ dans lequel la conique est inscrite. Alors les droites M_1M_4, M_2M_5, M_3M_6 , joignant les sommets opposés, sont concourantes.*

3.2.4 Constructions de points et de tangentes

On dira que n points d'un plan projectif sont en **configuration générale** lorsque aucun sous-ensemble de trois points pris parmi les n points ne constitue un alignement. On a la notion duale de n droites en configuration générale : aucun sous-ensemble de trois droites prises parmi les n droites n'est un ensemble de trois droites concourantes.

Construction d'un point d'une conique donnée par 5 points

On donne 5 points en configuration générale, notés A, N, B, D, C . On sait qu'il passe une conique \mathcal{C} et une seule par ces 5 points. Cette conique est non dégénérée. On trace une droite Δ passant par A . Construire l'intersection M de \mathcal{C} avec Δ .

Le théorème de Pascal nous fournit une construction.

- 1) On construit $O = CB \cap AD$,
- 2) On construit $U = CN \cap \Delta$,
- 3) On construit $V = OU \cap DN$,
- 4) On construit $M = BV \cap \Delta$.

Construction d'une tangente à une conique donnée par 5 tangentes

On donne 5 tangentes en configuration générale notées $\mathcal{D}_A, \mathcal{D}_N, \mathcal{D}_B, \mathcal{D}_D, \mathcal{D}_C$. On sait qu'il existe une conique \mathcal{C} et une seule tangente à ces 5 droites. Cette conique est non dégénérée. On prend un point m sur la droite \mathcal{D}_A . Construire l'autre tangente, \mathcal{D}_m , à la conique \mathcal{C} .

Il s'agit de la situation duale de la situation précédente.

- 1) On construit la droite $\Delta_O = \text{Droite}(\mathcal{D}_C \cap \mathcal{D}_B, \mathcal{D}_A \cap \mathcal{D}_D)$,
- 2) On construit la droite $\mathcal{D}_U = \text{Droite}(\mathcal{D}_C \cap \mathcal{D}_N, m)$,
- 3) On construit la droite $\mathcal{D}_V = \text{Droite}(\Delta_O \cap \mathcal{D}_U, \mathcal{D}_D \cap \mathcal{D}_N)$,
- 4) On construit la droite $\mathcal{D}_m = \text{Droite}(\mathcal{D}_B \cap \mathcal{D}_V, m)$.

Construction d'une tangente en un point choisi parmi 5 points définissant une conique

On donne 5 points en configuration générale, notés A, N, B, D, C . On veut construire la tangente en A à la conique définie par ces 5 points.

Le théorème de Pascal pour les pentagones nous fournit une méthode. Soient D, C, A, N, B les 5 points. Numérotons les côtés de la façon suivante : DC est le 1, CA le 2, AA (tangente en A) est le 3, AN le 4, NB le 5 et BD le 6.

- 1) On construit le point $I = CD \cap AN$,
- 2) On construit $J = CA \cap NB$,
- 3) DB coupe IJ en K ,
- 4) KA est la tangente cherchée.

Construction du point de contact d'une tangente choisie parmi 5 tangentes définissant une conique

On donne 5 tangentes en configuration générale notées $\mathcal{D}_A, \mathcal{D}_N, \mathcal{D}_B, \mathcal{D}_D, \mathcal{D}_C$. On cherche le point de contact A de \mathcal{D}_A avec la conique définie par ces 5 tangentes.

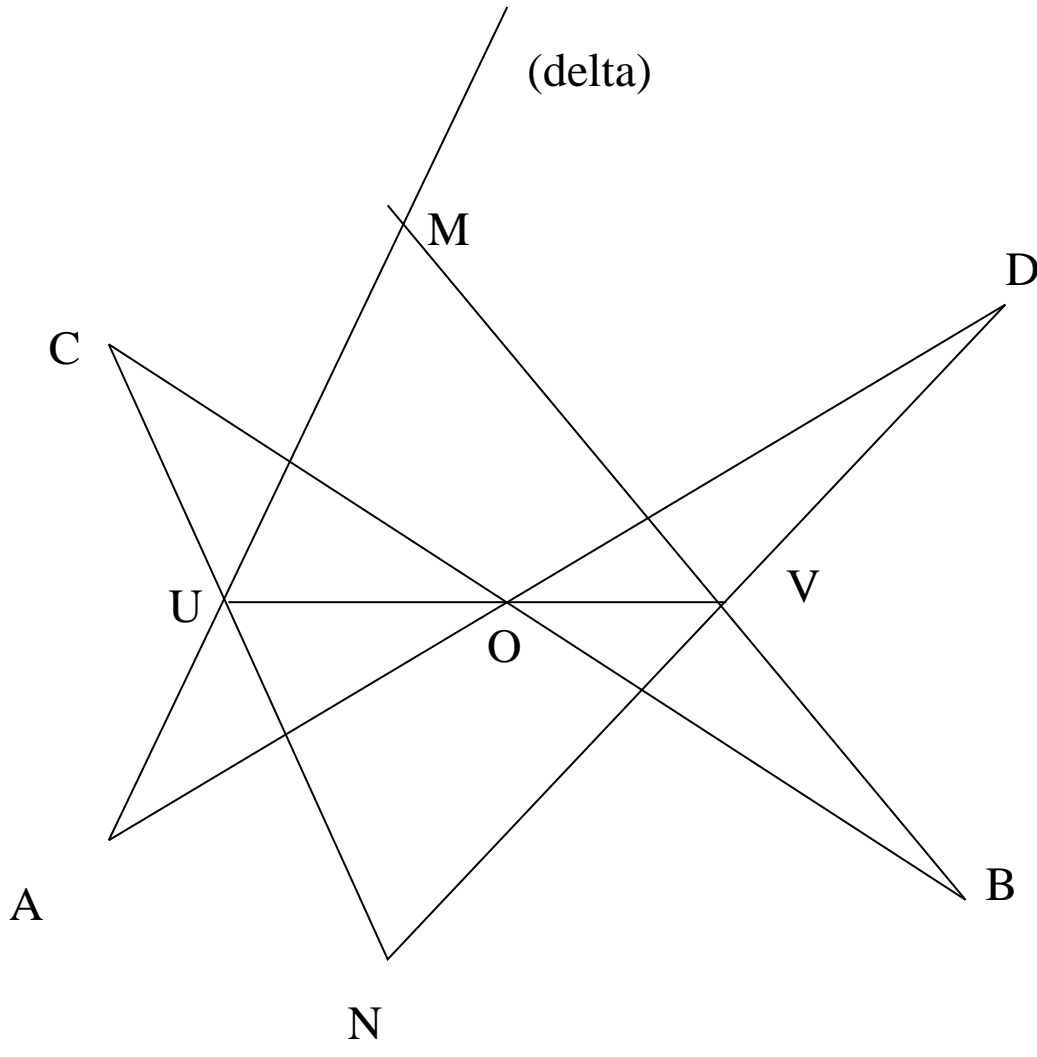


FIG. 3.6 – Construction d'un point

Ce problème est le problème dual du précédent.

- 1) On construit la droite $\mathcal{D}_I = Droite(\mathcal{D}_C \cap \mathcal{D}_D, \mathcal{D}_A \cap \mathcal{D}_N)$,
- 2) On construit la droite $\mathcal{D}_J = Droite(\mathcal{D}_C \cap \mathcal{D}_A, \mathcal{D}_N \cap \mathcal{D}_B)$,
- 3) On construit la droite $\mathcal{D}_K = Droite(\mathcal{D}_D \cap \mathcal{D}_B, \mathcal{D}_I \cap \mathcal{D}_J)$,
- 4) Le point $\mathcal{D}_K \cap \mathcal{D}_A$ est le point cherché.

3.2.5 Conique à structure projective plongée dans le plan

Désormais nous relient la **structure projective de la conique** avec des propriétés géométriques de la **conique en tant qu'objet plongé** dans le plan.

Théorème de Frégier

Théorème 3.2.7 (Frégier) *Soit \mathcal{C} une conique non dégénérée dans le plan projectif. On considère sa structure projective. Soit A un point qui n'est pas sur \mathcal{C} . L'application ϕ qui à tout point M de la conique \mathcal{C} fait correspondre le deuxième point d'intersection de la droite AM avec \mathcal{C} est une involution. Réciproquement, soit ϕ une involution de la conique \mathcal{C} sur elle-même. Alors les droites joignant les points homologues $M, \phi(M)$ sont concourantes.*

Preuve. Soit A un point qui n'est pas sur \mathcal{C} . Soit O un point fixé sur \mathcal{C} . Soit Δ une droite fixée passant par A , qui coupe la conique \mathcal{C} en deux points distincts, et distincts de O , M_1 et M'_1 . La tangente à \mathcal{C} issue de O coupe Δ en I . Soit maintenant un point M quelconque de \mathcal{C} , et M' son homologue par la transformation ϕ . Enfin, notons K l'intersection de OM avec Δ . Alors on a les égalités suivantes concernant les birapports :

$$(M_1, M'_1, O, M) = (OM_1, OM'_1, OI, OK) = (M_1, M'_1, I, K),$$

$$(M_1, M'_1, O, M') = (MM_1, MM'_1, MK, MA) = (M_1, M'_1, K, A).$$

On constate que

$$(M_1, M'_1, O, M) \times (M_1, M'_1, O, M') = (M_1, M'_1, I, A),$$

et comme les points M_1, M'_1, A, I sont fixes, le produit

$$(M_1, M'_1, O, M) \times (M_1, M'_1, O, M')$$

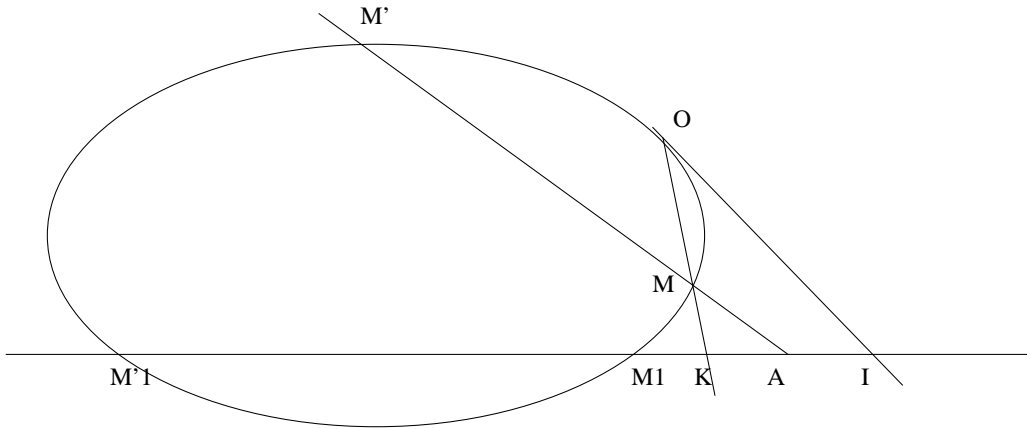


FIG. 3.7 – Point de Frégier

est constant. Par suite la transformation qui au birapport (M_1, M'_1, O, M) associe le birapport (M_1, M'_1, O, M') est une homographie. En vertu du corollaire 2.2.5, la transformation qui à M associe M' est une homographie. Cette homographie est clairement involutive.

Réciproquement, si ϕ est une involution, considérons deux points M et N qui ne sont pas homologues. Soit A le point d'intersection des droites $M\phi(M)$ et $N\phi(N)$. L'involution définie par le point A , comme indiqué dans la partie directe du théorème, coïncide avec ϕ sur deux points M et N . On sait grâce au théorème 2.2.10 qu'une involution est entièrement déterminée par deux couples de points homologues. Donc cette involution est exactement ϕ . Donc toutes les droites joignant les points homologues sont concourantes en A . \square

Définition 3.2.8 *Le point de concours des droites joignant les points homologues d'une involution sur une conique est appelé le **point de Frégier** de cette involution.*

Axe d'homographie

Théorème 3.2.9 *Soit \mathcal{C} une conique non dégénérée dans le plan projectif. On considère sa structure projective. Soit ϕ une homographie de \mathcal{C} . Alors il existe une droite Δ , du plan projectif contenant \mathcal{C} , telle que pour tout couple M, N de points distincts appartenant à \mathcal{C} , on a $N' = \phi(N)$ si et seulement si le point d'intersection de MN' avec $N\phi(M)$ est sur Δ . Les points fixes de l'homographie sont les intersections de Δ avec \mathcal{C} .*

Preuve. Soit A un point fixé de \mathcal{C} et $A' = \phi(A)$. Soit M un point de \mathcal{C} et $M' = \phi(M)$. Soit F_A le faisceau des droites issues de A et $F_{A'}$ le faisceau des droites issues de A' . La transformation de $F_{A'}$ sur F_A qui à la droite $A'M$ fait correspondre AM' est une homographie. La droite $A'A$ est transformée en elle-même, donc c'est une perspective entre faisceaux. Il existe donc une droite $\Delta_A(\phi)$ sur laquelle $A'M$ et AM' se coupent quel que soit M .

Pour achever la démonstration du théorème, il suffit de montrer maintenant que cette droite $\Delta_A(\phi)$ est indépendante de A . Pour cela on prend trois couples de points homologues A, A', B, B', C, C' et on constate grâce au théorème de Pascal que les points d'intersection $I = AB' \cap BA', J = AC' \cap CA', K = BC' \cap CB'$ sont alignés. Or il est clair que $IJ = \Delta_A(\phi)$ et que $IK = \Delta_B(\phi)$. On en déduit que $\Delta_A(\phi) = \Delta_B(\phi) = \Delta$.

Il est immédiat de voir que les intersections de Δ avec la conique \mathcal{C} sont les points fixes de l'homographie. \square

Définition 3.2.10 *La droite Δ donnée par le théorème précédent est appelée l'axe de l'homographie.*

Application : recherche de l'image M' d'un point M par une homographie donnée par 3 couples de points homologues.

On dispose de trois couples de points homologues A, A', B, B', C, C' . Ceci nous permet de construire l'axe Δ de l'homographie. Soit M un point de la conique. On trace MA' qui coupe Δ en I . La droite AI coupe la conique en M' .

Application : recherche des points fixes d'une homographie sur la droite.

Considérons une homographie ϕ , sur une droite Δ , donnée par 3 couples de points homologues A, A', B, B', C, C' . On construit un cercle \mathcal{C} , et on fixe un point S sur ce cercle. On considère la transformation θ qui à un point M de la droite Δ fait correspondre le point m , deuxième intersection de AM avec \mathcal{C} . C'est une homographie. Les points A, A', B, B', C, C' sont transformés en a, a', b, b', c, c' sur le cercle. Ces trois couples de points définissent une homographie unique sur le cercle. On peut construire l'axe de cette homographie et en déterminer les points doubles. L'image de ces points doubles par θ^{-1} donne les points doubles de ϕ .

Application : recherche des points d'intersection d'une droite avec une conique donnée par 5 points.

Soient A, B, C, S, S' les 5 points en configuration générale qui définissent la conique \mathcal{C} . Soit Δ la droite donnée. SA, SB, SC coupent Δ en A_1, B_1, C_1 . $S'A, S'B, S'C$ coupent Δ en A'_1, B'_1, C'_1 . Si M est un point de la conique, la transformation du faisceau F_S sur le faisceau $F_{S'}$ qui à la droite SM fait correspondre $S'M$ est une homographie, donc sur la droite Δ la transformation qui à $M_1 = SM \cap \Delta$ fait correspondre $M'_1 = S'M \cap \Delta$ est une homographie dont les points fixes sont les intersections de Δ avec \mathcal{C} . On construit ces points doubles comme indiqué précédemment.

Application : le problème de Castillon.

Soit \mathcal{C} une conique. Considérons trois points du plan, A, B, C , distincts deux à deux, qui ne sont pas sur la conique. Construire un triangle M_1, M_2, M_3 , dont les sommets sont sur la conique et tels que A soit sur la droite M_1M_2 , B sur la droite M_2M_3 et C sur la droite M_3M_1 .

Considérons la transformation ψ qui à tout point M de la conique fait correspondre le point $\psi(M)$ défini de la façon suivante : MA recoupe la conique en I , IB recoupe la conique en J , JC recoupe la conique en $\psi(M)$. Cette transformation n'est rien d'autre que le produit des trois involutions $\mathcal{I}_C \circ \mathcal{I}_B \circ \mathcal{I}_A$ de points de Frégiers respectifs A, B, C . Le point M_1 cherché (à partir duquel il est facile de construire de façon unique M_2 et M_3) est tout point fixe de l'homographie ψ . Pour avoir ces points fixes il suffit de construire trois couples distincts de points homologues, puis l'axe Δ de l'homographie et enfin de prendre l'intersection de l'axe Δ avec la conique \mathcal{C} .

Généralisation du théorème de Frégier

Théorème 3.2.11 *Soit \mathcal{C} une conique non dégénérée dans le plan projectif. On considère sa structure projective. Soit ϕ une homographie de la conique \mathcal{C} sur elle-même. Alors les droites joignant les points homologues $M, \phi(M)$ enveloppent une conique qui est bitangente à \mathcal{C} aux points fixes de l'homographie.*

Preuve. Soit B un des points doubles de l'homographie (on introduit éventuellement les points complexes). On choisit un autre point A de la conique

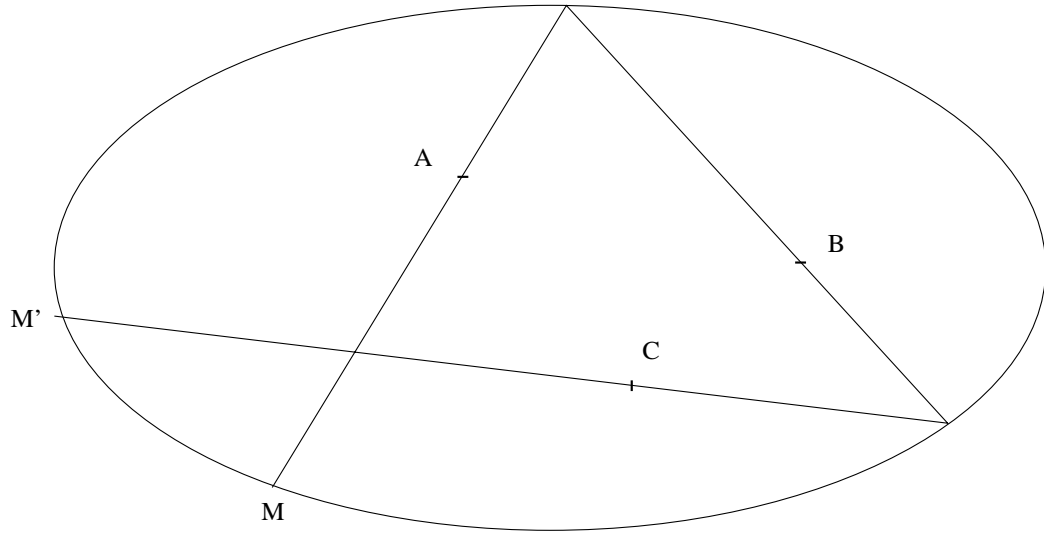


FIG. 3.8 – Problème de Castillon

distinct de B . On choisit un repère projectif tel que $A = (0 : 0 : 1)$, $B = (0 : 1 : 0)$, et tel que la droite $Y = 0$ soit tangente en A à la conique (ou autrement dit que le point $C = (1 : 0 : 0)$ soit sur la tangente en A à la conique). L'équation de la conique est alors

$$aX^2 + cXY + eYT = 0.$$

Les coefficients a et e sont non nuls, sinon la conique est dégénérée. Quitte à tout diviser par a on peut considérer que $a = 1$. Soit D un point de la conique autre que A et B . On peut imposer $D = (e : -e : 1)$ (on n'avait pas encore choisi un quatrième point pour le repère projectif). L'équation de la conique est alors

$$X^2 + eYT = 0.$$

Les deux droites $X = 0$ et $Y = 0$ passent par A . Donc les droites du faisceau des droites passant par A ont pour équations (cf. la remarque de la section 2.2.1)

$$\lambda X - Y = 0.$$

Nous noterons $D(\lambda)$ la droite de paramètre λ du faisceau. Paramétrons la conique par le paramètre λ , en associant à ce paramètre le point $M(\lambda)$ où la droite $D(\lambda)$ recoupe la conique. On calcule les coordonnées de $M(\lambda)$. Elles

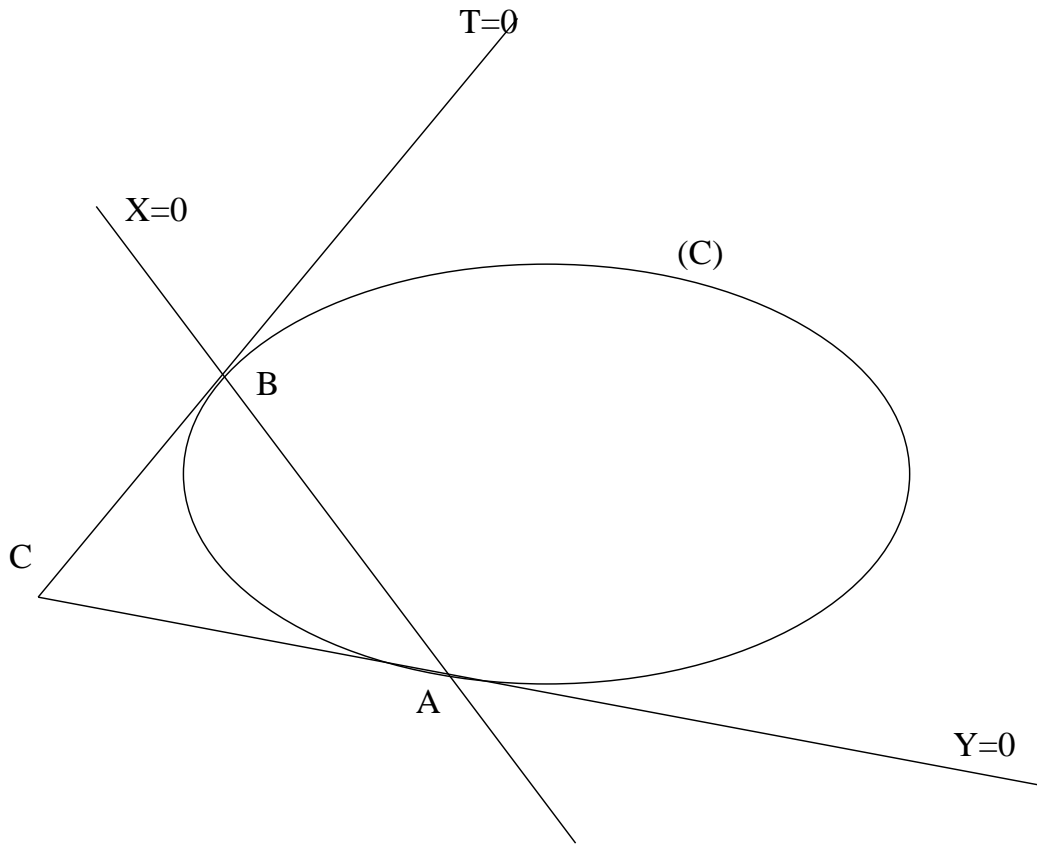


FIG. 3.9 – Théorème sur l'enveloppe

sont de la forme

$$M(\lambda) = (\lambda : \lambda^2 : \gamma),$$

où $\gamma = -1/e$.

Si $M = M(\lambda)$ et $M' = M(\lambda')$ sont deux points de la conique, alors la droite passant par ces deux points a pour équation

$$\begin{vmatrix} \lambda & \lambda' & X \\ \lambda^2 & \lambda'^2 & Y \\ \gamma & \gamma & T \end{vmatrix} = 0.$$

Nous devons étudier le cas où M' est le transformé de M dans une homographie de point double B . Or le point double B a pour paramètre $\lambda = \infty$ (il est sur la droite $X = 0$). Par suite on a pour tout λ

$$\lambda' = \alpha\lambda + \beta,$$

où $\alpha \neq 0$. Si $\alpha \neq 1$ alors en prenant pour nouveau paramètre

$$\lambda_1 = \lambda - \frac{\beta}{1 - \alpha},$$

on se ramène au cas où

$$\lambda'_1 = \alpha\lambda_1.$$

Nous avons donc deux cas à étudier :

- $\lambda' = \alpha\lambda$: dans ce cas la droite MM' a pour équation

$$\begin{vmatrix} \lambda & \alpha\lambda & X \\ \lambda^2 & \alpha^2\lambda^2 & Y \\ \gamma & \gamma & T \end{vmatrix} = 0.$$

- $\lambda' = \lambda + \beta$: dans ce cas la droite MM' a pour équation

$$\begin{vmatrix} \lambda & \lambda + \beta & X \\ \lambda^2 & (\lambda + \beta)^2 & Y \\ \gamma & \gamma & T \end{vmatrix} = 0.$$

Dans ce cas on peut supposer $\beta \neq 0$, sinon la transformation homographique considérée est l'identité, et l'enveloppe est la conique \mathcal{C} .

Ecrivons l'équation de la droite MM' sous la forme

$$uX + vY + wT = 0.$$

Calculons dans les deux cas les coefficients u, v, w .

- $\lambda' = \alpha\lambda$, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$: on trouve

$$(u : v : w) = (-\gamma(1 + \alpha)\lambda : \gamma : \alpha\lambda^2).$$

On a donc deux sous-cas :

- ▷ $\alpha = -1$: les droites passent toutes par le point $C = (1 : 0 : 0)$. On est dans le cas où la transformation homographique est une involution ; les droites joignant les points homologues passent par le point de Frégier.
- ▷ $\alpha \neq -1$: on a une relation quadratique de la forme $u^2 = sw$, ce qui prouve que les droites enveloppent une conique \mathcal{C}_1 dont on vient de donner l'équation tangentielle.
- $\lambda' = \lambda + \beta$, $\beta \neq 0$: dans ce cas on obtient

$$(u : v : w) = (-\gamma(2\lambda + \beta) : \gamma : \lambda(\lambda + \beta)).$$

On a donc tout d'abord

$$\lambda = -\frac{1}{2}\left(\frac{u}{\gamma} + \beta\right).$$

En reportant cette valeur de λ dans l'expression donnant w , on obtient de nouveau une relation quadratique entre u et w . Les droites MM' enveloppent une conique .

On voit d'autre part qu'en un point double de la transformation les deux coniques \mathcal{C} et \mathcal{C}_1 ont même tangente. \square

Le théorème 3.2.11 admet aussi un théorème dual.

Théorème 3.2.12 *Soit \mathcal{C} une conique non dégénérée dans le plan projectif. On considère sa structure projective. Soit ϕ une homographie de la conique \mathcal{C} sur elle-même. Alors l'ensemble des points d'intersection des tangentes à \mathcal{C} , en deux points homologues $M, \phi(M)$, est une conique qui est bitangente à \mathcal{C} aux points fixes de l'homographie.*

Remarque : on sait qu'une transformation projective est le produit d'au plus deux involutions. Dans le cas où la transformation n'est pas une involution, en faisant intervenir les deux points de Frégier A et B des deux involutions, la

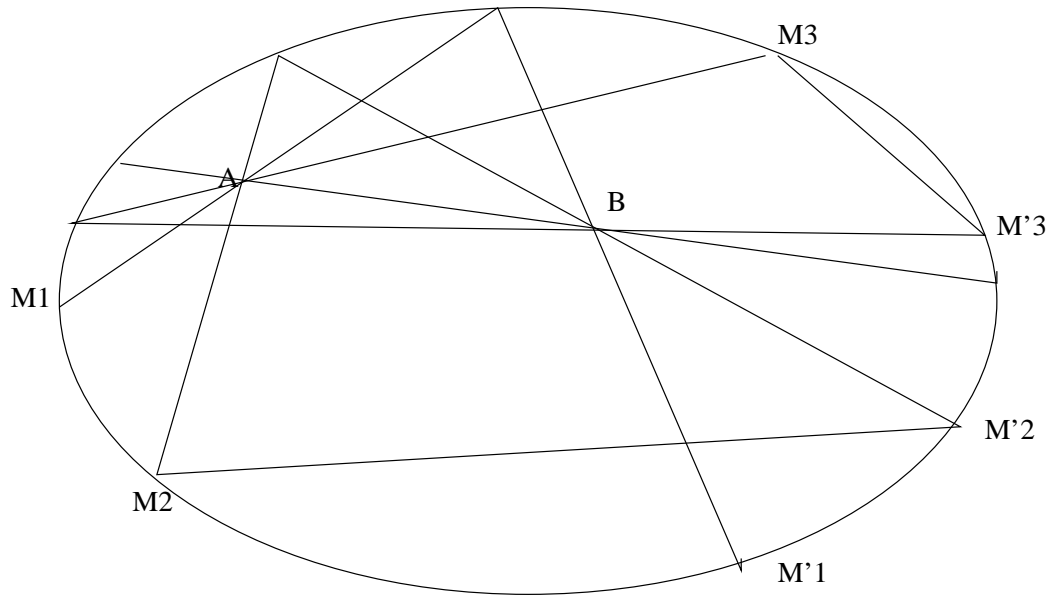


FIG. 3.10 – Transformation projective

transformation est obtenue par : on construit AM qui recoupe la conique en I . La droite IB recoupe la conique en M' (cf. figure 3.10). Remarquons que dans cette situation, la droite AB qui joint les deux points de Frézier, coupe la conique en deux points invariants par la transformation (éventuellement confondus). C'est donc l'axe d'homographie.

Ceci donne une autre construction de l'image M' d'un point M connaissant l'axe Δ de l'homographie (donc deux couples de points doubles) et un autre couple de points homologues M_1, M'_1 . On choisit un point J sur la conique, la droite M_1J coupe Δ en A , la droite M'_1J coupe Δ en B . On construit M' comme indiqué précédemment. On remarque que les couples (A, B) ne sont pas uniques et donc que la décomposition en produit de deux involutions n'est pas unique.

Bibliographie

- [1] **Marcel Berger** *Géométrie Tome 1 : action de groupes, espaces affines et projectifs*. Cedic Fernand Nathan, (1977)
- [2] **Marcel Berger** *Géométrie Tome 4 : formes quadratiques, quadriques et coniques*. Cedic Fernand Nathan, (1978)
- [3] **Stan Birchfield** *An Introduction to Projective Geometry (for computer vision)*. <http://robotics.stanford.edu/birch/projective/>
- [4] **Robert Deltheil, Daniel Caire** *Géométrie 4^e édition 1950 suivie de Compléments de Géométrie 1951*. Jacques Gabay (1989)
- [5] **Nikolaï Éfimov** *Géométrie supérieure*. Éditions MIR, Moscou (1981)
- [6] **Morris Kline** *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford University Press, New York (1972)
- [7] **Roger Mohr, Bill Triggs** *Projective Geometry for Image Analysis. A tutorial given at ISPRS, Vienna, July 1996*. <http://www.inrialpes.fr/movi>
- [8] **Pierre Samuel** *Géométrie Projective*. Presses Universitaires de France (1986)
- [9] **Pierre Samuel** *Projective Geometry*. Undergraduate Texts in Mathematics, Springer Verlag (1988)

Index

- Addition (sur une droite projective), 26
- Apollonius, 5
- Application (projective), 15
- Axe d'homographie, 73

- Bidual, 45
- Bilinéaire (forme), 56
- Birapport, 29, 32
- Birapport (sur une conique), 66
- Brianchon (théorème de), 66

- Carte, 7, 14, 21, 54
- Castillon (problème de), 75
- Complet (quadrilatère), 42, 60
- Coniques, 53
- Conjugaison, 61
- Conjugué, 57
- Conjuguée (droite), 60
- Construction, 69
- Coordonnée (affine), 11
- Coordonnée (homogène, projective), 11
- Coordonnées (homogènes, projectives), 10
- Courbe complète, 54

- Dédoublément des termes, 56
- Desargues, 5
- Desargues (théorème de), 23
- Direction, 6

- Division harmonique, 41, 42
- Droite conjuguée, 60
- Dual, 43
- Dual (théorème), 45
- Dualité, 43

- Equation tangentielle, 57
- Espace projectif, 6

- Faisceau de droites, 46
- Forme bilinéaire, 56
- Forme quadratique, 55
- Frégier (point de), 73
- Frégier (théorème de), 72

- Groupe (affine), 21
- Groupe (des homographies, projectif), 17

- Harmonique (division), 41, 42
- Homographie, 16
- Homographie (axe d'), 73
- Hyperplan (projectif), 8

- Indépendance (projective), 8
- Infini (hyperplan), 21
- Infini (point à l'), 8, 54
- Invariant (point), 20
- Involution, 39, 72, 73

- La Hire, 5
- Libre (projectivement), 8

Multiplication (sur une droite projective), 28
Multiplicité, 54

Pôle, 57
Pappus, 5
Pappus (théorème de), 24
Pascal, 5
Pascal (théorème de), 66
Perspective, 33, 34, 37, 46
Point (invariant), 20
Point à l'infini, 8, 54
Point de Frégier, 73
Polaire, 56
Polaire réciproque, 61

Quadratique (forme), 55
Quadrilatère complet, 42, 60

Repère (projectif), 12, 18

Similitude, 54
Sous-espace projectif, 8
Steiner (théorème de), 63

Tangentielle (équation), 57
Théorème dual, 45
Transformation (affine), 21
Transformation (homographique), 21