

Robert Rolland

**QUELQUES PROBLÈMES
MATHÉMATIQUES LIÉS À LA
NAVIGATION (VERSION 7)**

Robert Rolland

E-mail : `Robert.Rolland@acrypta.fr`

Url : `http://robert.rolland.acrypta.com,`

18 Juin 2010

**QUELQUES PROBLÈMES MATHÉMATIQUES LIÉS À
LA NAVIGATION (VERSION 7)**

Robert Rolland

AVERTISSEMENT

La navigation maritime a posé depuis très longtemps de nombreux problèmes de mathématiques, d'astronomie, de physique très importants. Dans cette partie, nous nous intéresserons à divers problèmes, par exemple le problème des marées, la cartographie de Mercator, la déviation du compas. Ces problèmes seront étudiés surtout du point de vue mathématique. Le but n'est donc pas de se substituer à des textes spécialisés dans la formation des marins et de ce fait certaines applications sont fortement simplifiées par rapport aux réalités de la navigation pratique.

TABLE DES MATIÈRES

Avertissement	v
1. Calcul simplifié des marées	1
1.1. Présentation du problème.....	1
1.2. Montée sinusoïdale et règle des douzièmes.....	2
1.3. Interpolation par un polynôme.....	5
1.4. Qualité des approximations.....	6
1.4.1. Les problèmes à résoudre.....	6
1.4.2. Un outil fondamental : le théorème de division des fonctions différentiables.....	7
1.4.3. Majoration de l'erreur dans une interpolation.....	9
1.4.4. Les majorations.....	9
1.4.4.1. Cas de l'approximation par $P(x)$	9
1.4.4.2. Cas de l'approximation par $g(x)$	10
1.5. Approximation de la fonction réciproque.....	11
2. Cartographie de Mercator	15
2.1. Présentation du problème.....	15
2.2. Utilisation du calcul différentiel.....	16
2.3. Méthode géométrique.....	18
2.3.1. Loxodromie et spirale logarithmique.....	19
2.3.2. Déroulons la spirale.....	19
2.4. Quelques calculs de distances et de cap.....	20
3. Les routes orthodromiques	25
3.1. Présentation du problème.....	25
3.1.1. Route orthodromique et arc de grand cercle.....	25
3.1.2. Cas particuliers.....	25

3.1.3. Les divers problèmes.....	26
3.1.4. Notations.....	27
3.2. Les outils mathématiques.....	28
3.2.1. Produit scalaire.....	29
3.2.2. Produit vectoriel.....	29
3.3. Les formules.....	29
3.3.1. La distance orthodromique.....	29
3.3.2. Le cap en un point de la trajectoire.....	30
3.3.2.1. Calcul des produits vectoriels.....	30
3.3.2.2. Normalisation des vecteurs.....	31
3.3.2.3. Le calcul du cosinus de l'angle de route initial c_0	32
3.3.3. Le vertex.....	34
3.4. Méthode graphique de report sur une carte.....	34
4. La déviation du compas.....	39
4.1. Présentation du problème.....	39
4.2. La formule d'Archibald Smith.....	40

CHAPITRE 1

CALCUL SIMPLIFIÉ DES MARÉES

1.1. Présentation du problème

Nous nous intéressons à la variation de hauteur d'eau due à la marée. C'est un problème important en navigation, puisqu'il s'agit de savoir quelle sera la profondeur en une position donnée et à un instant donné et donc de répondre à la question vitale : le navire peut-il passer ou non ? Avant de formaliser ce problème, donnons la terminologie en usage. **Pleine mer** (la mer est montée et atteint la pleine mer avant de redescendre), **basse mer** (la mer est descendue et atteint la basse mer avant de remonter), **flot** (temps pendant lequel la mer monte), **flux** (courant du flot), **jusant** (temps pendant lequel la mer descend), **reflux** (courant du jusant), **marée de vive eau** (grande marée), **marée de morte eau** (petite marée). Le **coefficient de marée** (20-120) mesure si on est vers une marée de vive eau ou non. Définissons aussi le **marnage** (différence des hauteurs de la pleine mer avec la basse mer), la **profondeur** (distance de la surface de la mer au fond, à l'instant et au lieu considérés), la **hauteur** (distance, à l'instant considéré et dans la zone considérée, de la surface au zéro des cartes, qui est le point le plus bas atteint par l'eau lors des plus faibles marées), la **sonde** (distance du fond au zéro des cartes, la sonde peut être négative pour un rocher découvrant). Nous avons évidemment la relation suivante :

$$\text{Profondeur} = \text{Hauteur} + \text{Sonde.}$$

Lorsqu'un navire doit passer à un instant donné en un point donné, il faut évidemment que la profondeur soit supérieure au tirant d'eau du navire, auquel on rajoute une marge de sécurité appelée le **ped du pilote** :

$$\text{Tirant d'eau} + \text{Pied du pilote} < \text{Profondeur.}$$

Parfois il faut aussi tenir compte de l'enfoncement dynamique (appelé aussi sur-enfoncement ou squat).

La sonde est indiquée sur les cartes. Il s'agit donc pour déterminer la profondeur de calculer la hauteur.

Nous allons dans la suite considérer que nous partons d'une situation de basse mer et que la marée monte. Le cas d'une marée descendante se traiterait de la même manière.

Les annuaires des marées donnent pour un lieu donné et une date donnée les heures de basse mer et de pleine mer, ainsi que les hauteurs d'eau correspondantes. Nous noterons T_0 l'heure de basse mer que nous considérons, T_1 l'heure de pleine mer suivante, H_0 et H_1 les hauteurs d'eau respectivement en T_0 et T_1 . Le temps $T_1 - T_0$ est proche de 6h, mais en diffère suivant les dates de façon qu'on ne peut négliger. Nous appellerons **heure marée** la quantité :

$$\frac{T_1 - T_0}{6}.$$

Le marnage $H_1 - H_0$, pour des raisons de calcul que nous allons voir, est divisé en douze. La quantité :

$$\frac{H_1 - H_0}{12}$$

est appelée le **douzième**.

1.2. Montée sinusoïdale et règle des douzièmes

On peut supposer que l'accroissement de la hauteur d'eau pendant une marée est sinusoïdal. Pour avoir une formule qui soit toujours valable, quel que soit le marnage, quelle que soit la durée de la marée, nous exprimons la hauteur d'eau en douzième et le temps en heure marée. Dans ce cas la variation en douzième y de la hauteur s'écrit en fonction de l'heure marée x sous la forme :

$$(1) \quad y = f(x) = 6 \left(\sin \left(\frac{\pi(x-3)}{6} \right) + 1 \right).$$

Nous représentons sur la figure 1 cette variation.

Une méthode très répandue, tout au moins chez les navigateurs amateurs, et qui évite l'usage des fonctions trigonométriques, consiste à approcher la fonction sinus par une fonction affine par morceau bien choisie et simple à retenir : l'accroissement de la hauteur de la mer est calculée par la règle des douzièmes.

La règle des douzièmes dit que la première heure marée la variation de la hauteur est de $1/12^e$ du marnage, la deuxième heure marée de $2/12^e$ du marnage, la troisième

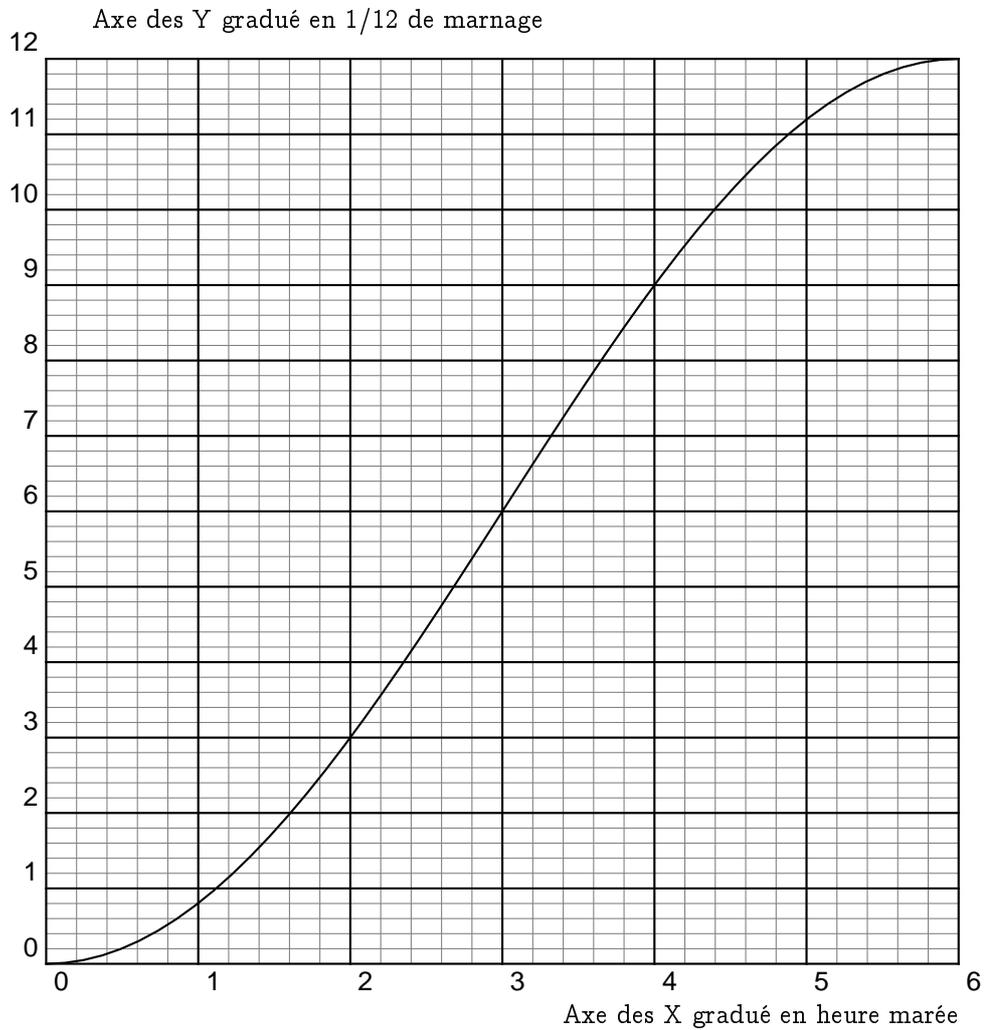


FIGURE 1. Montée sinusoïdale

heure marée de $3/12^e$ du marnage, la quatrième heure marée de $3/12^e$ du marnage, la cinquième heure marée de $2/12^e$ du marnage et la sixième heure marée de $1/12^e$ du marnage. On représente le graphe de la fonction g affine par morceau ainsi obtenue sur la figure 2.

Nous comparons ensuite (voir figure 3) les deux graphiques obtenus (règle des douzièmes et fonction sinus), ce qui nous donne une idée de la qualité de l'approximation.

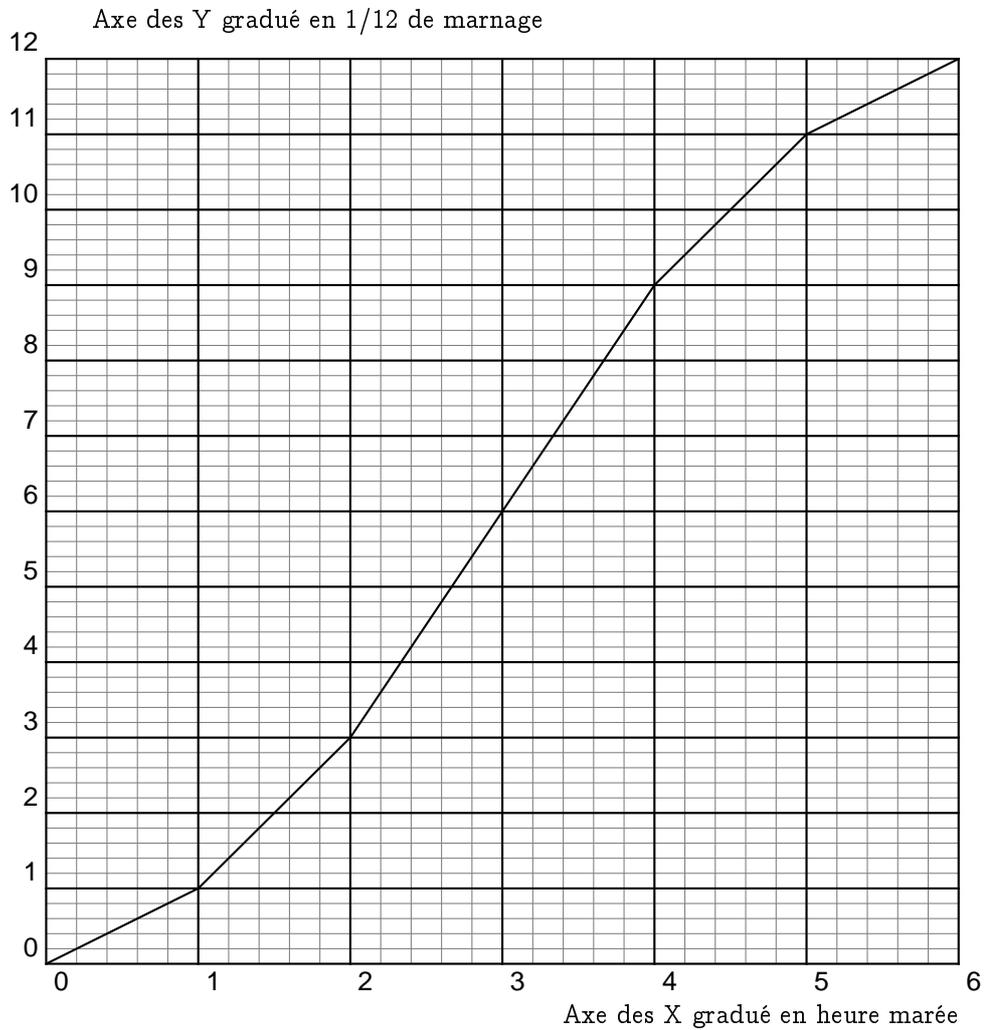


FIGURE 2. La règle des douzièmes

Nous étudierons plus en détail dans la suite une évaluation de la différence entre les deux fonctions introduites.

Remarque : Si nous voulons la hauteur H en mètre en fonction du temps T , exprimé en heure, écoulé depuis le début de la marée (donc $T \in [0, T_1 - T_0]$), il suffit de faire un changement de variable qui nous donne la formule suivante :

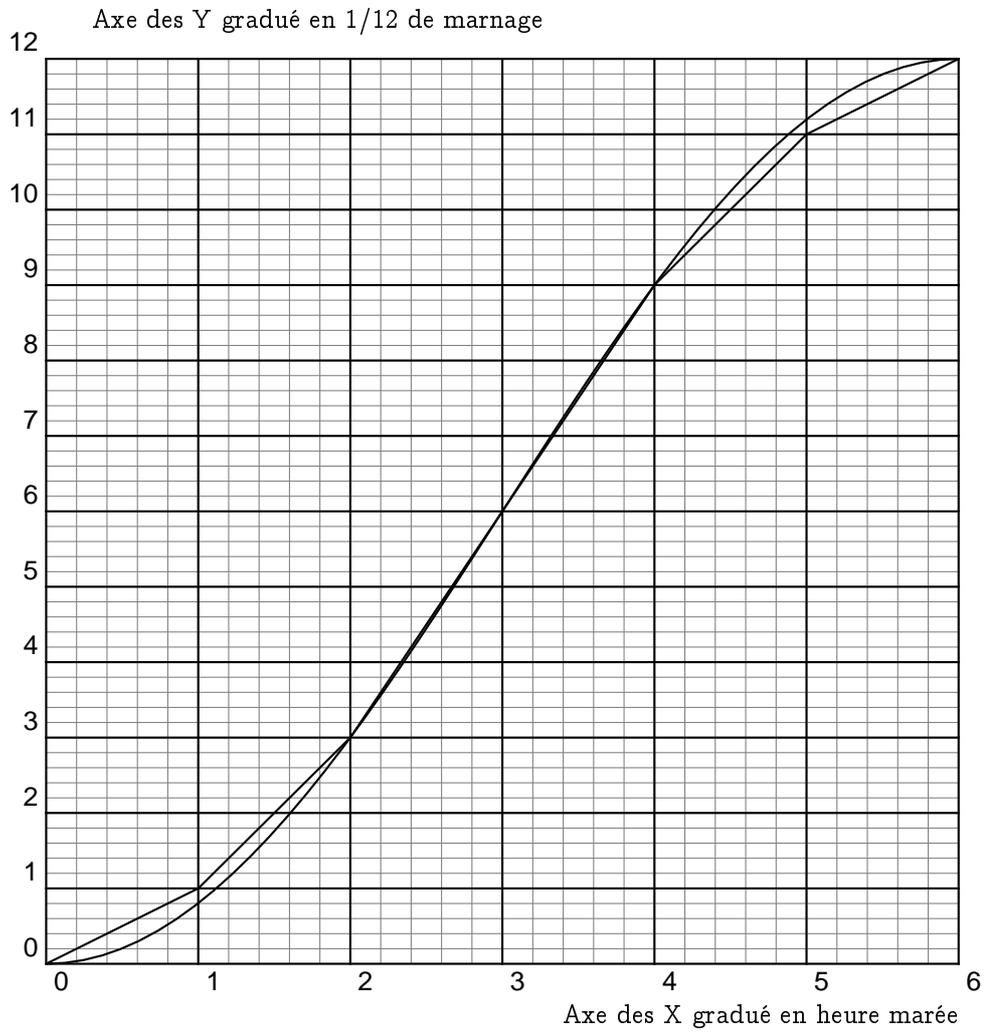


FIGURE 3. Comparaison

$$(2) \quad H = \frac{H_1 + H_0}{2} + \frac{H_1 - H_0}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{2T + T_0 - T_1}{T_1 - T_0}\right)$$

1.3. Interpolation par un polynôme

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0, 6]$ par l'équation (1).

Nous allons chercher un polynôme qui approche cette fonction sinus sur cet intervalle. Le point d'inflexion nous donne à penser qu'il faut tenter une cubique pour être "dans la forme".

Nous allons donc chercher le polynôme d'interpolation P de degré ≤ 3 tel que :

- $P(0)=f(0)=0$;
- $P(3)=f(3)=6$;
- $P(6)=f(6)=12$;
- $P'(0)=f'(0)=0$.

Les conditions $P(0) = 0$ et $P'(0) = 0$ imposent que :

$$P(x) = x^2(ax + b).$$

Les deux autres conditions donnent respectivement :

$$9a + 3b = 2,$$

$$18a + 3b = 1,$$

d'où :

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{9} \\ b = 1 \end{cases}$$

Le polynôme cherché est donc :

$$P(x) = -\frac{1}{9}x^3 + x^2.$$

Nous avons représenté le graphe de P sur la figure 4.

1.4. Qualité des approximations

1.4.1. Les problèmes à résoudre. — Afin d'évaluer la précision des deux approximations $g(x)$ et $P(x)$ de la fonction $f(x)$, nous allons majorer les quantités :

$$\sup_{x \in [0,6]} |f(x) - g(x)|$$

et

$$\sup_{x \in [0,6]} |f(x) - P(x)|,$$

c'est-à-dire les normes uniformes $\|f - g\|_\infty$ et $\|f - P\|_\infty$ sur l'intervalle $[0, 6]$. (Les meilleures majorations seront primées!)

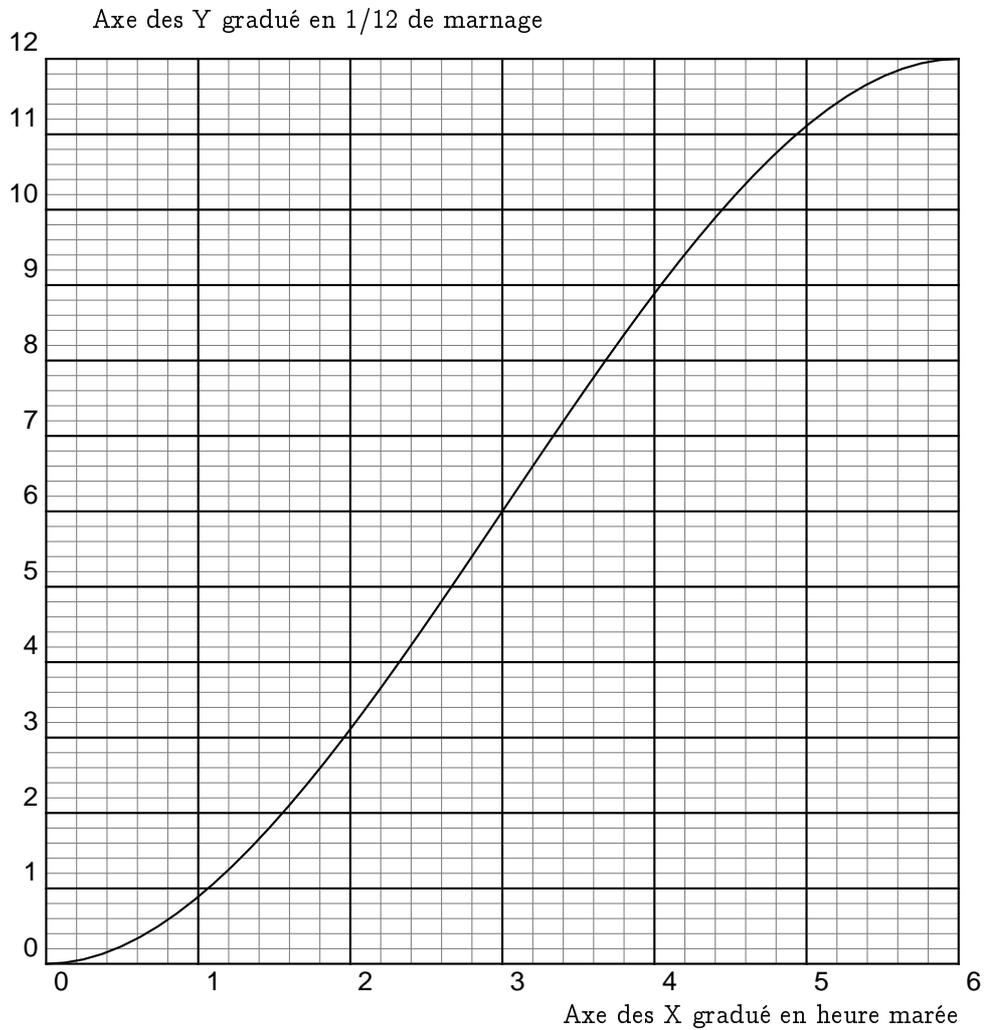


FIGURE 4. Approximation cubique

1.4.2. Un outil fondamental : le théorème de division des fonctions différentiables. —

Théorème 1.4.1. — Soit f une fonction réelle définie sur \mathbb{R} de classe C^{p+1} , où p est un entier naturel. On suppose que f s'annule en un point a de \mathbb{R} . Alors il existe une unique fonction continue $g(x)$ telle que :

$$f(x) = (x - a)g(x).$$

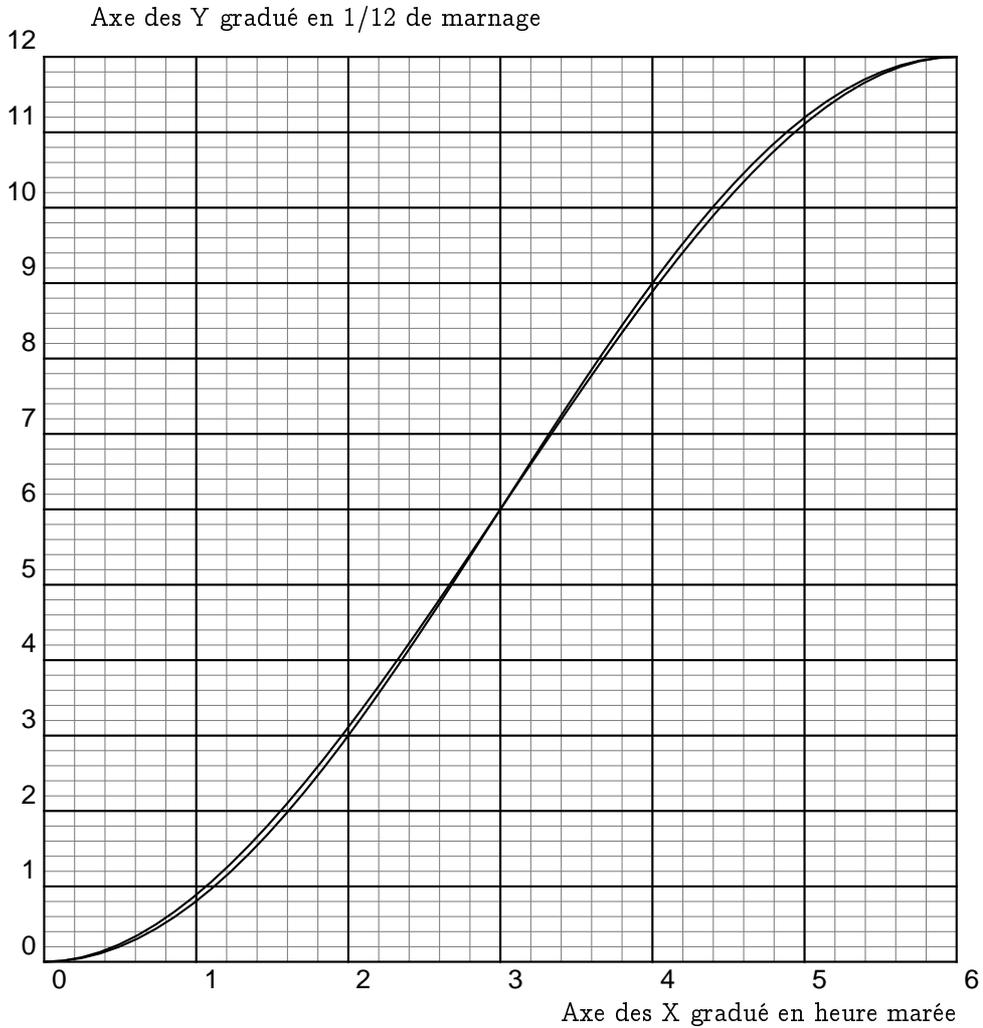


FIGURE 5. Comparaison entre le sinus et la cubique

Cette fonction g est de classe C^p et pour tout $0 \leq q \leq p$:

$$(3) \quad |g^{(q)}(x)| \leq \frac{1}{q+1} \sup_{t \in [a, x]} |f^{(q+1)}(t)|.$$

Démonstration. — La fonction g est nécessairement définie par :

$$(4) \quad g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x-a} & \text{si } x \neq a, \\ f'(a) & \text{si } x = a. \end{cases}$$

On constate en distinguant le cas où $x = a$ de celui où $x \neq a$ que :

$$g(x) = \int_0^1 f'(a + (x - a)u) du.$$

Sous cette dernière forme, d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, on voit que la fonction $g(x)$ est de classe C^p et que pour tout $0 \leq q \leq p$

$$g^{(q)}(x) = \int_0^1 u^q f^{(q+1)}(a + (x - a)u) du,$$

ce qui nous donne la formule (3). \square

1.4.3. Majoration de l'erreur dans une interpolation. — Soit f une fonction de classe C^{n+1} , P le polynôme d'interpolation de Lagrange qui prend les mêmes valeurs que f aux points x_0, x_1, \dots, x_n et I un intervalle compact contenant x, x_0, x_1, \dots, x_n . Appliquons alors le théorème 1.4.1 à $f(x) - P(x)$. On obtient

$$f(x) - P(x) = (x - x_0)g_0(x)$$

avec

$$|g_0^{(n)}(x)| \leq \frac{1}{n+1} \sup_{t \in I} |f^{(n+1)}(t)|$$

(ne pas oublier que $P^{(n+1)}(x) = 0$), puis

$$g_0(x) = (x - x_1)g_1(x)$$

avec

$$|g_1^{(n-1)}(x)| \leq \frac{1}{n} \sup_{t \in I} |g_0^{(n)}(t)|,$$

et ainsi de suite. Si bien que :

$$(5) \quad |f(x) - P(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} |(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)| \sup_{t \in I} |f^{(n+1)}(t)|.$$

Remarque 1.4.2. — Cette démonstration permet d'établir de la même façon une majoration dans le cas d'une interpolation de Lagrange-Sylvester.

1.4.4. Les majorations. —

1.4.4.1. Cas de l'approximation par $P(x)$. — Si on ne regarde pas de plus près, on pourrait croire que nous avons fait une interpolation de Lagrange-Sylvester par un polynôme de degré 3 sous les conditions d'interpolation :

$$P(0) = f(0) \quad P(3) = f(3) \quad P(6) = f(6) \quad P'(0) = f'(0).$$

Mais en fait on constate qu'avec ce même polynôme de degré 3 on a aussi $P'(6) = f'(6)$. Donc on a effectué en fait une interpolation de degré 4, dont le coefficient du terme

de plus haut degré est nul. On peut donc appliquer la majoration (5) et la remarque 1.4.2 à cet ordre et on obtient :

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{1}{5!} |x^2(x-3)(x-6)^2| \sup_{t \in [0,6]} |f^{(5)}(t)|.$$

Ceci nous donne :

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{1}{120} \times 6 \times \left(\frac{\pi}{6}\right)^5 |x^2(x-3)(x-6)^2|,$$

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{1}{120} \times 6 \times \frac{1}{25} |x^2(x-3)(x-6)^2|.$$

Pour étudier la borne supérieure de la fonction $|x^2(x-3)(x-6)^2|$ qui est symétrique par rapport à $x = 3$, il suffit de chercher son maximum sur $[0, 3]$. Sur cet intervalle cette fonction est $x^2(3-x)(x-6)^2$ et sa dérivée s'annule pour 0 et $\frac{15-3\sqrt{5}}{5}$. Le maximum est atteint en $\frac{15-3\sqrt{5}}{5}$ et est majoré par 70. En conséquence :

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{1}{120} \times 6 \times \frac{1}{25} \times 70,$$

$$|f(x) - P(x)| \leq 0.14$$

Remarque 1.4.3. — Un calcul à la machine montre qu'il semble que le maximum soit proche de 0.12 (pour $x \approx 1.7$).

1.4.4.2. *Cas de l'approximation par $g(x)$.* — Commençons par approcher f par la fonction affine par morceau h qui prend les mêmes valeurs que f aux points 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. La fonction h est affine sur tous les intervalles $[j, j+1]$ ($0 \leq j \leq 5$) et telle que :

$$h(j) = f(j) \text{ pour } 0 \leq j \leq 6.$$

Sur chaque intervalle $[j, j+1]$ on peut écrire en vertu de la majoration (5) :

$$|f(x) - h(x)| \leq \frac{1}{2!} |(x-j)(x-j-1)| \sup_{t \in [j, j+1]} |f''(t)|.$$

Donc :

$$|f(x) - h(x)| \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{\pi^2}{6},$$

d'où :

$$|f(x) - h(x)| \leq 0.21.$$

Nous allons évaluer maintenant $|h(x) - g(x)|$.

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0	0.8	3	6	9	11.2	12
$g(x)$	0	1	3	6	9	11	12
$h(x)$	0	0.8	3	6	9	11.2	12

Comme $h(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions affines par morceau sur les mêmes points de partage $0, 1, 2, \dots, 6$, qu'il y a une symétrie par rapport à $x = 3$ et que $h(x)$ et $g(x)$ coïncident en 0, en 2 et en 3, alors :

$$|h(x) - g(x)| \leq |g(1) - h(1)|.$$

(Le maximum de la valeur absolue de la différence de deux fonctions affines définies sur le même intervalle est atteint à une borne de l'intervalle.) Or :

$$g(1) = 1 \text{ et } h(1) = f(1) \geq 0.8,$$

donc

$$\sup_{x \in [0,6]} |h(x) - g(x)| \leq 0.20.$$

En conséquence on a une majoration :

$$\sup_{x \in [0,6]} |f(x) - g(x)| \leq 0.41.$$

Cette majoration n'est certainement pas très bonne. En effet l'observation de la figure 3 montre qu'on doit avoir quelque chose comme :

$$\sup_{x \in [0,6]} |f(x) - g(x)| \approx 0.3.$$

Remarque 1.4.4. — Il est certainement plus judicieux dans ce cas d'étudier directement le maximum de la fonction $g(x) - f(x)$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

1.5. Approximation de la fonction réciproque

Nous avons utilisé pour approcher l'accroissement de la hauteur en fonction du temps la fonction cubique :

$$P(x) = -\frac{1}{9}x^3 + x^2.$$

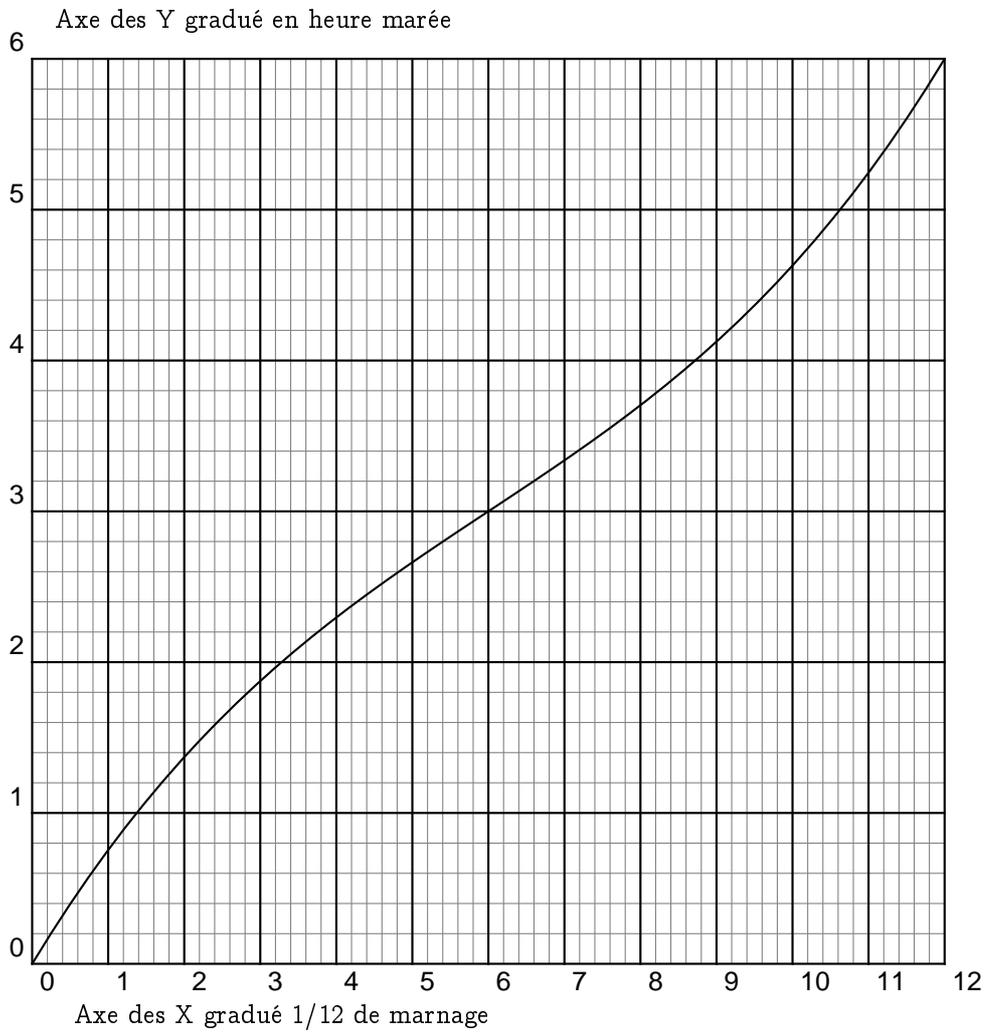
On souhaiterait avoir une formule (simple si possible) polynomiale pour trouver le temps en fonction de la hauteur. Bien entendu la fonction réciproque de $P(x)$ n'est pas polynomiale. On va donc chercher à l'interpoler par un polynôme de degré 3. On va chercher $Q(u)$ tel que $Q(0) = 0$, $Q(6) = 3$ et $Q(12) = 6$ plus une autre condition. Comme $P'(0) = P'(6) = 0$, il n'est pas raisonnable de donner une condition sur $Q'(0)$ ou $Q'(12)$. En revanche on peut imposer :

$$Q'(6) = \frac{1}{P'(3)} = \frac{1}{3}.$$

Le polynôme $Q(u)$ obtenu est alors :

$$Q(u) = \frac{1}{216}u^3 - \frac{1}{12}u^2 + \frac{5}{6}u.$$

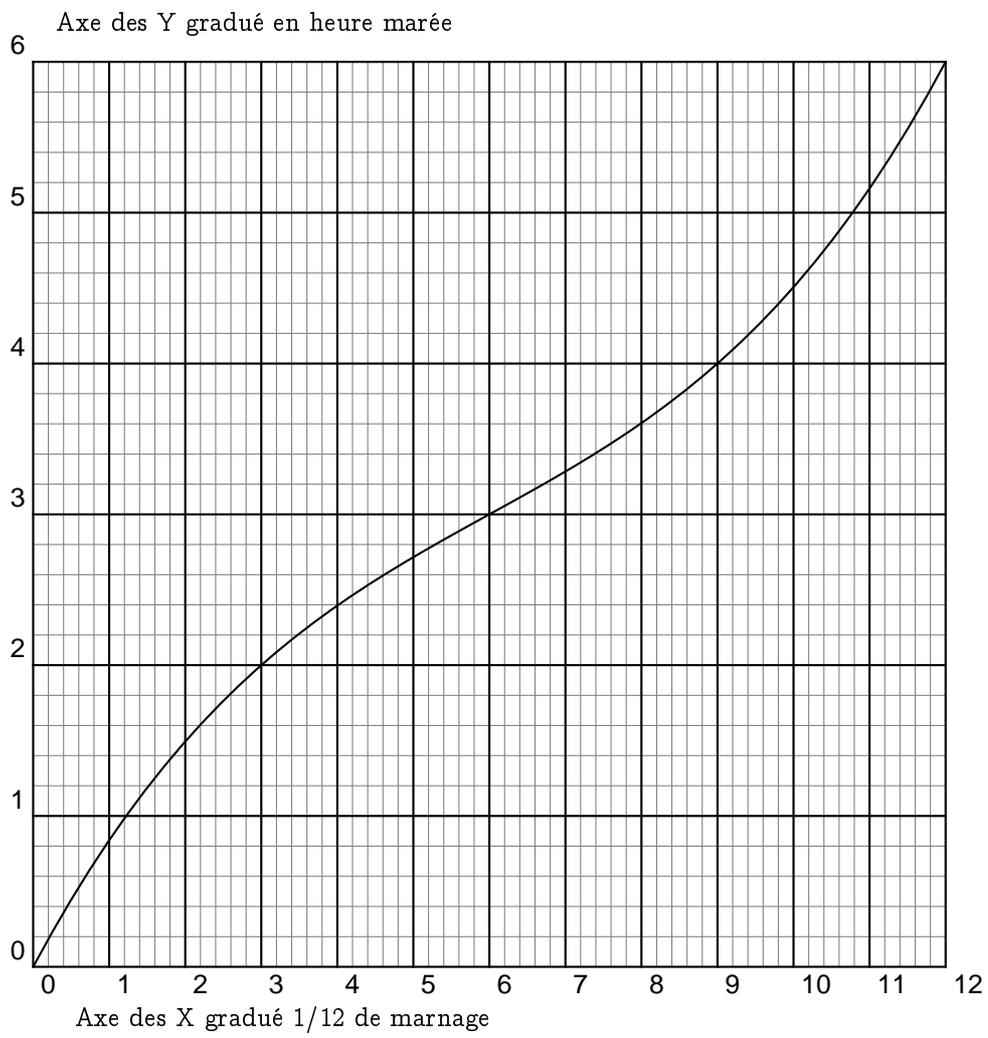
Cette fonction est représentée sur la figure 6.

FIGURE 6. La fonction $Q(u)$

On peut aussi au lieu de la condition sur la dérivée, imposer plutôt que la valeur prise en 3 soit 2. Notons alors $R(x)$ le polynôme obtenu :

$$R(u) = \frac{1}{162}u^3 - \frac{1}{9}u^2 + \frac{17}{18}u.$$

Cette fonction est représentée sur la figure 7.

FIGURE 7. La fonction $R(u)$

CHAPITRE 2

CARTOGRAPHIE DE MERCATOR

2.1. Présentation du problème

Nous présentons ici un aspect de la projection de Mercator utilisée pour représenter des portions de la terre sur une carte et en particulier largement utilisée pour les cartes marines.

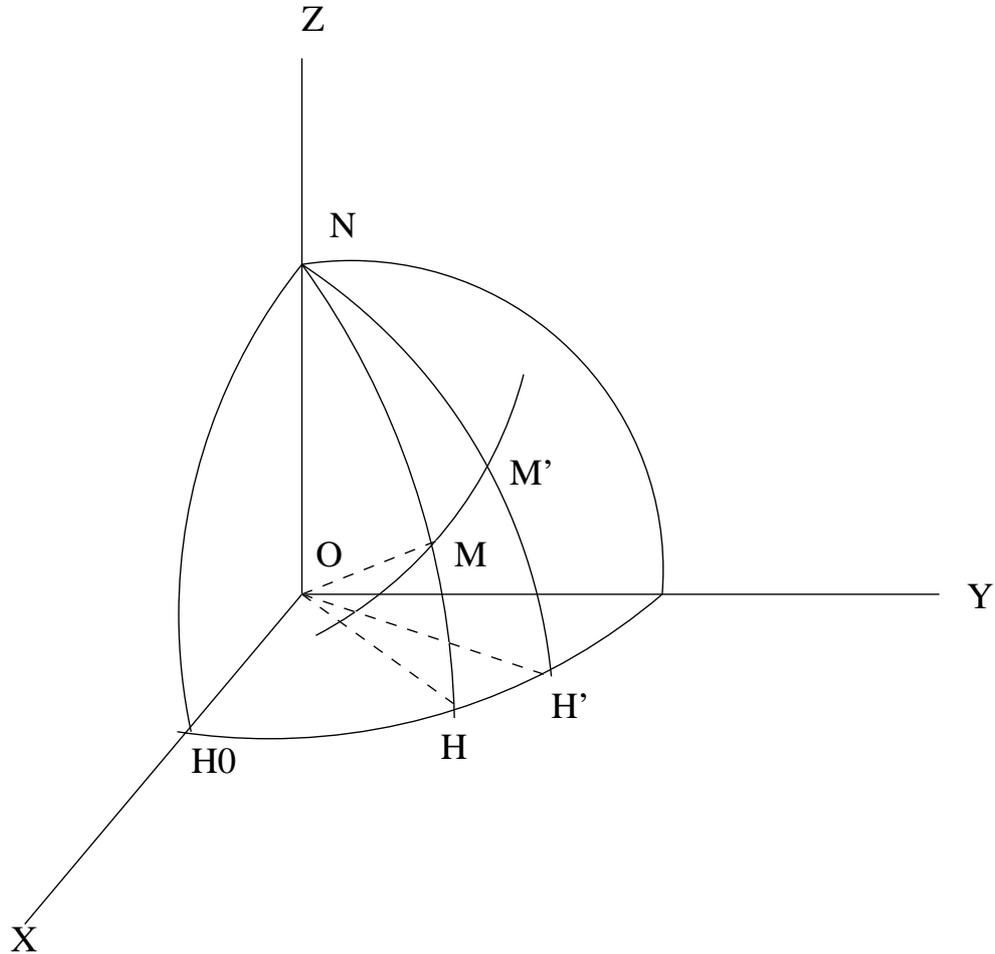


Voici un billet de banque avec le portrait de Mercator.

Gerardus Mercator (1512-1594), de son vrai nom Gerhard Kremer, est un mathématicien et géographe flamand, né à Rupelmonde (Belgique) le 5 Mars 1512. Il crée en 1559 la représentation qui porte son nom et publie un atlas de cartes.

Les marins ayant comme instrument de mesure de la direction un **compas** (c'est-à-dire une boussole), il est commode pour la navigation d'avoir des cartes marines sur lesquelles les trajectoires à **cap constant** (c'est-à-dire qui font toujours le même angle avec le nord) sont des droites. De plus on souhaite évidemment pouvoir mesurer les divers caps suivis directement sur la carte avec un rapporteur (règle Crass par exemple). Pour construire une carte marine il faut donc si possible une transformation qui conserve les angles, c'est-à-dire une transformation conforme.

La terre sera assimilée à une sphère S de centre O et de rayon R . Les pôles nord et sud seront notés N et S . Soit H_0 l'intersection du méridien origine (méridien de Greenwich) avec l'équateur.



2.2. Utilisation du calcul différentiel

Un point M est repéré par sa longitude G et sa latitude ϕ . Le point M décrit une trajectoire à cap V constant (loxodromie). Soit M' un point proche de M sur la trajectoire loxodromique décrite par M . On peut écrire les coordonnées de M et de M' :

$$M \begin{cases} G \\ \phi \end{cases}$$

$$M' \begin{cases} G' = G + \Delta G \\ \phi' = \phi + \Delta \phi \end{cases}$$

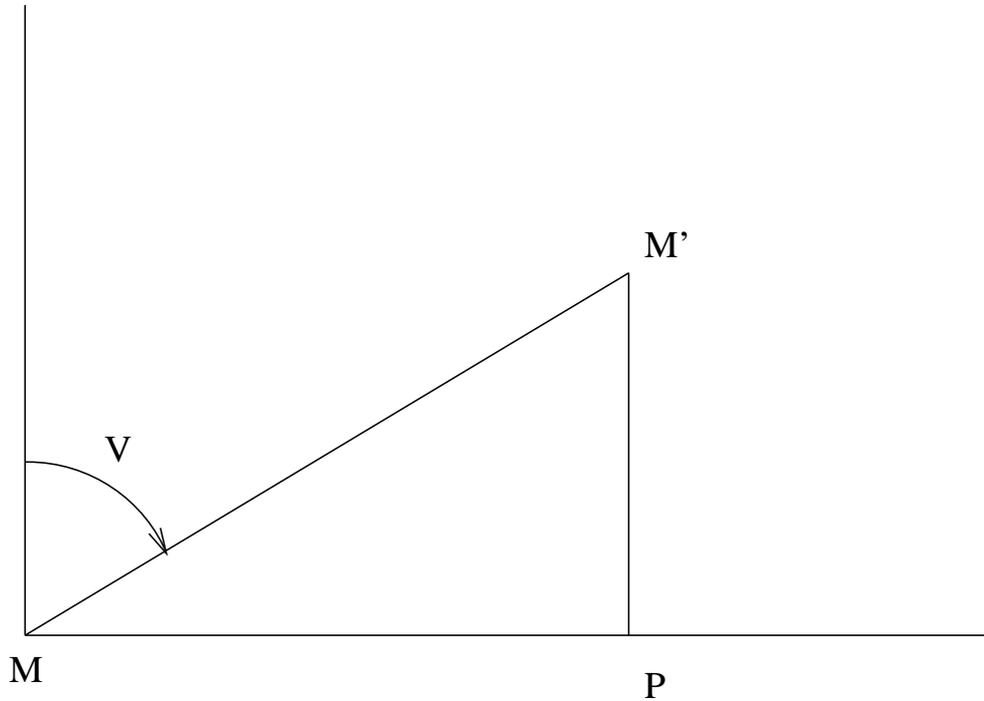


FIGURE 1. Triangle différentiel au point M

Introduisons alors le point P intersection du parallèle passant par M avec le méridien passant par M'. Le triangle sphérique MPM' sera assimilé à un triangle plan (cf. figure 1).

L'arc MP (assimilé au segment MP) est un arc de parallèle situé à la latitude ϕ , en conséquence :

$$MP = \Delta G \cos(\phi).$$

La longueur M'P est mesurée par la variation de latitude :

$$M'P = \Delta\phi.$$

Les relations trigonométriques dans le triangle MPM' nous permettent d'exprimer MP en fonction de M'P :

$$MP = M'P \tan(V),$$

ce qui donne grâce aux relations précédentes :

$$\Delta G \cos(\phi) = \Delta\phi \tan(V),$$

puis :

$$\Delta G = \tan(V) \frac{\Delta \phi}{\cos(\phi)}.$$

Ceci nous incite à introduire la notion de **latitude croissante**. Considérons la primitive de la fonction :

$$\frac{1}{\cos(\phi)}$$

qui s'annule pour $\phi = 0$, c'est-à-dire la fonction de Gudermann :

$$\text{Gud}(\phi) = \ln \left(\tan \left(\frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right).$$

Avec cette notation, si on va d'un point A à un point B par une loxodromie de cap V, alors :

$$G_B - G_A = \tan(V) (\text{Gud}(\phi_B) - \text{Gud}(\phi_A)),$$

ce qui prouve que sur une carte plane, si l'axe des x (qui mesure les longitudes G) est gradué de manière équidistante, tandis que l'axe des y (qui mesure les latitudes ϕ) est gradué par une échelle qui suit la fonction de Gudermann, alors tout arc de loxodromie est représenté par une droite, et le cap suivi par cette loxodromie est respecté sur la carte.

Remarquons que si les longitudes G_A et G_B sont exprimées en **minute d'arc** au lieu d'être exprimées en radian (rappelons qu'un mille correspond à la longueur d'un arc d'une minute sur un grand cercle de la terre) alors :

$$(6) \quad (G_B - G_A)_{\text{minute}} = \frac{180 * 60}{\pi} \tan(V) (\text{Gud}(\phi_B) - \text{Gud}(\phi_A)).$$

Cette dernière formule nous permet de construire un canevas de carte marine suivant la représentation appelée **projection de Mercator**. On définit alors la fonction latitude croissante par :

$$\phi_c(\phi) = \frac{180 * 60}{\pi} \text{Gud}(\phi),$$

ce qui nous donne :

$$(G_B - G_A)_{\text{minute}} = \tan(V) (\phi_c(\phi_B) - \phi_c(\phi_A)).$$

2.3. Méthode géométrique

De nombreux livres de navigation, pour faire comprendre les cartes de Mercator, essaient de présenter la transformation conforme utilisée en donnant une analogie plus ou moins lointaine avec une projection cylindrique. Malheureusement, il n'y a pas d'interprétation géométrique sous cette forme. Il existe cependant une interprétation géométrique mais celle-ci est relativement cachée et utilise l'inversion.

2.3.1. Loxodromie et spirale logarithmique. — Pour bien comprendre l'idée développée dans la suite, rappelons rapidement qu'une spirale logarithmique de point asymptote O est caractérisée par le fait que l'angle formé par le vecteur tangent et le rayon vecteur est constant.

Soit \mathcal{J} l'inversion de pôle S (pôle Sud) qui transforme la sphère S en le plan équatorial. Le pôle Nord N est transformé en O et les méridiens (privés de S) en les demi-droites issues de O . Comme l'inversion conserve les angles, les loxodromies autres que les parallèles sont transformées en des spirales logarithmiques de point asymptote O , les parallèles sont transformés en des cercles de centre O . L'équateur est invariant.

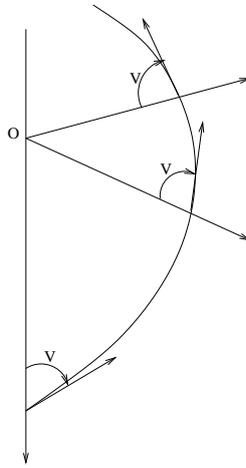


FIGURE 2. Transformée d'une loxodromie

Soit M un point de longitude G et latitude ϕ de la loxodromie de cap V passant par un point H de longitude G_0 situé sur l'équateur. Soit $M_1 = \mathcal{J}(M)$ le transformé de M par l'inversion \mathcal{J} . Notons $\rho(M_1)$ la distance de M_1 à O . Nous savons que le point M_1 décrit une spirale logarithmique d'équation :

$$\rho(M_1) = R e^{-\frac{1}{\tan(V)}(G-G_0)}.$$

2.3.2. Déroulons la spirale. — Donnons la mesure 2α à l'angle au centre \widehat{MON} . Nous avons alors :

$$\tan(\alpha) = \frac{\rho(M_1)}{R} = e^{-\frac{1}{\tan(V)}(G-G_0)},$$

avec :

$$\phi + 2\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

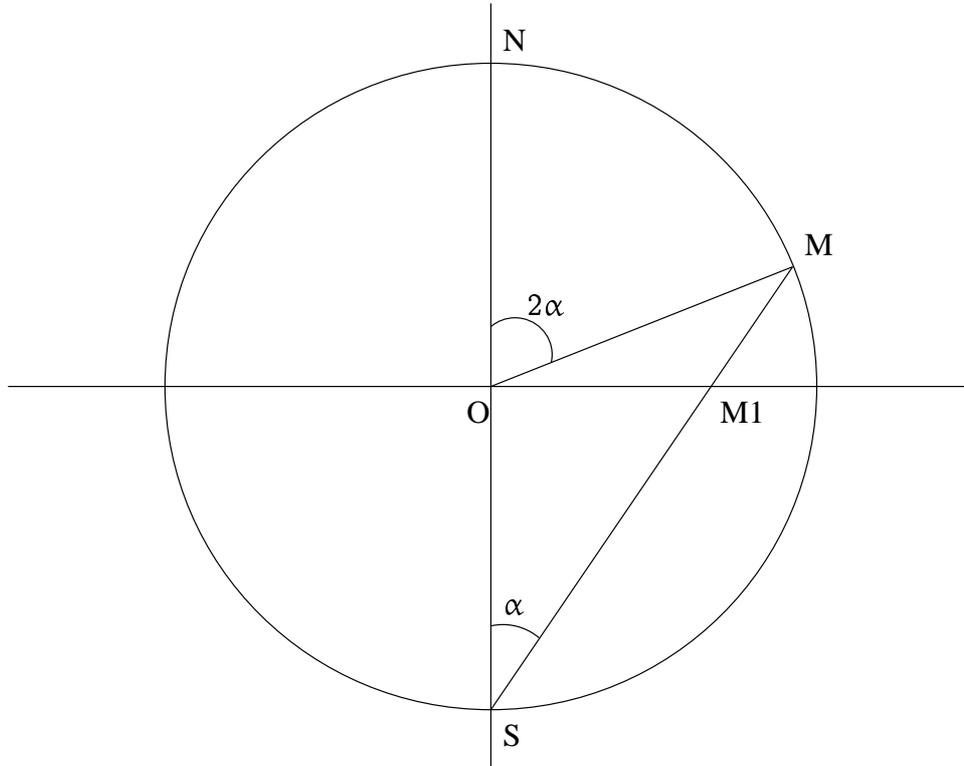


FIGURE 3. Plan méridien passant par M

On en conclut que :

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2},$$

et donc :

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) = e^{-\frac{1}{\tan(V)}(G-G_0)},$$

ou encore :

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) = e^{\frac{1}{\tan(V)}(G-G_0)}.$$

On retrouve la relation du paragraphe précédent :

$$G - G_0 = \tan(V) \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)\right).$$

2.4. Quelques calculs de distances et de cap

Le premier problème que nous allons étudier a déjà été résolu dans les sections précédentes. Il s'agit de trouver le cap vrai c_v (c'est-à-dire l'angle que fait la direction

suivie par un navire avec la direction du nord vrai) d'un navire qui va du points A de longitude G_A exprimée en minutes d'arc, et de latitude ϕ_A au point B de longitude G_B et de latitude ϕ_B : c'est l'angle V dessiné sur la figure 1. La formule (6) permet d'exprimer $\text{tg}(V) = \text{tg}(c_v)$:

$$\text{tg}(c_v) = \frac{(G_B - G_A)_{\text{radian}}}{(\text{Gud}(\phi_B) - \text{Gud}(\phi_A))},$$

c'est-à-dire :

$$(7) \quad \text{tg}(c_v) = \frac{(G_B - G_A)_{\text{radian}}}{\left[\ln \left(\tan \left(\frac{\phi_B}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) - \ln \left(\tan \left(\frac{\phi_A}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) \right]}.$$

On exclut bien sûr le cas où le point de départ et le point d'arrivée sont confondus. Cette formule montre qu'il va falloir traiter à part les cas où le dénominateur s'annule (cas où les latitudes sont les mêmes, donc les caps sont soit 90° soit 270°). Dans les autres cas, connaissant $\text{tg}(c_v)$ on va pouvoir calculer c_v . Mais remarquons qu'on doit donner les caps en degré et compris entre 0° et 360° . En revanche la fonction Atan renvoie des angles compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ et en plus deux angles distincts de 180° ont la même tangente. Il y a donc des adaptations à faire, tant du point de vue des unités que des signes. Enfin un autre problème se pose aussi, il faut choisir le bon sens de parcours autour de la terre pour aller du point de départ A au point d'arrivée B, car dans l'autre sens on y arrive aussi, mais ça risque d'être plus long. Précisons un peu les calculs qu'on doit faire.

Suposons que A et B soient donnés par leurs coordonnées géographiques dont voici un exemple :

Gdeg	Gmin	E/W	ϕ deg	ϕ min	N/S
5°	18.2'	E	43°	16,8	N

Ainsi on donnera en entrée le point A par ses 6 données géographiques :

1. $0 \leq G_{\text{deg}_A} \leq 179$ (nombre entier de degrés pour la longitude),
2. $0 \leq G_{\text{min}_A} < 60$ (nombre réel de minutes pour la longitude),
3. E/W (sens Est ou Ouest de la longitude),
4. $0 \leq \phi_{\text{deg}_A} \leq 89$ (nombre entier de degrés pour la latitude),
5. $0 \leq \phi_{\text{min}_A} < 60$ (nombre réel de minutes pour la latitude),
6. N/S (sens Nord ou Sud de la latitude).

On commence par calculer les longitudes et les latitudes G_A, ϕ_A, G_B, ϕ_B en radian et avec leurs signes :

Si Longitude A Est

$$\text{Alors } G_A = \frac{\pi}{180} (G \text{deg}_A + \frac{G \text{min}_A}{60})$$

$$\text{Sinon } G_A = -\frac{\pi}{180} (G \text{deg}_A + \frac{G \text{min}_A}{60})$$

Si latitude A Nord

$$\text{Alors } \phi_A = \frac{\pi}{180} (\phi \text{deg}_A + \frac{\phi \text{min}_A}{60})$$

$$\text{Sinon } \phi_A = -\frac{\pi}{180} (\phi \text{deg}_A + \frac{\phi \text{min}_A}{60})$$

Si Longitude B Est

$$\text{Alors } G_B = \frac{\pi}{180} (G \text{deg}_B + \frac{G \text{min}_B}{60})$$

$$\text{Sinon } G_B = -\frac{\pi}{180} (G \text{deg}_B + \frac{G \text{min}_B}{60})$$

Si latitude B Nord

$$\text{Alors } \phi_B = \frac{\pi}{180} (\phi \text{deg}_B + \frac{\phi \text{min}_B}{60})$$

$$\text{Sinon } \phi_B = -\frac{\pi}{180} (\phi \text{deg}_B + \frac{\phi \text{min}_B}{60})$$

Si $|G_B - G_A| > \pi$, il va falloir passer par l'autre côté pour que le chemin soit plus court :

Si $(G_B - G_A) > \pi$

$$\text{Alors } G_A := G_A + 2\pi$$

Sinon Si $(G_B - G_A) < -\pi$

$$\text{Alors } G_B := G_B + 2\pi$$

On travaille maintenant avec ces valeurs de G_A et G_B . Si les latitudes de A et de B sont très proches, notons ϕ leur valeur commune. On regarde si les longitudes sont très proches, auquel cas les points sont presque confondus, le cap est indéfini et la distance nulle. Si les latitudes sont très proches mais les longitudes sont distinctes le cap est 90° si $G_B - G_A < 0$ et 270° si $G_B - G_A > 0$. Dans ce cas la distance en mille est donnée par :

$$d(A, B)_{\text{mille}} = \frac{60 \times 180}{\pi} |G_B - G_A| \cos(\phi).$$

Dans les autres cas, notons T la valeur de $\text{tg}(c_v)$ calculée par la formule (7) (avec les données en radian et signées qu'on vient de calculer). On a alors :

$$(c_v)_{\text{deg}} = \begin{cases} \frac{180}{\pi} \text{Atan}(T) & \text{si } G_B \geq G_A \text{ et } \phi_B \geq \phi_A \\ \frac{180}{\pi} \text{Atan}(T) + 180 & \text{si } G_B \geq G_A \text{ et } \phi_A > \phi_B \\ \frac{180}{\pi} \text{Atan}(T) + 180 & \text{si } G_A > G_B \text{ et } \phi_A > \phi_B \\ \frac{180}{\pi} \text{Atan}(T) + 360 & \text{si } G_A > G_B \text{ et } \phi_B \geq \phi_A \end{cases}$$

Le calcul de la distance $d(A, B)$ entre les deux points A et B se fait aussi simplement à partir du triangle différentiel dessiné sur la figure 1. On calcule successivement :

$$\sin(c_v) = \sin(V) = \frac{\Delta G \cos(\phi)}{\Delta M},$$

$$\Delta M = \frac{\Delta G \cos(\phi)}{\sin(c_v)}.$$

Mais on a déjà calculé :

$$\Delta G \cos(\phi) = \Delta \phi \tan(c_v).$$

Par suite :

$$\Delta M = \frac{\Delta \phi}{\cos(c_v)},$$

et par intégration :

$$d(A, B)_{\text{mille}} = \frac{60 \times 180}{\pi} \left| \frac{1}{\cos(c_v)} (\phi_B - \phi_A) \right|.$$

CHAPITRE 3

LES ROUTES ORTHODROMIQUES

3.1. Présentation du problème

3.1.1. Route orthodromique et arc de grand cercle. — La route loxodromique est facile à suivre grâce au compas. Cependant cette route n'est pas la plus courte (en restant sur la surface de la terre) pour aller d'un point M_1 à un point M_2 sur la terre assimilée à une sphère S de centre O et de rayon R . Le chemin le plus court (sur la surface) emprunte un arc de grand cercle (orthodromie). Ce plus court chemin pour aller (en restant sur la surface) de M_1 à M_2 est appelé la route orthodromique. La distance parcourue sur la surface pour aller de M_1 à M_2 est appelée la distance orthodromique.

3.1.2. Cas particuliers. — Traitons tout de suite à part un certain nombre de cas particuliers de manière à pouvoir ensuite les écarter dans les calculs généraux.

- Cas où les points M_1 et M_2 sont confondus : le problème est alors inexistant.
- Cas où les points M_1 et M_2 sont diamétralement opposés : tout plan passant par l'axe M_1M_2 de la sphère S la coupe en un grand cercle. N'importe lequel des demi-cercles correspondants joignant M_1 à M_2 fournit une route de plus courte distance sur la surface de S . Cette distance est la moitié de la circonférence de la terre. Le choix du grand cercle passant par l'axe M_1M_2 se fait alors en fonction de la facilité de navigation dans la zone impliquée par le choix.
- Cas où l'un des points est un des pôles alors la route est plein Sud ou plein Nord.
- Cas où la différence $G = G_2 - G_1$ des longitudes G_2 et G_1 des points respectifs M_2 et M_1 vérifie $|G| = \pi$ (les points M_1 et M_2 n'étant pas diamétralement opposés). Dans ce cas, le plan OM_1M_2 passe par les pôles. La route orthodromique se trouve sur un grand cercle méridien. De plus l'arc le plus court sur ce cercle joignant M_1 à M_2 contient un des pôles. Pour savoir s'il contient le pôle Nord ou le pôle

Sud on calcule la distance parcourue en passant par le pôle Nord. Cette distance est :

$$\pi - (\phi_1 + \phi_2).$$

Donc si $\pi - (\phi_1 + \phi_2) < \pi$, c'est-à-dire si $(\phi_1 + \phi_2) > 0$, l'arc le plus court est celui qui contient le pôle Nord, et dans ce cas le premier cap à prendre est plein Nord. Si $\pi - (\phi_1 + \phi_2) > \pi$, c'est-à-dire si $(\phi_1 + \phi_2) < 0$, l'arc le plus court est celui qui contient le pôle Sud et dans ce cas le premier cap à prendre est plein sud. Le cas $\phi_1 + \phi_2 = 0$ est exclu car les points sont alors diamétralement opposés. Du point de vue de la navigation une telle route passant par un des pôles est peu réaliste. Plus généralement les routes passant trop au Nord ou trop au Sud sont en pratique à exclure.

- Cas où la différence $G = G_2 - G_1$ des longitudes G_2 et G_1 des points respectifs M_2 et M_1 vérifie $G = 0$ (les points M_1 et M_2 n'étant pas confondus). Dans ce cas le plan OM_1M_2 passe aussi par les pôles. La route orthodromique se trouve sur un grand cercle méridien. Contrairement au cas précédent, l'arc le plus court sur ce cercle joignant M_1 à M_2 ne contient aucun des deux pôles. Dans ce cas si M_1 est le point le plus au nord la route est plein Sud, sinon si M_1 est le point le plus au Sud la route est plein Nord.

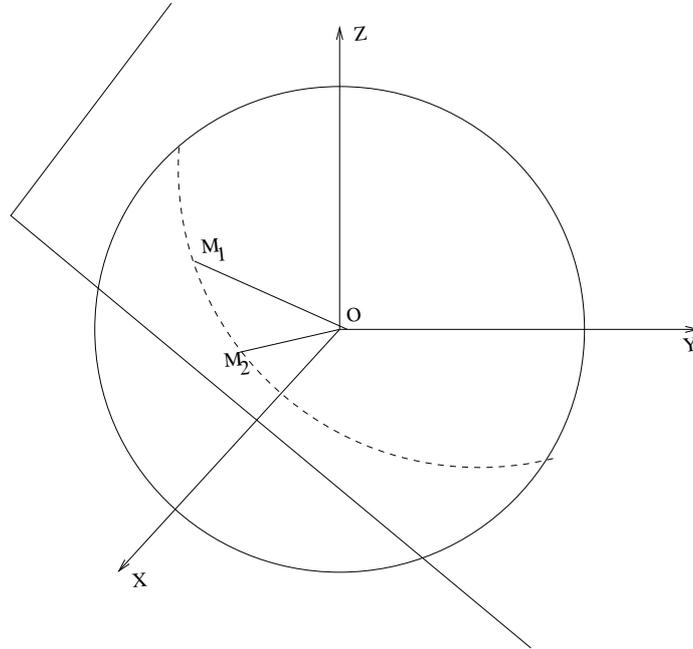
Dans toute la suite nous excluons ces cas particuliers, c'est-à-dire nous supposons que :

1. $-\frac{\pi}{2} < \phi_1, \phi_2 < \frac{\pi}{2}$,
2. $|G| = |G_2 - G_1| \neq \pi$,
3. $G = G_2 - G_1 \neq 0$,

où G_1, G_2 sont les longitudes respectives des points M_1 et M_2 et ϕ_1, ϕ_2 leurs latitudes respectives.

3.1.3. Les divers problèmes. — Les cas particuliers précédents étant exclus, la route orthodromique joignant M_1 à M_2 emprunte l'arc le plus court, du grand cercle ne passant pas par les pôles obtenu en intersectant la sphère \mathcal{S} avec le plan défini par les trois points non alignés O, M_1 et M_2 . Plusieurs problèmes vont alors se poser :

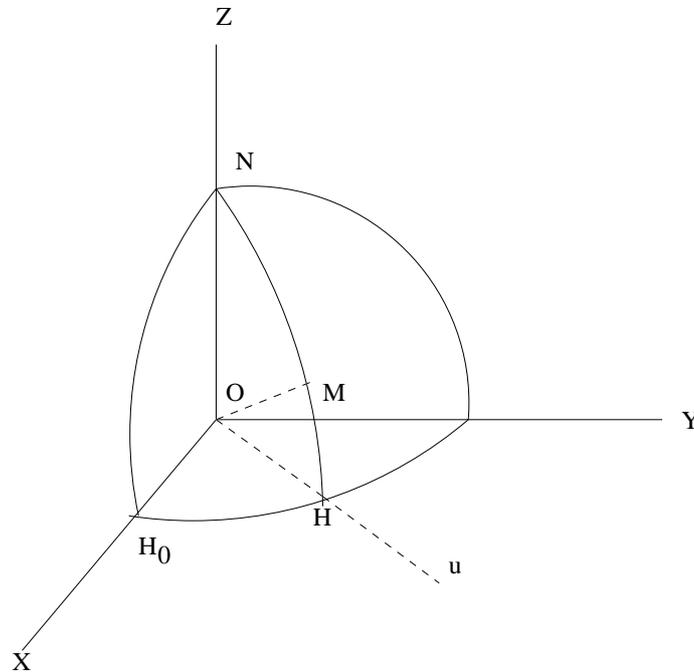
- Calculer la distance orthodromique d entre deux points donnés par leurs coordonnées géographiques.
- Déterminer le premier cap c_0 à prendre pour suivre la route orthodromique. Il faut remarquer que le cap à suivre change en permanence (sauf cas particuliers où la route orthodromique et la route loxodromique sont confondues). Toutefois on se rend compte que dans des zones de navigation raisonnables (assez loin des pôles), pour des distances inférieures à disons 500 milles, l'orthodromie coïncide à



peu près avec la loxodromie. On peut donc naviguer sur une route orthodromique en suivant en fait des arcs de loxodromie, et recalculer le cap à suivre tous les 500 milles par exemple.

Remarque 3.1.1. — Remarquons que la route orthodromique et la route loxodromique sont identiques dans les cas suivants : les deux points sont sur le même méridien (ils ont même longitude), cas que nous avons traité et qui maintenant est exclu, ou les deux points sont sur l'équateur (leurs latitudes sont nulles). Ce sont les seuls cas où la route loxodromique emprunte aussi un arc de grand cercle.

3.1.4. Notations. — La terre sera assimilée à la sphère \mathcal{S} de centre O et de rayon R . Nous introduisons le repère orthonormé direct $OXYZ$ où l'axe OX joint le centre O au point H_0 , intersection de l'équateur avec le méridien origine (méridien de Greewich) et où l'axe OZ joint le centre au pôle nord N . Les vecteurs unitaires sur ces axes seront appelés respectivement \vec{i} , \vec{j} , et \vec{k} . Un point M de la terre a des coordonnées géographiques G et ϕ (respectivement sa longitude et sa latitude). Soit m la projection orthogonale de M sur le plan OXY . Le vecteur unitaire de l'axe \vec{Om} sera noté \vec{u} . La longitude du point M est l'angle (\vec{i}, \vec{u}) . La latitude du point M est l'angle (\vec{u}, \vec{OM}) . Les longitudes Est seront comptées positivement de 0 à 180° tandis que les longitudes Ouest seront comptées négativement de 0 à -180° . Ainsi en exprimant



les angles en radian on a plus précisément pour la longitude G d'un point M :

$$-\pi < G \leq \pi.$$

Les latitudes Nord seront comptées positivement de 0 à 90° tandis que les latitudes Sud seront comptées négativement de 0 à -90° . Ainsi en exprimant les angles en radian on a plus précisément pour la latitude ϕ d'un point M :

$$-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}.$$

3.2. Les outils mathématiques

Les formules présentées dans ce texte pourraient être déduites de formules classiques de trigonométrie sphérique. Nous les redémontrons ici dans les cas qui nous intéressent en utilisant deux outils fondamentaux : le produit scalaire et le produit vectoriel.

Nous fixons un repère orthonormé direct $(OXYZ)$. Nous considérons deux points M_1 et M_2 de coordonnées respectives (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) .

3.2.1. Produit scalaire. — Avec les notations précédentes, le produit scalaire des deux vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$, noté $\langle \overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2} \rangle$, a pour expression analytique :

$$\langle \overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2} \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Mais on sait aussi que :

$$\langle \overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2} \rangle = \|\overrightarrow{OM_1}\| \|\overrightarrow{OM_2}\| \cos(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}),$$

donc, quand aucun des deux vecteurs n'est nul, on peut déterminer le cosinus de leur angle grâce au produit scalaire :

$$\cos(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

3.2.2. Produit vectoriel. — Le produit vectoriel noté $\overrightarrow{OM_1} \wedge \overrightarrow{OM_2}$ des deux vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$ est le vecteur \vec{w} orthogonal à $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$, tel que le trièdre $\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}, \vec{w}$ soit direct, et de longueur :

$$\|\overrightarrow{OM_1} \wedge \overrightarrow{OM_2}\| = \|\overrightarrow{OM_1}\| \|\overrightarrow{OM_2}\| \sin(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}).$$

Il a pour expression analytique :

$$\overrightarrow{OM_1} \wedge \overrightarrow{OM_2} = \begin{cases} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{cases}$$

3.3. Les formules

3.3.1. La distance orthodromique. — Pour calculer la distance orthodromique entre M_1 et M_2 on va calculer le cosinus de l'angle $(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2})$ en faisant le produit scalaire $\langle \overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2} \rangle$.

$$\frac{\overrightarrow{OM_1}}{R} = \begin{cases} \cos(\phi_1) \cos(G_1) \\ \cos(\phi_1) \sin(G_1) \\ \sin(\phi_1) \end{cases} \quad \frac{\overrightarrow{OM_2}}{R} = \begin{cases} \cos(\phi_2) \cos(G_2) \\ \cos(\phi_2) \sin(G_2) \\ \sin(\phi_2) \end{cases}$$

Donc :

$$\cos(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}) = \cos(\phi_1) \cos(\phi_2) \left(\cos(G_1) \cos(G_2) + \sin(G_1) \sin(G_2) \right) + \sin(\phi_1) \sin(\phi_2),$$

ou encore :

$$\cos(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}) = \sin(\phi_1) \sin(\phi_2) + \cos(\phi_1) \cos(\phi_2) \cos(G)$$

où $G = G_2 - G_1$. On en déduit que l'angle $(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2})$ exprimé en radian a pour valeur absolue :

$$(8) \quad d = \left| (\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}) \right| = \text{Acos} \left(\sin(\phi_1) \sin(\phi_2) + \cos(\phi_1) \cos(\phi_2) \cos(G) \right).$$

En conséquence la distance en mille entre les deux points M_1 et M_2 est :

$$d_{\text{nm}} = 60 \times \frac{180}{\pi} \times \text{Acos} \left(\sin(\phi_1) \sin(\phi_2) + \cos(\phi_1) \cos(\phi_2) \cos(G) \right) \text{ milles.}$$

3.3.2. Le cap en un point de la trajectoire. — Nous allons nous intéresser au premier cap à suivre, c'est à dire à l'angle entre le méridien passant par le point M_1 et la route orthodromique à suivre. Le plan \mathcal{C} du grand cercle contenant la route orthodromique à suivre et le plan méridien \mathcal{M}_1 passant par M_1 se coupent suivant le diamètre $M_1M'_1$ de la sphère terrestre \mathcal{S} . Le plan orthogonal à ce diamètre (donc aux deux plans \mathcal{C} et \mathcal{M}_1) en M_1 est le plan tangent à la sphère \mathcal{S} au point M_1 . Il apparaît donc que le premier cap à suivre est l'angle entre les deux plans \mathcal{C} et \mathcal{S} . C'est donc aussi l'angle entre deux vecteurs \vec{v}_1 et \vec{w} orthogonaux respectivement aux plans \mathcal{M}_1 et \mathcal{C} . La stratégie va donc être la suivante :

1. on calcule les produits vectoriels $\vec{v}_1 = \vec{u}_1 \wedge \vec{k}$ et $\overrightarrow{OM_1} \wedge \overrightarrow{OM_2}$,
2. on normalise le vecteur $\overrightarrow{OM_1} \wedge \overrightarrow{OM_2}$ pour obtenir un vecteur unitaire \vec{w} ,
3. on calcule le produit scalaire $\langle \vec{v}_1, \vec{w} \rangle$ des deux vecteurs unitaires \vec{v}_1, \vec{w} qui nous donne le cosinus de l'angle cherché,
4. grâce à la fonction Acos qui renvoie un angle entre 0 et π on récupère la valeur absolue du cap cherché. Par l'étude des valeurs relatives de G_1 et G_2 on détermine si la route est Est ou Ouest. Si la route est Est l'angle cherché est celui donné par la fonction Acos , si la route est Ouest on doit prendre l'opposé de cet angle, c'est à dire, pour avoir un cap entre 0 et 2π , prendre 2π moins l'angle donné par la fonction Acos .

Faisons le calcul explicitement en détaillant chacun des points précédents et rappelons que ce calcul sera fait hors des cas particuliers déjà exposés, c'est-à-dire sous les hypothèses :

1. $-\frac{\pi}{2} < \phi_1, \phi_2 < \frac{\pi}{2}$,
2. $|G| = |G_2 - G_1| \neq \pi$,
3. $G = G_2 - G_1 \neq 0$,

3.3.2.1. Calcul des produits vectoriels. — Rappelons que \vec{u}_1 est le vecteur unitaire porté par $\overrightarrow{Om_1}$ où m_1 est la projection orthogonale du point M_1 sur le plan OXY . Le

vecteur \vec{k} est le vecteur unitaire de l'axe OZ.

$$\vec{u}_1 = \begin{cases} \cos(G_1) \\ \sin(G_1) \\ 0 \end{cases} \quad \vec{k} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 1 \end{cases} \quad \vec{v}_1 = \vec{u}_1 \wedge \vec{k} = \begin{cases} \sin(G_1) \\ -\cos(G_1) \\ 0 \end{cases}$$

De la même façon :

$$\frac{\overrightarrow{OM_1}}{R} = \begin{cases} \cos(\phi_1) \cos(G_1) \\ \cos(\phi_1) \sin(G_1) \\ \sin(\phi_1) \end{cases} \quad \frac{\overrightarrow{OM_2}}{R} = \begin{cases} \cos(\phi_2) \cos(G_2) \\ \cos(\phi_2) \sin(G_2) \\ \sin(\phi_2) \end{cases}$$

$$\frac{\overrightarrow{OM_1}}{R} \wedge \frac{\overrightarrow{OM_2}}{R} = \begin{cases} \cos(\phi_1) \sin(G_1) \sin(\phi_2) - \cos(\phi_2) \sin(G_2) \sin(\phi_1) \\ \cos(\phi_2) \cos(G_2) \sin(\phi_1) - \cos(\phi_1) \cos(G_1) \sin(\phi_2) \\ \cos(\phi_1) \cos(G_1) \cos(\phi_2) \sin(G_2) - \cos(\phi_2) \cos(G_2) \cos(\phi_1) \sin(G_1) \end{cases}$$

3.3.2.2. Normalisation des vecteurs. — Le vecteur \vec{v}_1 est unitaire comme produit vectoriel de deux vecteurs unitaires orthogonaux. Dans le cas général la norme du produit vectoriel est le produit des normes des deux vecteurs multiplié par la valeur absolue du sinus de l'angle qu'ils forment. Or ici l'angle $(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2})$ a pour valeur absolue la quantité d calculée par la formule (8). La norme du vecteur $\frac{\overrightarrow{OM_1}}{R} \wedge \frac{\overrightarrow{OM_2}}{R}$ est donc $|\sin(d)|$. Remarquons que d vérifie $0 < d < \pi$ puisque les points M_1 et M_2 ne sont ni confondus, ni diamétralement opposés, et que la route choisie est l'arc le plus court sur le grand cercle contenant M_1 et M_2 . En conséquence $|\sin(d)| = \sin(d)$. On peut donc écrire :

$$\vec{w} = \begin{cases} \frac{1}{\sin(d)} \left(\cos(\phi_1) \sin(G_1) \sin(\phi_2) - \cos(\phi_2) \sin(G_2) \sin(\phi_1) \right) \\ \frac{1}{\sin(d)} \left(\cos(\phi_2) \cos(G_2) \sin(\phi_1) - \cos(\phi_1) \cos(G_1) \sin(\phi_2) \right) \\ \frac{1}{\sin(d)} \left(\cos(\phi_1) \cos(G_1) \cos(\phi_2) \sin(G_2) - \cos(\phi_2) \cos(G_2) \cos(\phi_1) \sin(G_1) \right) \end{cases}$$

ou encore :

$$\vec{w} = \begin{cases} \frac{1}{\sin(d)} \left(\cos(\phi_1) \sin(G_1) \sin(\phi_2) - \cos(\phi_2) \sin(G_2) \sin(\phi_1) \right) \\ \frac{1}{\sin(d)} \left(\cos(\phi_2) \cos(G_2) \sin(\phi_1) - \cos(\phi_1) \cos(G_1) \sin(\phi_2) \right) \\ \frac{1}{\sin(d)} \left(\cos(\phi_1) \cos(\phi_2) \sin(G) \right) \end{cases}$$

où $G = G_2 - G_1$.

3.3.2.3. *Le calcul du cosinus de l'angle de route initial* c_0 . — Le cosinus de l'angle de route initial est donné par le produit scalaire $\langle \vec{v}_1, \vec{w} \rangle$.

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}_1, \vec{w} \rangle = \cos(c_0) = \frac{1}{\sin(d)} & \left(\cos(\phi_1) \sin(\phi_2) \sin^2(G_1) \right. \\ & - \cos(\phi_2) \sin(\phi_1) \sin(G_2) \sin(G_1) - \cos(\phi_2) \sin(\phi_1) \cos(G_1) \cos(G_2) + \\ & \left. \cos(\phi_1) \sin(\phi_2) \cos^2(G_1) \right) \end{aligned}$$

d'où :

$$(9) \quad \cos(c_0) = \frac{1}{\sin(d)} \left(\cos(\phi_1) \sin(\phi_2) - \sin(\phi_1) \cos(\phi_2) \cos(G) \right),$$

où $G = G_2 - G_1$.

On en déduit donc en utilisant la fonction Acos qui renvoie un angle compris entre 0 et π , que :

$$(10) \quad |c_0| = \text{Acos} \left(\frac{\cos(\phi_1) \sin(\phi_2) - \sin(\phi_1) \cos(\phi_2) \cos(G)}{\sin(d)} \right).$$

Il reste maintenant à déterminer si la route est Est ou Ouest pour connaître la valeur de c_0 . Pour cela on ramène l'angle $G = G_2 - G_1$ dans l'intervalle $]-\pi, \pi[$ par réduction modulo 2π . Rappelons que

$$-\pi < G_1, G_2 \leq \pi,$$

et qu'on a traité les cas particuliers $|G_2 - G_1| = 0$ ou π , cas qu'on exclut maintenant. Si $G = G_2 - G_1 > \pi$ on retranche 2π à G , si $G < -\pi$ on ajoute 2π à G , sinon on ne modifie pas G . Maintenant on sait que $-\pi < G < \pi$ et $G \neq 0$. On peut alors conclure que si $G > 0$ la route est Est et alors :

$$(11) \quad c_0 = \text{Acos} \left(\frac{\cos(\phi_1) \sin(\phi_2) - \sin(\phi_1) \cos(\phi_2) \cos(G)}{\sin(d)} \right),$$

et si $G < 0$ la route est Ouest et alors :

$$(12) \quad c_0 = 2\pi - \text{Acos} \left(\frac{\cos(\phi_1) \sin(\phi_2) - \sin(\phi_1) \cos(\phi_2) \cos(G)}{\sin(d)} \right).$$

Il existe d'autres expressions pour c_0 . En particulier si on multiplie numérateur et dénominateur de (9) par $\cos(\phi_1)$ (qui n'est pas nul puisqu'on a exclu les pôles) on obtient successivement :

$$\begin{aligned}
\cos(c_0) &= \frac{\cos^2(\phi_1) \sin(\phi_2) - \sin(\phi_1) \cos(\phi_1) \cos(\phi_2) \cos(G)}{\sin(d) \cos(\phi_1)}, \\
&= \frac{(1 - \sin^2(\phi_1)) \sin(\phi_2) - \sin(\phi_1) \cos(\phi_1) \cos(\phi_2) \cos(G)}{\sin(d) \cos(\phi_1)}, \\
&= \frac{\sin(\phi_2) - \sin(\phi_1) (\sin(\phi_1) \sin(\phi_2) + \cos(\phi_1) \cos(\phi_2) \cos(G))}{\sin(d) \cos(\phi_1)},
\end{aligned}$$

et finalement la formule :

$$(13) \quad \cos(c_0) = \frac{\sin(\phi_2) - \sin(\phi_1) \cos(d)}{\sin(d) \cos(\phi_1)}.$$

À partir de la formule (13) on obtient des expressions alternatives pour les formules (11) et (12) :

$$(14) \quad \text{si } G > 0 \text{ alors } c_0 = \text{Acos} \left(\frac{\sin(\phi_2) - \sin(\phi_1) \cos(d)}{\sin(d) \cos(\phi_1)} \right),$$

$$(15) \quad \text{si } G < 0 \text{ alors } c_0 = 2\pi - \text{Acos} \left(\frac{\sin(\phi_2) - \sin(\phi_1) \cos(d)}{\sin(d) \cos(\phi_1)} \right).$$

Les formules (14) contiennent une fonction trigonométrique de moins à calculer que les formules (11) et (12). Cependant la présence du terme parasite $\cos(\phi_1)$ en dénominateur peut entraîner des erreurs d'arrondi au voisinage de $\phi_1 = \pm\pi/2$.

Bien entendu puisqu'on connaît $\cos(c_0)$ il est possible de calculer $|\sin(c_0)|$. Plutôt que de calculer $1 - \cos^2(c_0)$ il est plus simple de calculer le produit vectoriel $\vec{v}_1 \wedge \vec{w}$:

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1 &= \begin{cases} \sin(G_1) \\ -\cos(G_1) \\ 0 \end{cases} \\
\vec{w} &= \begin{cases} \frac{1}{\sin(d)} \left(\cos(\phi_1) \sin(G_1) \sin(\phi_2) - \cos(\phi_2) \sin(G_2) \sin(\phi_1) \right) \\ \frac{1}{\sin(d)} \left(\cos(\phi_2) \cos(G_2) \sin(\phi_1) - \cos(\phi_1) \cos(G_1) \sin(\phi_2) \right) \\ \frac{1}{\sin(d)} \left(\cos(\phi_1) \cos(\phi_2) \sin(G) \right) \end{cases}
\end{aligned}$$

D'où

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{w} = \begin{cases} -\frac{1}{\sin(d)} \cos(G_1) \cos(\phi_1) \cos(\phi_2) \sin(G) \\ -\frac{1}{\sin(d)} \sin(G_1) \cos(\phi_1) \cos(\phi_2) \sin(G) \\ -\frac{1}{\sin(d)} \sin(\phi_1) \cos(\phi_2) \sin(G) \end{cases}$$

et donc :

$$(16) \quad |\sin(c_0)| = \frac{\|\vec{v}_1 \wedge \vec{w}\|}{\|\vec{v}_1\| \|\vec{w}\|} = \left| \frac{\cos(\phi_2) \sin(G)}{\sin(d)} \right|.$$

3.3.3. Le vertex. — Sur un grand cercle, il existe deux points diamétralement opposés V et V' qui ont une latitude de valeur absolue maximale. Si le grand cercle n'est pas l'équateur, ce couple de points est unique, et nous noterons V celui qui est dans l'hémisphère Nord, c'est le vertex Nord dont la latitude sera notée ϕ_V et la longitude G_V . Nous noterons V' le vertex Sud de latitude $\phi_{V'} = -\phi_V$ et de longitude $G_{V'} = G_V + \pi$ si $G_V \leq 0$ et $G_{V'} = G_V - \pi$ si $G_V > 0$. Une route orthodromique est supportée par un grand cercle, et le vertex Nord de la route est le vertex Nord du grand cercle qui la contient. Attention, les vertex peuvent être à l'extérieur de l'arc de grand cercle constituant la route. Il est important de pouvoir évaluer les coordonnées des vertex et en particulier leurs latitudes, car si l'un d'entre eux est sur l'arc constituant la route, c'est le point de plus haute latitude de la route. On pourra ainsi voir si la route calculée ne porte pas trop au Nord ou au Sud. Si l'arc de grand cercle constituant la route ne contient pas l'un des vertex, alors le point de plus haute latitude de la route est la latitude d'une des extrémités de l'arc : celle de plus haute latitude (Nord ou Sud).

La latitude ϕ_V du vertex Nord est l'angle que fait le plan qui contient le grand cercle de la route avec le plan équatorial OXY . On va donc l'obtenir en calculant l'angle aigu formé par les normales respectives à ces plans. En conséquence, on aura :

$$\cos(\phi_V) = |\langle \vec{w}, \vec{k} \rangle| = \left| \frac{\cos(\phi_1) \cos(\phi_2) \sin(G)}{\sin(d)} \right|,$$

ce qui compte tenu de la formule (16) nous donne :

$$\cos(\phi_V) = \cos(\phi_1) |\sin(c_0)|,$$

ou encore :

$$(17) \quad \phi_V = \text{Acos} \left(\cos(\phi_1) |\sin(c_0)| \right).$$

3.4. Méthode graphique de report sur une carte

Considérons que le rayon de la terre est l'unité. Soit Π le plan tangent au pôle nord. On considère sur Π le repère Nxy obtenu par translation de vecteur \overrightarrow{ON} du repère OXY . Soit M un point de la terre qui n'est pas sur l'équateur. La droite OM coupe le plan Π en $\Pi(M)$. Autrement dit on considère la projection centrale de centre O sur le plan Π . Regardons comment se projette l'hémisphère Nord. Les méridiens (leur partie Nord) se projettent sur des rayons et la partie Nord d'un méridien de longitude G se projette sur le rayon qui fait un angle G avec l'axe Nx . Autrement dit la longitude est conservée. Les parallèles se projettent sur des cercles de centre N . Le parallèle de latitude ϕ se projette sur le cercle de centre N et de rayon $\cotg(\phi)$. On a

ainsi une carte. Sur la figure 1 on a dessiné les méridien de 15° en 15° et on a dessiné les parallèles 30° , 45° , 60° .

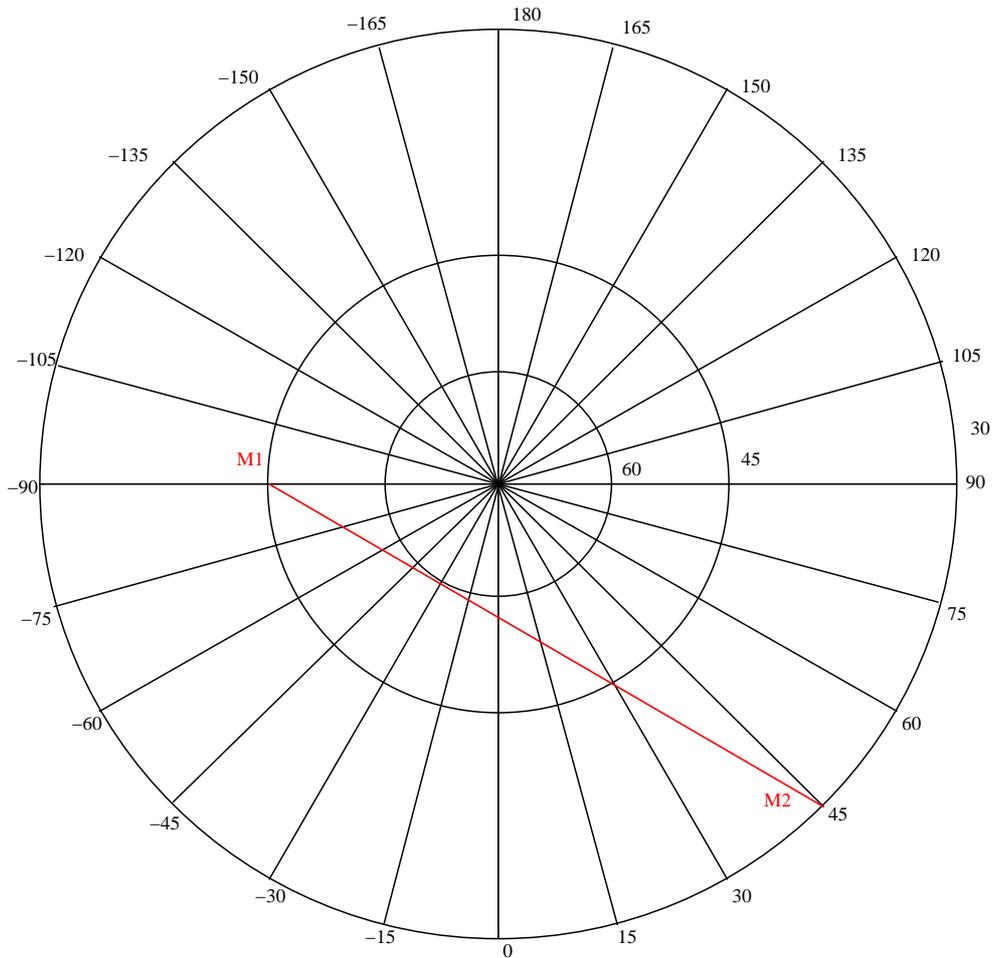


FIGURE 1. Carte

Tout grand cercle (sauf l'équateur) se trouvant dans un plan passant par O se projette en l'intersection de ce plan avec Π , c'est-à-dire sur une droite. Donc sur cette carte les orthodromies sont des droites. On peut donc facilement dessiner une orthodromie et repérer les coordonnées de ses points sur le graphique. On peut ensuite reporter ces points sur une carte de Mercator par exemple et dessiner la route orthodromique point par point sur la carte de Mercator. Du point de vue du calcul le point M de latitude ϕ (Nord) et longitude G se projette en le point $\Pi(M)$ de

coordonnées $x = \cotg(\phi) \cos(G)$, $y = \cotg(\phi) \sin(G)$. Le vertex V de la route orthodromique M_1M_2 est représenté sur la carte par le point $\Pi(V)$ projection orthogonale de N sur la droite $\Pi(M_1)\Pi(M_2)$ qui représente la route orthodromique M_1M_2 . Sur la figure 1 on a tracé la route orthodromique joignant M_1 de latitude $45^\circ N$ et longitude $90^\circ W$ au point M_2 de latitude $30^\circ N$ et longitude $45^\circ E$. On voit graphiquement que le vertex V a pour latitude à peu près 60° . Cette vision de la situation peut amener à un calcul des coordonnées de V :

1. on calcule les coordonnées des points $\Pi(M_1)$ et $\Pi(M_2)$ du plan Π ,
2. on détermine l'équation de la droite D passant par $\Pi(M_1)$ et $\Pi(M_2)$,
3. on projette dans le plan Π l'origine N sur la droite D . On obtient ainsi le point $\Pi(V)$ par ses coordonnées dans le repère Nxy ,
4. on remonte aux coordonnées géographiques du point V , et on obtient $G_V = \text{angle}(Nx, N\Pi(V))$ et $\phi_V = \text{Acotg}(\|N\Pi(V)\|)$.

Pour traiter les points de l'hémisphère Sud, il suffit de remplacer un tel point M par son point diamétralement opposé M' qui lui est dans l'hémisphère Nord. Si un grand cercle passe par M il passe aussi par M' , donc cela ne changera rien sur la projection de la route et le calcul du vertex se fera de la même manière.

Calculons par exemple avec cette méthode la longitude G_V . On supposera que les points M_1 et M_2 sont de latitude Nord. Si l'un d'entre eux est de latitude Sud on le remplace par le point diamétralement opposé. Ces deux points sont représentés sur la carte constituée par le plan Π par les points $\Pi(M_1)$ et $\Pi(M_2)$ de coordonnées respectives :

$$\Pi(M_1) = \begin{cases} X_1 = \cotg(\phi_1) \cos(G_1) \\ Y_1 = \cotg(\phi_1) \sin(G_1) \end{cases} \quad \Pi(M_2) = \begin{cases} X_2 = \cotg(\phi_2) \cos(G_2) \\ Y_2 = \cotg(\phi_2) \sin(G_2) \end{cases}$$

La droite D passant par M_1 et M_2 a pour équation :

$$(X - X_1)(Y_2 - Y_1) - (Y - Y_1)(X_2 - X_1) = 0,$$

ou encore :

$$X(Y_2 - Y_1) - Y(X_2 - X_1) + Y_1X_2 - X_1Y_2 = 0.$$

La droite D' perpendiculaire à D et passant par l'origine N a donc pour équation :

$$X(X_2 - X_1) + Y(Y_2 - Y_1) = 0.$$

L'intersection de D et D' est le point $\Pi(V)$. Les coordonnées X_V et Y_V de ce point $\Pi(V)$ sont :

$$\Pi(V) = \begin{cases} X_V = \frac{(X_1Y_2 - Y_1X_2)(Y_2 - Y_1)}{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} \\ Y_V = -\frac{(X_1Y_2 - Y_1X_2)(X_2 - X_1)}{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} \end{cases}$$

Par ailleurs la droite D' s'exprime aussi sous la forme :

$$Y = -\frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1} X,$$

ce qui montre que :

$$(18) \quad \tan(G_V) = -\frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1}.$$

En conséquence :

$$(19) \quad \begin{aligned} & \text{Si } X_V \geq 0 \text{ alors } G_V = \text{Atan}\left(-\frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1}\right) \\ & \text{Si } X_V < 0 \text{ et } \tan(G_V) \geq 0 \text{ alors } G_V = \text{Atan}\left(-\frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1}\right) - \pi \\ & \text{Si } X_V < 0 \text{ et } \tan(G_V) < 0 \text{ alors } G_V = \text{Atan}\left(-\frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1}\right) + \pi \end{aligned}$$

Remarque 3.4.1. — Il y a des cas particuliers :

1. Si les deux points sont sur l'équateur, le grand cercle contenant la route est l'équateur, donc la plus haute latitude atteinte est 0. Chercher le vertex n'a pas de sens puisque tout point de l'équateur est un vertex.
2. Si un et un seulement des points M_1, M_2 est de latitude nulle, supposons que ce soit M_2 par exemple alors il y a bien un vertex, mais attention car M_2 n'a pas de projection sur le plan Π . En fait le point $\Pi(M_2)$ est le point à l'infini dans la direction donnée par G_2 . Il suffit alors de remplacer la droite $\Pi(M_1)\Pi(M_2)$ par la droite D issue de $\Pi(M_1)$ et de coefficient directeur $\tan(G_2)$.

CHAPITRE 4

LA DÉVIATION DU COMPAS

4.1. Présentation du problème

L'appareil le plus répandu pour déterminer la direction d'un navire est le compas magnétique (boussole adaptée à la navigation). D'autres systèmes existent, basés sur des comportements mécaniques (compas gyroscopiques) ou basés sur des temps de propagation de signaux (GPS). Déterminer le cap d'un navire (direction suivie) est la mesure fondamentale faite par les navigateurs. D'ailleurs cette grandeur première en navigation impose par exemple le format des cartes : on a intérêt à ce qu'une route à cap constant soit représentée par une droite sur la carte, ce qui donne toute sa force à la représentation conforme de Mercator. Cependant l'utilisation du compas magnétique pour déterminer le cap, donne lieu à quelques difficultés. La première d'entre elles est la différence entre la direction du Nord géographique et celle du Nord magnétique, différence appelée **déclinaison magnétique** qui dépend du lieu où on se trouve et qui varie dans le temps. L'autre difficulté tient à l'appareil de mesure (le compas) et à son environnement (présence des masses métalliques). L'erreur faite par le compas dans sa détermination du Nord magnétique est appelée la **déviaton du compas**. La déviation dépend essentiellement du cap suivi, mais aussi du lieu où l'on se trouve.

Pout résumer la situation donnons les définitions et formules suivantes :

1. Le cap vrai qu'on notera C_v , est l'angle entre la direction du Nord géographique et la direction du bateau (ou encore entre le méridien du lieu et la direction du bateau). Cet angle est compris entre 0° et 360° . 0° mesure une direction plein Nord, 90° une direction plein Est, 180° une direction plein Sud et 270° une direction plein Ouest. C'est bien entendu cet angle qu'on veut calculer pour les reports sur les cartes.

2. Le cap magnétique qu'on notera C_m est l'angle entre la direction du Nord magnétique et la direction du bateau. Ce cap diffère du cap vrai par la déclinaison magnétique du lieu (indiquée sur la carte à une date donnée avec son évolution dans le temps). Cette déclinaison est positive ou négative suivant que le Nord magnétique est à l'Est du Nord vrai ou à l'Ouest de celui-ci. On a la formule suivante :

$$(20) \quad C_v = C_m + D$$

3. Le cap compas qu'on notera C_c est la valeur du cap lue sur le compas. Cette valeur diffère du cap magnétique d'un angle positif ou négatif appelé la déviation du compas, qu'on notera d . Ainsi

$$(21) \quad C_m = C_c + d,$$

et en définitive

$$(22) \quad C_v = C_c + D + d.$$

On introduit parfois l'angle $D + d$, qu'on appelle la **variation** et qu'on note W . On écrit alors

$$(23) \quad C_v = C_c + W.$$

Ainsi, il est important de savoir, pour un navire donné et un compas positionné sur ce navire, et pour une zone de navigation déterminée, tracer la courbe qui donne la déviation du compas en fonction du cap compas lu, et donc retrouver le cap magnétique puis le cap vrai en fonction du cap compas lu. L'opération qui consiste à obtenir cette courbe s'appelle la **régulation du compas**. Elle inclut une opération préliminaire qu'on appelle la **compensation du compas** et qui, par un bon positionnement de masselotes en fer, tend à ramener les valeurs de d calculées dans une fourchette raisonnable (entre $\pm 5^\circ$ si possible).

4.2. La formule d'Archibald Smith

Comme nous l'avons vu dans la section précédente, il est important de tracer pour un compas installé donné, et pour une zone de navigation, la courbe de déviation du compas, c'est-à-dire la courbe de la fonction qui à tout cap compas C_c fait correspondre la déviation d . Cette courbe peut être tracée point par point en repérant le cap vrai par rapport à des amers remarquables. C'est en général ce qu'on fait en pratique. Cependant, il existe une formule donnant d en fonction de C_c qui permet

avec 5 mesures d'avoir l'équation de la courbe. Cette formule est due à Sir Archibald Smith (1813-1872) :

$$d(C_c) = A_0 + A_1 \sin(C_c) + B_1 \cos(C_c) + A_2 \sin(2 C_c) + B_2 \cos(2 C_c).$$

Si on analyse cette formule, on peut faire la remarque suivante. La fonction $d(C_c)$ est clairement périodique de période 2π . On peut penser d'après l'interprétation physique que cette fonction est de classe C^1 (dérivable et de dérivée continue). Donc $d(C_c)$ est développable en série de Fourier. La formule d'Archibald Smith dit que seuls les coefficients A_0, A_1, B_1, A_2, B_2 de la série de Fourier sont éventuellement distincts de zéro.

Il suffit alors de déterminer d pour 5 valeurs bien choisies de C_c pour disposer de l'équation de la courbe de déviation du compas. Par exemple si on dispose de $d(0^\circ)$, $d(90^\circ)$, $d(180^\circ)$, $d(270^\circ)$, $d(45^\circ)$, alors on a :

$$d(0) = A_0 + B_1 + B_2,$$

$$d(90) = A_0 + A_1 - B_2,$$

$$d(180) = A_0 - B_1 + B_2,$$

$$d(270) = A_0 - A_1 - B_2,$$

$$d(45) = A_0 + A_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}(A_1 + B_1).$$

De ces formules on tire les coefficients :

$$(24) \quad A_0 = \frac{1}{4} \left(d(0) + d(90) + d(180) + d(270) \right),$$

$$(25) \quad A_1 = \frac{1}{2} \left(d(90) - d(270) \right) - A_0,$$

$$(26) \quad B_1 = \frac{1}{2} \left(d(0) - d(180) \right),$$

$$(27) \quad A_2 = d(45) - \frac{\sqrt{2}}{2} \left(A_1 + B_1 \right) - A_0,$$

$$(28) \quad B_2 = \frac{1}{2} \left(d(0) + d(180) \right) - A_0.$$

