

Autour de la présentation de la fonction exponentielle suivant le programme de TS 2002 (Document de travail)

Robert Rolland - IREM de Marseille - rolland@iml.univ-mrs.fr

10 février 2003

1 Introduction

Partons de l'exemple discret des intérêts composés. Nous avons à l'instant initial une somme b . Une période de temps h est fixée ainsi qu'un coefficient a exprimé en inverse d'unité de temps. Notons $S_{h,a}(nh)$ le capital disponible à l'instant nh . L'accroissement du capital pendant une période est proportionnel à la somme disponible au début de la période. Plus précisément, pour tout t multiple de h on a

$$S_{h,a}(t+h) - S_{h,a}(t) = ahS_{h,a}(t),$$

ce qui donne encore

$$S_{h,a}(t+h) = S_{h,a}(t)(1+ah),$$

donc

$$S_{h,a}(nh) = b(1+ah)^n.$$

Reprenons la première relation qui s'écrit aussi

$$\frac{S_{h,a}(t+h) - S_{h,a}(t)}{h} = aS_{h,a}(t).$$

Si nous supposons maintenant que l'accroissement est "instantané" alors nous sommes amenés par analogie à remplacer la différence finie $\frac{S_{h,a}(t+h) - S_{h,a}(t)}{h}$

par la dérivée et à prendre pour équation de la croissance d'un capital une équation du type

$$S'(t) = aS(t)$$

avec une condition initiale $S(0) = b$. Ceci motive l'étude de la famille d'équations différentielles

$$y' = ky.$$

Pour un tel problème il est intéressant de considérer le champ des tangentes associé.

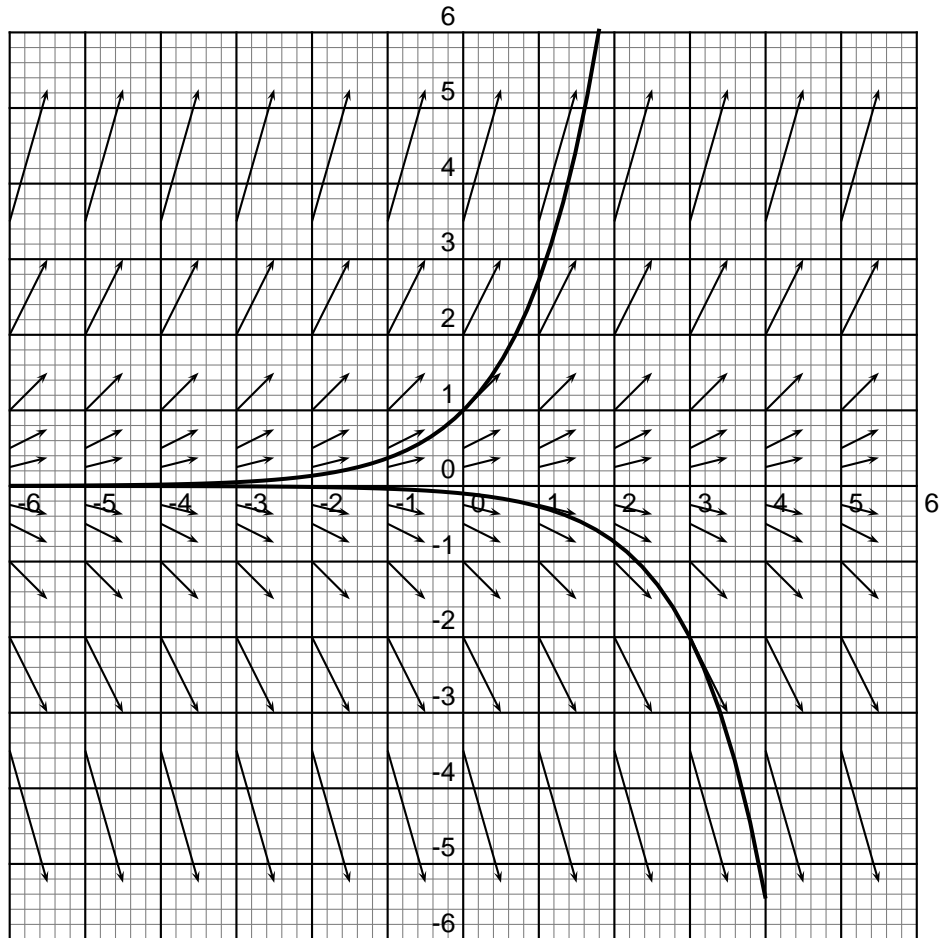


FIG. 1 – Champ des tangentes de $y' = y$

On dessine ce champ en traçant pour quelques points (x, y) du plan le vecteur lié d'origine ce point et de composantes $(1, y')$ c'est-à-dire ici le vecteur

de composantes $(1, y)$. On voit se dessiner les courbes représentatives des solutions de l'équation différentielle de la même façon que les lignes de champ apparaissent lorsqu'on dispose de la limaille de fer dans un champ magnétique.

Exercice : Reprenons l'exemple des intérêts composés donné au début et supposons qu'on ait défini

$$S_{h,a}(t)$$

non seulement pour les valeurs multiples de h mais aussi pour tout t en imposant que la fonction soit affine entre deux multiples successifs de h . Que représente la ligne polygonale définie par $S_{h,a}$ vis à vis de l'équation différentielle $y' = ay$?

2 La définition de la fonction exponentielle

(prérequis : continuité, dérivabilité, théorème des valeurs intermédiaires)

2.1 Petite introduction pour être en accord avec la lettre du programme

Supposons l'existence d'une fonction f dérivable sur \mathbb{R} telle que pour tout x on ait $f'(x) = f(x)$ et telle que $f(0) = 1$. Ce qu'on peut exprimer en admettant le résultat suivant :

Proposition 2.1 *l'équation différentielle*

$$y' = y, \tag{1}$$

admet une solution f définie sur \mathbb{R} vérifiant $f(0) = 1$.

De l'existence de cette fonction f on va déduire quelques lemmes.

Lemme 2.1 *Si f est une solution de l'équation différentielle (1) vérifiant $f(0) = 1$ alors f est strictement positive.*

Preuve.

$$(f(x)f(-x))' = 0$$

et donc

$$f(x)f(-x) = Cte = f(0)^2 = 1.$$

On en déduit que $f(x)$ n'est jamais nulle, et qu'étant continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires elle garde un signe constant. Comme elle vaut 1 en 0, elle est toujours strictement positive.

Lemme 2.2 *Pour tout couple de réels (x_0, y_0) la fonction*

$$g(x) = y_0 f(x - x_0)$$

est une solution de (1) qui prend la valeur y_0 en x_0 . De plus si $y_0 \neq 0$, cette fonction g ne s'annule pas.

Preuve. Vérification immédiate.

Lemme 2.3 *Soit h une solution de l'équation différentielle (1) qui s'annule en un point x_1 . Alors $h = 0$.*

Preuve. Supposons que la fonction h ne soit pas identiquement nulle. Il existe donc un point x_0 tel que $h(x_0) \neq 0$. Notons $y_0 = h(x_0)$ et considérons la fonction g du lemme précédent. On obtient en dérivant le produit $h(x)g(-x)$

$$(h(x)g(-x))' = 0,$$

ce qui montre que

$$h(x)g(-x) = Cte = h(x_0)g(-x_0),$$

et comme g n'est nulle en aucun point, on en conclut que pour tout x on a $h(x)g(-x) \neq 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Proposition 2.2 *Si deux fonctions f et g sont solutions de l'équation (1) et prennent la même valeur en un point x_0 elles sont égales.*

Preuve. Il suffit d'appliquer le lemme précédent à la fonction $h = f - g$.

2.2 La fonction exponentielle

Théorème 2.1 *Pour tout couple (x_0, y_0) de nombres réels, l'équation différentielle*

$$y' = y, \tag{2}$$

admet une solution unique f définie sur \mathbb{R} vérifiant $f(x_0) = y_0$.

Preuve. C'est une récapitulation des résultats établis dans la partie précédente (sous réserve bien sûr du résultat d'existence (proposition 2.1) qui a été admis pour le moment).

Remarque : Il me semblerait plus judicieux d'admettre directement ce théorème et de faire partir l'étude de là, en supprimant la section précédente.

En conséquence nous pouvons donner la définition suivante :

Définition 2.1 *La fonction exponentielle notée \exp est l'unique solution définie sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $y' = y$ qui vérifie la condition initiale $\exp(0) = 1$.*

Remarque : La fonction \exp est évidemment continue dérivable puisque sa dérivée intervient dans l'équation différentielle. En outre puisque $\exp'(x) = \exp(x)$ on conclut que la dérivée \exp' est elle même continue dérivable et par récurrence que \exp est indéfiniment dérivable.

Remarque : On vérifie que la solution de l'équation (2) qui prend la valeur y_0 au point x_0 est $y_0 \exp(x - x_0)$.

3 Premières propriétés

(prérequis : le théorème des valeurs intermédiaires.)

Théorème 3.1 *(Au cas où on admettrait directement le théorème (2.1).) La fonction \exp est toujours > 0 .*

Preuve. Remarquons que par définition la fonction \exp n'est pas la fonction nulle. Si la fonction \exp s'annulait en un point x_0 , il existerait au moins deux solutions de $y' = y$ vérifiant la condition initiale $f(x_0) = 0$, à savoir la fonction nulle et la fonction \exp . Ceci contredit le théorème 2.1. Comme la fonction \exp est continue, qu'elle ne s'annule jamais et qu'elle est > 0 en 0 elle est strictement positive sur tout \mathbb{R} .

Corollaire 3.1 *La fonction \exp est strictement croissante.*

Preuve. Comme $\exp'(x) = \exp(x)$ et que la fonction \exp est > 0 , la dérivée est strictement positive ainsi d'ailleurs que toutes les dérivées successives.

Remarque : en particulier pour $x < 0$ on a $\exp(x) < 1$ et pour $x > 0$ on a $\exp(x) > 1$.

Théorème 3.2 *La fonction exponentielle transforme les sommes en produits. Plus précisément, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}$ on a*

$$\exp(a + b) = \exp(a)\exp(b).$$

Preuve. Considérons la fonction

$$g(x) = \frac{\exp(x + a)}{\exp(a)}.$$

On a $g'(x) = g(x)$ et $g(0) = 1$. On conclut donc que $g(x) = \exp(x)$ d'après le théorème 2.1. Par suite $\exp(x + a) = \exp(a)\exp(x)$.

Corollaire 3.2 *Pour tout $x \in \mathbb{R}$*

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}.$$

Preuve. Il suffit d'appliquer le théorème précédent aux deux nombres x et $-x$. Ainsi $\exp(x - x) = \exp(x)\exp(-x)$, c'est-à-dire $\exp(0) = \exp(x)\exp(-x)$, ce qui donne le résultat.

4 Valeurs de la fonction exponentielle aux points rationnels

(prérequis : la définition de a^r pour r rationnel)

Pour n entier ≥ 0 on obtient facilement par récurrence que

$$\exp(n) = (\exp(1))^n.$$

Ceci s'étend tout de suite à \mathbb{Z} tout entier grâce au corollaire 3.2. En utilisant le fait que la somme de q termes égaux à $1/q$ vaut 1 on en déduit que pour tout entier $q > 1$

$$\exp\left(\frac{1}{q}\right) = (\exp(1))^{\frac{1}{q}}.$$

En utilisant la somme de p termes égaux à $1/q$ on obtient que pour tout rationnel $p/q > 0$ on a

$$\exp\left(\frac{p}{q}\right) = (\exp(1))^{\frac{p}{q}}.$$

Enfin en utilisant maintenant le corollaire 3.2 on obtient que pour tout rationnel r

$$\exp(r) = (\exp(1))^r.$$

Remarque : Si on admet le fait que deux fonctions continues qui coïncident sur \mathbb{Q} sont égales sur \mathbb{R} on peut indiquer la conclusion suivante : si nous notons $e = \exp(1)$, la fonction \exp est la seule fonction continue qui coïncide avec e^r sur les rationnels.

L'étude précédente motive la **notation** qui généralise la notation habituelle sur \mathbb{Q} ,

$$\exp(x) = e^x.$$

Ainsi le théorème 3.2 s'exprime sous la forme

$$e^{x+y} = e^x e^y.$$

On peut écrire aussi

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}.$$

Remarquons enfin que **si nous admettons** le fait que deux fonctions continues qui sont égales sur \mathbb{Q} sont égales sur \mathbb{R} nous avons démontré dans ce paragraphe le théorème suivant :

Théorème 4.1 *Il existe une fonction continue f sur \mathbb{R} et une seule telle que pour tout x et tout y réels on ait*

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

et

$$f(1) = e.$$

Cette fonction f est la fonction exponentielle.

Si on ne tient pas à admettre le résultat cité sur l'égalité des fonctions continues alors on démontrera plus tard le théorème plus restrictif suivant :

Théorème 4.2 *Il existe une fonction dérivable f sur \mathbb{R} et une seule telle que pour tout x et tout y réels on ait*

$$f(x + y) = f(x)f(y)$$

et

$$f(1) = e.$$

Cette fonction f est la fonction exponentielle.

5 Comportement à l'infini

(prérequis : les suites numériques)

Remarquons que puisque la fonction exponentielle est strictement croissante le nombre e est strictement plus grand que 1. Nous avons besoin ici de quelques résultats sur les suites.

Théorème 5.1 *(Rappel sur les suites) Pour tout réel $a > 1$ la suite de terme général $u_n = a^n$ est croissante et diverge vers $+\infty$.*

Preuve. La croissance est claire puisque $u_{n+1} = au_n$ avec $a > 1$. Ecrivons $a = 1 + b$ avec $b > 0$. Alors

$$a^n = (1 + b)^n \geq 1 + nb,$$

ce qui prouve que la suite $(u_n)_n$ diverge vers $+\infty$.

Théorème 5.2 *(Rappel sur les suites) Pour tout réel $a > 1$ et tout entier $k \geq 0$, la suite de terme général $u_n = \frac{a^n}{n^k}$ diverge vers $+\infty$.*

Preuve.

Soit un nombre b tel que $1 < b < a$. Remarquons que pour tout $n > 0$

$$1 \leq \left(\frac{n+1}{n} \right)^k,$$

et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^k = 1.$$

Donc il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait

$$1 \leq \left(\frac{n+1}{n} \right)^k \leq b.$$

En conséquence pour tout $n \geq n_0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = a \left(\frac{n}{n+1} \right)^k \geq \frac{a}{b}.$$

Donc

$$u_{n+1} \geq \left(\frac{a}{b} \right)^{n+1-n_0} u_{n_0}.$$

Comme $a/b > 1$ on en déduit le résultat en vertu du théorème précédent.

Ces résultats vont s'étendre à la fonction exponentielle.

Théorème 5.3 *La fonction exponentielle vérifie*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

et

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

Preuve. Soit $A > 0$. Il existe d'après le théorème précédent un n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$ on ait $e^n \geq A$. Mais la fonction e^x est croissante donc pour tout $x \geq n_0$ on a $e^x \geq e^{n_0} \geq A$.

La deuxième limite se trouve en utilisant la formule

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}.$$

Théorème 5.4 *Soit k un entier ≥ 0 . Alors*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^k} = +\infty$$

et

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k e^x = 0.$$

Preuve. On va prendre $k \geq 1$ puisque pour $k = 0$ on dispose déjà du résultat. La dérivée de la fonction

$$g(x) = \frac{e^x}{x^k}$$

est

$$g'(x) = \frac{e^x x^{k-1}(x-k)}{x^{2k}}.$$

Donc pour $x \geq k$ la fonction est croissante. Soit $A > 0$. On sait d'après les rappels qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$ on ait

$$g(n) \geq A.$$

Comme pour $x \geq k$ la fonction g est croissante si on pose $n_1 = \text{Max}(k, n_0)$, alors pour tout $x \geq n_1$ on a

$$g(x) \geq g(n_0) \geq A.$$

Comme précédemment, la deuxième limite se trouve en utilisant la formule

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}.$$

Comme conséquence on obtient

Théorème 5.5 *Pour toute fonction polynômiale non nulle $P(x)$*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{|P(x)|} = +\infty$$

et

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x)e^x = 0.$$

Remarque : Les limites des mêmes fonctions en 0 sont connues puisque $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$.

De la croissance stricte de exp et de son comportement en $+\infty$ et $-\infty$ on conclut que :

Théorème 5.6 *La fonction exp est une bijection strictement croissante de \mathbb{R} sur \mathbb{R}^{+*} .*

6 La famille des fonctions exponentielles

Partons de l'équation différentielle $y' = cy$ ($c \neq 0$).

Théorème 6.1 *Pour tout x_0 et tout y_0 réels, l'équation différentielle $y' = cy$ admet une solution unique g vérifiant $y_0 = g(x_0)$.*

Preuve. Nous vérifions que la fonction définie par $g(x) = y_0 \exp(c(x - x_0))$ est une solution. S'il existe une autre solution g_1 , alors considérons la fonction g_1/g (on sait que g ne s'annule pas). La dérivée de cette fonction est nulle donc le rapport $g_1(x)/g(x)$ est constant et comme ce rapport vaut 1 en x_0 il vaut toujours 1.

Considérons le cas où $x_0 = 0$ et $y_0 = 1$. Ainsi $g(x) = \exp(cx)$. On a alors aussi pour tout couple (x, y) de réels

$$g(x + y) = g(x)g(y).$$

Posons $a = g(1) = \exp(c)$. Comme dans l'étude précédente on montre que pour tout rationnel r on a $g(r) = a^r$. Ceci motive la notation $g(x) = a^x$. Ainsi on a le fonctionnement suivant des notations introduites

$$g(x) = e^{cx} = a^x = (e^c)^x.$$

Ceci est encore vrai pour $c = 0$.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème suivant :

Théorème 6.2 *Il existe une fonction dérivable f sur \mathbb{R} et une seule telle que pour tout x et tout y réels on ait*

$$f(x + y) = f(x)f(y)$$

et

$$f(1) = e.$$

Cette fonction f est la fonction exponentielle.

Preuve. Nous avons vu que l'exponentielle vérifie les conditions demandées. Soit maintenant une fonction f vérifiant les conditions du théorème. Alors

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f(x) \frac{f(h) - 1}{h}.$$

Par suite,

$$f'(x) = f(x)f'(0).$$

On en conclut que f est de la forme

$$f(x) = e^{\lambda x},$$

et la condition $f(1) = e$ nous donne $\lambda = 1$.

7 La fonction logarithme népérien

(Prérequis : fonctions réciproques ou un substitut (théorème des valeurs intermédiaires), limites des fonctions composées.)

7.1 Présentation rapide

On sait que la fonction \exp est une bijection strictement croissante de l'intervalle $] - \infty, +\infty[$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Elle admet donc une fonction réciproque appelée **fonction logarithme népérien** notée \ln qui est une bijection strictement croissante de $]0, +\infty[$ sur $] - \infty, +\infty[$. En particulier

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) &= +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) &= -\infty.\end{aligned}$$

Remarquons que $\ln(1) = 0$.

A partir de la relation

$$\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y),$$

on établit que pour tout x et tout y réels > 0

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y),$$

d'où il découle que

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x).$$

On montre aussi que pour tout $a > 0$ et tout x réel,

$$\ln(a^x) = x \ln(a).$$

En vertu du théorème sur la dérivation d'une fonction réciproque, cette fonction est dérivable et a pour dérivée

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}.$$

Le calcul de la dérivée de la fonction $\ln(1+x)$ au point $x=0$ nous donne

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \quad (3)$$

7.2 Retour sur la présentation

Dans la mesure où **les fonctions réciproques ne sont pas au programme** il faut détailler la démarche précédente en travaillant sur le cas particulier qui nous intéresse.

La définition du logarithme se fait alors en utilisant la stricte monotonie de l'exponentielle conjuguée avec le théorème des valeurs intermédiaires.

Pour tout $x > 0$ il existe un élément $y \in \mathbb{R}$ et un seul tel que $\exp(y) = x$. Cet élément est appelé le **logarithme népérien de x** et est noté $\ln(x)$.

La fonction logarithme népérien est une fonction strictement croissante. Les limites en 0 et $+\infty$ sont respectivement $-\infty$ et $+\infty$.
(Preuve immédiate en revenant à la fonction \exp .)

La fonction logarithme népérien est continue. En regardant le programme, ceci devrait être admis. On peut aussi faire l'activité qui suit.

Soit $x_0 > 0$. Considérons un "petit" intervalle $[y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon]$ ($\epsilon > 0$) autour de $y_0 = \ln(x_0)$. Soit $x_1 = \exp(y_0 - \epsilon)$ et $x_2 = \exp(y_0 + \epsilon)$. Alors en vertu de la croissance stricte de la fonction exponentielle on a

$$x_1 < x_0 < x_2.$$

Du fait que la fonction \ln est croissante on obtient pour tout x vérifiant

$$x_1 \leq x \leq x_2$$

la double inégalité

$$y_0 - \epsilon \leq \ln(x) \leq y_0 + \epsilon,$$

ce qui montre la continuité de \ln .

La dérivabilité se montre en revenant à la définition. On étudie le rapport défini pour tout $x \neq x_0$

$$\Delta(x) = \frac{\ln(x) - \ln(x_0)}{x - x_0},$$
$$\Delta(x) = \frac{\ln(x) - \ln(x_0)}{\exp(\ln(x)) - \exp(\ln(x_0))}.$$

Considérons la fonction définie en tout point $u \neq \ln(x_0)$

$$\phi(u) = \frac{u - \ln(x_0)}{\exp(u) - \exp(\ln(x_0))}.$$

Compte tenu de la valeur de la dérivée de la fonction \exp on a

$$\lim_{u \rightarrow \ln(x_0)} \phi(u) = \frac{1}{\exp(\ln(x_0))} = \frac{1}{x_0}.$$

De plus nous savons que \ln est continue, donc que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \ln(x) = \ln(x_0).$$

Mais

$$\Delta(x) = \phi \circ \ln(x),$$

donc par application du théorème sur la limite d'une composée nous obtenons

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \Delta(x) = \frac{1}{x_0}.$$

Par suite

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}.$$

8 Approximations de la fonction exponentielle

Cette section est une partie qui peut être abordée sous forme d'activités.

8.1 Première idée : la méthode de la tangente d'Euler

Cherchons tout d'abord la position de la courbe représentative de la fonction exponentielle d'équation $y = e^x$ par rapport à sa tangente à l'origine d'équation $y = x + 1$. Pour cela on étudie la fonction $\delta(x) = e^x - (x + 1)$ dont la dérivée est $e^x - 1$. La fonction δ est donc décroissante pour $x \leq 0$ et croissante pour $x \geq 0$. Le minimum est atteint en $x = 0$ et vaut 0. En conséquence pour tout x on a $\delta(x) \geq 0$. La courbe représentative de la fonction exponentielle est au dessus de sa tangente à l'origine :

$$e^x - (1 + x) \geq 0.$$

Remarque : En passant au logarithme on obtient

$$\ln(1 + x) \leq x.$$

Maintenant on se place en un point x_0 et on compare e^x avec la tangente $e^{x_0}(x - x_0 + 1)$ en x_0 . Alors

$$e^x - e^{x_0}(x - x_0 + 1) = e^{x_0}(e^{x-x_0} - (x - x_0 + 1)) \geq 0.$$

La courbe est donc au dessus de toutes ses tangentes.

Soit un réel x qu'on pourra supposer ≥ 0 dans un premier temps.

Considérons l'intervalle $[0, x]$ qu'on découpe en n intervalles $I_k = [x_k, x_{k+1}]$, où $x_k = kx/n$ ($k = 0, 1, \dots, n - 1$). Remarquons que $x_0 = 0$ et $x_n = x$.

On construit alors par la méthode de la tangente d'Euler appliquée à l'équation différentielle $y' = y$ les points y_k

$$y_0 = 1$$

$$y_{k+1} = y_k + y'_k(x_{k+1} - x_k),$$

ce qui donne puisque $y'_k = y_k$ et $(x_{k+1} - x_k) = x/n$

$$y_{k+1} = y_k + y_k \left(\frac{x}{n}\right) = y_k \left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

On en conclut que

$$y_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Lemme 8.1 *La courbe représentative de la fonction exp est au dessus de la ligne polygonale définie par les points (x_k, y_k) où $0 \leq k \leq n$.*

Preuve. Notons $z_k = e^{x_k}$.

On montre par récurrence que sur l'intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ la courbe est au dessus du segment d'origine (x_k, y_k) et d'extrémité (x_{k+1}, y_{k+1}) . Pour $k = 0$ ceci provient du fait que la courbe est au dessus de sa tangente en 0. Supposons le résultat vrai jusqu'à l'ordre k . Si $k \geq n - 1$ il n'y a rien à montrer. Si $0 \leq k \leq n - 2$, alors $y_k \leq z_k$ par hypothèse de récurrence, en conséquence la tangente à la courbe au point x_k d'équation $y = z_k(x - x_k + 1)$ est sur l'intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ au dessus de la droite $y = y_k(x - x_k + 1)$ (morceau de la ligne polygonale). Or la courbe est au dessus de sa tangente, donc à fortiori au dessus de la ligne polygonale.

En conséquence

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x.$$

On peut aussi obtenir une majoration sur un petit intervalle de la différence entre la fonction et sa tangente.

Remarque : Soit $h > 0$ tel que pour tout $0 \leq x \leq h$ on ait

$$e^x - 1 \leq 2x$$

(il suffit d'étudier la fonction $e^x - 1 - 2x$ dont la dérivée est $e^x - 2$ pour voir qu'on peut trouver un tel h).

Alors par intégration

$$\int_0^x (e^t - 1) dt \leq 2 \int_0^x t dt$$

ce qui donne pour tout $0 \leq x \leq h$

$$e^x - (1 + x) \leq x^2.$$

Théorème 8.1

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Preuve. Notons

$$z_k = \exp(x_k).$$

Définissons $w_0 = 0$ et pour $1 \leq k \leq n$ w_k est le point d'abscisse x_k de la tangente à la courbe au point x_{k-1} . Alors pour $1 \leq k \leq n$ on a

$$w_k = e^{x_{k-1}} \left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

Les y_k sont obtenus par la méthode de la tangente d'Euler c'est à dire que $y_0 = 0$ et pour $1 \leq k \leq n$ on a

$$y_k = y_{k-1} \left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

On a alors

$$y_k \leq w_k \leq z_k.$$

Evaluons la différence $z_k - w_k$

$$\begin{aligned} 0 \leq z_k - w_k &= e^{x_k} - e^{x_{k-1}} \left(1 + \frac{x}{n}\right), \\ 0 \leq z_k - w_k &= e^{x_{k-1}} \left(e^{\frac{x}{n}} - \left(1 + \frac{x}{n}\right) \right), \end{aligned}$$

et si x/n est plus petit que le h trouvé dans la remarque précédente

$$0 \leq z_k - w_k \leq e^x \left(\frac{x}{n}\right)^2.$$

Evaluons maintenant la différence $w_k - y_k$

$$w_k - y_k = (z_{k-1} - y_{k-1}) \left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

Donc

$$0 \leq z_k - y_k \leq e^x \left(\frac{x}{n}\right)^2 + (z_{k-1} - y_{k-1}) \left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

On calcule alors

$$\begin{aligned} z_0 - y_0 &= 0, \\ 0 \leq z_1 - y_1 &\leq e^x \left(\frac{x}{n}\right)^2, \end{aligned}$$

$$0 \leq z_2 - y_2 \leq e^x \left(\frac{x}{n}\right)^2 \left(2 + \frac{x}{n}\right),$$

et plus généralement

$$0 \leq z_n - y_n \leq e^x \left(\frac{x}{n}\right)^2 \left(n + \frac{x}{n}\right).$$

Par suite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (z_n - y_n) = 0,$$

ce qui achève la démonstration (et les élèves).

Remarque : En travaillant sur les logarithmes on montre facilement le théorème 8.1. Cependant la démonstration précédente est très instructive. En utilisant la fonction \ln on calcule en effet

$$\ln\left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right) = n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right),$$

et donc en vertu de la formule (3) du paragraphe 7 on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right) = x.$$

La continuité de la fonction \exp nous permet d'avoir alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right) = \exp(x).$$

8.2 Deuxième idée : itération de l'intégration

En partant de l'équation différentielle $y' = y$ on se rend compte que la fonction exponentielle réalise

$$\exp(x) = 1 + \int_0^x \exp(t) dt.$$

Partons donc d'une fonction f_0 valant 1 au point 0 et calculons par récurrence

$$f_n(x) = 1 + \int_0^x f_{n-1}(t) dt.$$

Prenons par exemple $f_0 = 1$ (fonction constante valant toujours 1). Alors

$$f_1(x) = 1 + x,$$

$$f_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!},$$

et plus généralement

$$f_n(x) = 1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Théorème 8.2

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) = e^x.$$

Preuve. Posons $f(x) = \exp(x)$. Soit

$$M_x = \sup_{t \in [0, x]} |f_0(t) - f(t)| = |e^x - 1|.$$

Alors pour tout $0 \leq u \leq x$

$$f_1(u) - f(u) = \int_0^u (f_0(v) - f(v)) dv$$

$$|f_1(u) - f(u)| \leq uM_x,$$

$$f_2(u) - f(u) = \int_0^u (f_1(v) - f(v)) dv,$$

donc

$$|f_2(u) - f(u)| \leq \int_0^u vM_x dv = \frac{u^2}{2}M_x,$$

et plus généralement

$$|f_n(u) - f(u)| \leq M_x \frac{u^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ceci est en particulier vrai pour x . La suite de terme général $f_n(x)$ converge vers e^x .

9 Annexe I : l'art et la manière de retomber sur ses pieds

Il s'agit ici de démontrer le théorème (1).

9.1 Existence

Définissons pour tout $x > 0$

$$f(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

Cette fonction est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ (de dérivée $1/x$). On vérifie que $f(1) = 0$, puis que pour $a > 0$, $(f(ax))' = 1/x$ ce qui implique que $f(ax) = f(x) + k$; on calcule k en donnant à x la valeur 1 et on obtient $f(ax) = f(a) + f(x)$. Par suite on a aussi $f(x^n) = nf(x)$. A partir de là on montre alors que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty.$$

Exercice : Que se passe-t-il si on applique la méthode de la tangente d'Euler à l'équation différentielle $y' = f(x)$? (Réponse : on obtient la méthode des rectangles pour le calcul de l'intégrale de f .)

9.2 Présentation rapide

La fonction f est une bijection strictement croissante de \mathbb{R}^{+*} sur \mathbb{R} . La bijection réciproque g a une dérivée vérifiant $g'(x) = g(x)$. De plus $g(0) = 1$. Ceci montre l'existence d'une solution de $y' = y$ vérifiant $f(0) = 1$.

La fonction $h(x) = y_0 g(x - x_0)$ vérifie l'équation différentielle $y' = y$ avec pour condition initiale $g(x_0) = y_0$.

9.3 Retour sur la présentation

Là encore, la présentation rapide doit être détaillée pour tenir compte du fait que les fonctions réciproques ne sont pas au programme. L'étude se fait de manière analogue à ce qui a été fait dans la section 7.2.

9.4 Unicité

L'unicité a déjà été démontrée. Cependant la méthode alternative qui suit me semble intéressante et peut être faite à titre d'activité.

Soient g et h deux solutions de $y' = y$ vérifiant la condition initiale $y(x_0) = y_0$. Alors $\phi = g - h$ est aussi une solution de l'équation différentielle qui elle

vérifie la condition initiale $\phi(x_0) = 0$. Soit un réel $A > 0$. Si on suppose $x_0 \leq x \leq x_0 + A$ et si on définit

$$M = \sup_{u \in [x_0, x_0 + A]} |\phi(u)|$$

alors on a successivement

$$\phi(x) = \int_{x_0}^x \phi(t) dt,$$

$$|\phi(x)| \leq M(x - x_0)$$

et en réinjectant cette inégalité dans l'intégrale on obtient

$$|\phi(x)| \leq \int_{x_0}^x M(t - x_0) dt \leq M \frac{(x - x_0)^2}{2!}$$

puis par récurrence

$$|\phi(x)| \leq M \frac{(x - x_0)^n}{n!}.$$

Donc $\phi(x) = 0$ sur $[x_0, x_0 + A]$ et par suite sur $[x_0, +\infty[$. On fait une démonstration analogue sur $] -\infty, x_0]$.

9.5 Conclusion

Du coup la fonction g dont on a montré l'existence et l'unicité est bien la fonction exp (et la fonction f est la fonction ln).

Il vaudrait mieux admettre le théorème (2.1) un bonne fois pour toutes.